UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA METROPOLITANA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, MATEMÁTICAS Y DEL MEDIO AMBIENTE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Apuntes y Guías de Matemáticas

Ecuaciones Diferenciales

Apuntes de Clases

Lidia Ortega Silva

4a Edición, Santiago – Chile, septiembre 2010

PRÓLOGO

Este apunte se ha generado mediante una recopilación de clases realizadas en la UTEM, durante varios semestres, sobre el tema de ecuaciones diferenciales ordinarias, de acuerdo a lo estipulado en el programa de estudio para esta asignatura. La transposición didáctica aplicada es fruto de la experiencia de esos semestres. El claro sentido de este material, es entregar los contenidos y algunos ejemplos de ejercicios con sus desarrollos para su ejercitación y análisis, así como también autoevaluaciones y ejercicios propuestos para enfrentar de mejor manera la asignatura. En este apunte encontrará el desarrollo de 12 unidades temáticas:

Unidad 1: Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden
En esta unidad se analizan los conceptos de ecuación diferencial, la solución de una ecuación diferencial y el teorema de existencia- unicidad.

Unidad 2: Tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden
En esta unidad se estudian las ecuaciones diferenciales de variables separables, las homogéneas, las de coeficientes lineales, las exactas, las lineales, la ecuación de Bernoulli, la ecuación de Riccati y la ecuación de Clairaut, además de la reducción de ecuaciones de 2º orden a 1^{er} orden.

Unidad 3: Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
En esta unidad se ven las siguientes aplicaciones: trayectorias ortogonales, problemas geométricos, problemas de crecimiento y decrecimiento, donde destacamos: problemas de enfriamiento y problemas de mezclados, problemas mecánicos y problemas de circuitos eléctricos.

Unidad 4: Solución de ecuaciones diferenciales mediante una técnica cualitativa.
En esta unidad se estudian campos de direcciones para ecuaciones diferenciales autónomas, puntos de equilibrio y línea de fase, bifurcaciones, estabilidad de una solución de equilibrio y la aplicación del análisis cualitativo a la dinámica poblacional.

Unidad 5: Ecuaciones diferenciales lineales de orden n.
En esta unidad se ven los teoremas fundamentales relacionados con la solución general de estas ecuaciones. Se analiza la solución complementaria de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, la independencia lineal de las soluciones mediante el wronskiano, la solución particular mediante el método de los coeficientes indeterminados y mediante el método de variación de parámetros.

Unidad 6: Ecuaciones diferenciales con coeficientes variables que pueden transformase en ecuaciones lineales con coeficientes constantes.
En esta unidad se analizan las ecuaciones de Euler y otros tipos de ecuaciones.

Unidad 7: Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales.
En esta unidad se estudian las vibraciones en sistemas mecánicos, circuitos eléctricos, oscilaciones de un péndulo simple y oscilaciones verticales de un cuerpo flotando en un líquido.

Unidad 8: La transformada de Laplace.
En esta unidad se ven las propiedades de la transformada de Laplace y su aplicación a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes, y con condiciones iniciales.

Unidad 9: Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
En esta unidad se analizan tres métodos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales: el método de eliminación gaussiana, la regla de Cramer, y el método de la transformada de Laplace. Aplicaciones a resortes acoplados, redes eléctricas y problemas de mezclados.
Para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneos, se considera su forma matricial y su solución mediante valores propios y vectores propios. Para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneos se aplica el método de los coeficientes indeterminados y el método de variación de parámetro. También en esta unidad se analiza la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales por el método de la matriz exponencial.

Unidad 10: Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.
En esta unidad se ven los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneos, se considera su forma matricial y su solución mediante valores propios y vectores propios. Para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneos se aplica el método de los coeficientes indeterminados y el método de variación de parámetro. También en esta unidad se analiza la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales por el método de la matriz exponencial.

Unidad 11: Análisis cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales.
En esta unidad se estudian los conceptos de plano fase, punto de equilibrio, retrato de fase, estabilidad de las soluciones, las configuraciones típicas de las trayectorias de las soluciones en torno de puntos críticos, el análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales de 2º orden, el análisis cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales de 1er orden mediante valores propios y vectores propios.

Unidad 12: Solución de ecuaciones diferenciales mediante series.
En esta unidad se analiza la solución de una ecuación diferencial mediante la serie de Taylor, series de potencias en general, se dan los conceptos de punto ordinario, punto singular, punto singular regular, ecuación indicial y serie de Fröbenius.

Al final de estas unidades hay formularios que presentan un resumen de los contenidos tratados en las unidades indicadas y otros formularios que presentan resúmenes de contenidos que son requisitos fundamentales para ecuaciones diferenciales. Cada unidad presenta ejercicios propuestos. Les recomiendo resolverlos, a fin de comprender mejor los contenidos tratados y tener éxito en sus estudios.

Lidia Ortega Silva

ÍNDICE

UNIDAD 1: INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

Definición de ecuación diferencial

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que involucra derivadas de una función desconocida de una o más variables. Si la función desconocida depende sólo de una variable (de tal modo que las derivadas son derivadas ordinarias), la ecuación se llama una **ecuación diferencial ordinaria**. Sin embargo, si la función desconocida depende de más de una variable (de tal modo que las derivadas son derivadas parciales) la ecuación se llama una **ecuación diferencial parcial**.

Ejemplos

1) $\dfrac{dy}{dx} = 2x + y$ o bien $y' = 2x + y$, es una ecuación diferencial ordinaria donde $y = f(x)$

2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt}$ - 15x = 0 o bien $x'' - 2x' - 15x = 0$, es una ecuación diferencial ordinaria donde $x = g(t)$

3) $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{2\partial^2 V}{\partial y^2} = V$, es una ecuación diferencial parcial donde $V = F(x, y)$.

Definición

El **orden** de una ecuación diferencial corresponde al orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación.

Ejemplos

1) $\dfrac{dy}{dx} = 2x + y$ ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{2dx}{dt} - 15x = 0$ ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

3) $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{2\partial^2 V}{\partial y^2} = V$ ecuación diferencial parcial de segundo orden.

Observación

Una ecuación diferencial ordinaria de **orden n** puede expresarse como:

$$\boxed{g(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0}$$

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria **lineal** es una ecuación que puede ser escrita en la forma

$$\boxed{a_o(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x)\, y = F(x)} \qquad *$$

donde $F(x)$ y los coeficientes $a_o(x)$, $a_1(x)$, ---, $a_n(x)$ son funciones dadas de x y $a_o(x) \neq 0$.

Una ecuación diferencial que no puede escribirse en la forma de $*$ se llama ecuación diferencial **no lineal**.

Ejemplos

$y' = 2x + y$ es lineal
$x'' - 2x' - 15x = 0$ es lineal
$y'^2 + xy' - y = 0$ es no lineal

Definición

Una **solución** de una ecuación diferencial es cualquier función que satisface la ecuación, es decir, la reduce a una identidad.

Ejemplo

$x = e^{5t}$ y $x = e^{-3t}$ son dos soluciones de la ecuación $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2dx}{dt} - 15x = 0$

En efecto: $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2dx}{dt} - 15x = 25e^{5t} - 2\cdot 5e^{5t} - 15e^{5t} = 0$

y $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2dx}{dt} - 15x = 9e^{-3t} - 2\left(-3e^{-3t}\right) - 15e^{-3t} = 0$

Nota: $x = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-3t}$, donde c_1 y c_2 son constantes, es una solución también.

Observaciones sobre la solución de una ecuación diferencial

1.- La solución de una ecuación diferencial puede venir dada en forma implícita.
Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ define implícitamente a y en función de x.
Derivando implícitamente, se tiene

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$\therefore$ la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ es solución implícita de la ecuación $y' = -\frac{x}{y}$

2.- La ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x)$ se resuelve integrando cada lado con respecto a x.

Luego $y = \int f(x)dx + c$

3.- La ecuación diferencial $\frac{d^ny}{dx^n} = f(x)$ se resuelve por integraciones sucesivas de la ecuación diferencial, con respecto a x.

Ejemplo :

Resolver la ecuación diferencial $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 5$

Respuesta:

Integrando $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \int 5 \; dx + c_1 = 5x + c_1$

Integrando $\dfrac{dy}{dx} = \int (5x + c_1)\, dx + c_2 = \dfrac{5x^2}{2} + c_1 x + c_2$

Integrando $y = \int \left(\dfrac{5x^2}{2} + c_1 x + c_2 \right) dx + c_3$

:. $y = \dfrac{5x^3}{6} + \dfrac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3$ es la solución de la ecuación diferencial.

Nota : Observe el orden de la ecuación diferencial y el número de constantes que aparecen en la solución.

4.- Las constantes de integración se pueden expresar en la forma que se estime más conveniente.

$c, \quad c^2, \quad \ln c, \quad \dfrac{c}{2}, \sqrt{c}$, etc.

Problemas de valor inicial y de frontera

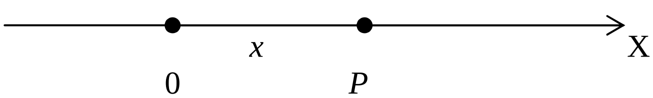
Ilustraremos estos dos conceptos con el siguiente problema.

Problema

Una partícula P se mueve a lo largo del eje x de tal manera que su aceleración en cualquier tiempo $t \geq 0$, está dada por $a = 16 - 24$ t.

a) Encuentre la posición x de la partícula, medida del origen 0 a cualquier tiempo $t > 0$, asumiendo que inicialmente ($t = 0$) está localizada en x = 2 y está viajando a una velocidad $v = -5$.

b) Resuelva a) si solo se sabe que la partícula está localizada inicialmente en x = 2 y en x = 7, cuando t = 1.



velocidad: v = $\dfrac{dx}{dt}$, aceleración: a = $\dfrac{d^2x}{dt^2}$

Respuesta

a) $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = 16 - 24t$

$\therefore$ $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} = 16 - 24t}$ es la ecuación diferencial requerida para el movimiento

como $x = 2$, $v = -5$, para $t = 0$

$\int \dfrac{d^2x}{dt^2}dt = \int (16 - 24t)dt$, luego $\dfrac{dx}{dt} = 16t - 12t^2 + c_1$, es decir $v(t) = 16t - 12t^2 + c_1$

y para $t = 0$, $v = 5$, luego $c_1 = -5$

$\therefore$ $\dfrac{dx}{dt} = 16t - 12t^2 - 5$

integrando, queda $x(t) = 8t^2 - 4t^3 - 5t + c_2$
y para $t = 0$, $x = 2$, luego $c_2 = 2$

$\therefore$ $\boxed{x(t) = 8t^2 - 4t^3 - 5t + 2}$ (ley del movimiento de la partícula)

b) Condiciones: $x = 2$ para $t = 0$ y $x = 7$ para $t = 1$.

Luego $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 16 - 24t$ es la ecuación diferencial del movimiento.
Integrando queda
$\dfrac{dx}{dt} = 16t - 12t^2 + c_1$
integrando queda

$\boxed{x(t) = 8t^2 - 4t^3 + c_1t + c_2}$

reemplazando los valores iniciales se tiene $\therefore$ $\boxed{x(t) = 8t^2 - 4t^3 + t + 2}$ (ley del movimiento de la partícula).

Definición
Un **problema del valor inicial** es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas específicas en un valor de la variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones iniciales.

Ejemplo
Caso a) del problema anterior

Definición
Un **problema de valor de frontera** es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida especificadas en dos o más valores de la variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones de frontera.

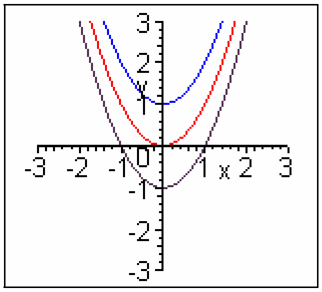
Ejemplo
Caso b) del problema anterior

Ejercicio
Una curva en el plano *xy* tiene la propiedad de que su pendiente en cualquier punto (x, y) de ella es igual a 2x. Hallar la ecuación de la curva si ésta pasa por el punto (2, 5).
Solución

Pendiente = $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ Ecuación diferencial de primer orden.

Como la curva debe pasar por (2, 5) $\therefore$ se trata de un problema del valor inicial.

Integrando la ecuación diferencial, se tiene la familia de curvas $y = x^2 + c$ (*)
Como la curva solicitada debe pasar por el punto (x,y) = (2, 5), entonces c = 1.
$\therefore$ $y = x^2 + 1$ (* *)



Familia de curvas de un parámetro.

Definición: Soluciones generales y particulares
Una ecuación diferencial de orden n tendrá una solución que involucra n constantes arbitrarias y se llamará **solución general** de la ecuación diferencial.
Una **solución particular** se obtiene de la solución general, al determinar los valores particulares de las constantes arbitrarias.

Ejemplos

1.- La ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = 2x$, $y(2) = 5$

tiene como **solución general** $y = x^2 + c$
y como **solución particular** $y = x^2 + 1$.

2.- La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$; $y(2) = 0$

tiene como **solución general** $y = (x + c)^3$
y como **solución particular** $y = (x - 2)^3$

Definición: Soluciones singulares

Se llama solución singular a cualquier solución de una ecuación diferencial que no pueda obtenerse de la solución general mediante una solución particular de las constantes arbitrarias, como lo sugiere el nombre, las soluciones singulares son no usuales o extrañas.

Ejemplo

Dado el problema del valor inicial $\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$, $y(2) = 0$

tiene solución general $y = (x + c)^3$; como $y(2) = 0$, $0 = (2 + c)^3 \Rightarrow c = -2$

$\therefore$ $y = (x - 2)^3$ es una solución particular.

Otras soluciones son: $y = 0$

$$y = \begin{cases} (x-2)^3, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$$

como estas soluciones no se pueden obtener directamente de la solución general, se llaman soluciones singulares.

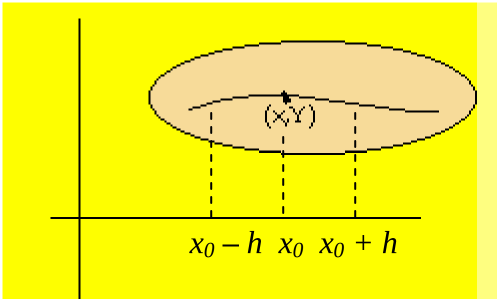
Teorema de existencia – unicidad

Dada la ecuación diferencial de primer orden $y' = F(x,y)$, tal que $F(x,y)$ satisface a las siguientes condiciones:

1) $F(x,y)$ es real finita y continua en todos los puntos de una región abierta R del plano xy.

2) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ es real finita y continua en R.

Entonces existe una y solo una solución $y = f(x)$ en R, tal que $y = y_o$ cuando $x = x_o$, es decir $y(x_o) = y_o$.



Nota: Si $R = \{(x,y) / a < x < b, c < y < d\}$ existe un único $y = f(x)$, donde $x \in\ ]x_0 - h, x_0 + h[$

Observaciones

1) Por cualquier punto (x_o , y_o) en R pasará una y solo una curva ***C*** cuya pendiente en cualquier punto de R está dada por $y' = F(x, y)$.
2) $y = f(x)$ representa la ecuación de esta curva en R.
3) Las soluciones singulares, si hay alguna, tienden a ocurrir en la frontera de la región.

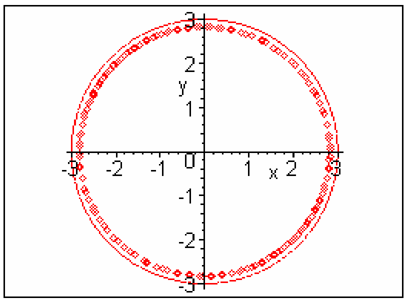
Ejemplo 1

Determine si existe una solución única para el problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{9-(x^2+y^2)} \quad ; \quad y(1) = 2$$

Respuesta :

Sea $F(x,y) = \sqrt{9-(x^2+y^2)}$, luego $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{-y}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}$



F existe para $x^2 + y^2 \le 9$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ existe si $x^2 + y^2 < 9$

$\therefore$ los puntos (x, y), tal que $x^2 + y^2 = 9$ presentan complicaciones (puntos de discontinuidad)

Sea $R = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 8\}$; $(1, 2) \in R$, y F como $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ existen y son continuas en R.

$\therefore$ $\exists$ una solución <u>única</u> al problema de valor inicial en R, $y = f(x)$, $x \in \left]-\sqrt{8}, \sqrt{8}\right[$.

Ejemplo 2

Determine si existe una solución única para el problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3} \quad ; \quad y(2) = 0$$

Respuesta :

$\dfrac{\partial F}{\partial y}$ no es continua si $y = 0$

$\therefore$ No existe una región R que contenga al punto (2,0), donde $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ sea continua

$\therefore$ No existe solución única. Son soluciones del problema de valor inicial $y = (x-2)^3, y = 0, y = \begin{cases} (x-2)^3, & x \ge 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$. Pero si la condición es $y(2) = 1$ entonces si hay solución única $y = (x-1)^3$, $x \in IR$ y se puede considerar la región $R = \{(x, y) \in IR^2 / y > 0\}$.

Ejercicios propuestos

1) Encuentre una ecuación diferencial que tenga como solución general:

$$y = c\, e^{-2x} + 3x - 4.$$

Respuesta

Derivar y , despejar c y se obtiene $y' + 2y + 5 - 6x = 0$

2) Encuentre una ecuación diferencial cuya solución sea $y = c_1 x + c_2 x^3$.

Respuesta

Derivar dos veces y, eliminar las constantes y se obtiene $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$

3) Encontrar una ecuación diferencial para la familia de círculos con radio *1* y centro en cualquier punto del plano *xy*.

Respuesta

Considerar la ecuación de una circunferencia con centro en *(A, B)* y radio *1*, dada por

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = 1$$

Derivar dos veces esta ecuación (derivación implícita), eliminar las constantes y se obtiene

$$(1 + (y')^2)^3 = (y'')^2$$

4) ¿Para qué valores de la constante m la función $y = e^{mx}$ será una solución para la ecuación diferencial

a) $y' - 2y = 0$
b) $y'' + 3y' - 4y = 0$

Respuesta

a) Reemplazando $y = e^{mx}$ en la ecuación, se obtiene m = 2, luego $y = e^{2x}$ es solución.
b) Reemplazando $y = e^{mx}$ en la ecuación, se obtiene m = -4, m = 1, luego $y = e^{-4x}$, $y = e^{x}$ son soluciones.

5) Una partícula se mueve a lo largo del eje *x*, de tal manera que su velocidad es proporcional al producto de su posición instantánea *x* (medida de $x = 0$) y el tiempo *t* (medido de $t = 0$). Si la partícula está localizada en $x = 54$ cuando $t = 0$ y $x = 36$ cuando $t = 1$, ¿dónde estará cuando $t=2$?.

Respuesta

Como $v = x'(t) = kxt$, integramos y se obtiene $x = Ce^{kt^2/2}$, reemplazando las condiciones dadas se obtiene $x = 54e^{\ln(2/3)t^2}$ y para $t = 2$ se tiene $x = 10{,}7$.

6) Una partícula se mueve a lo largo del eje *x* de modo que su velocidad en cualquier tiempo $t \geq 0$ está dado por $v = \dfrac{1}{(t^2+1)}$. Asumiendo que inicialmente se encuentra en el origen, muestre que la partícula nunca pasará por $x = \pi/2$.

Respuesta

De la ecuación $v = \dfrac{1}{(t^2+1)}$, se tiene $x'(t) = \dfrac{1}{(t^2+1)}$, integrando cada lado queda $x(t) = Arctg(t) + C$, reemplazando las condiciones dadas se tiene $C = 0$ y si $x = \pi/2$, entonces $tg(\pi/2) = \infty$.

7) Use el teorema de existencia – unicidad para determinar si existe una solución única para el problema de valor inicial

$$y'(x) = 3y^{2/3}, \; y(2) = 0$$

Respuesta

Sea $F(x,y) = 3y^{2/3}$, luego $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{y^{1/3}}$, por lo tanto $\frac{\partial F}{\partial y}$ no está definida en $y = 0$.

Si R incluye puntos donde $y = 0$, no se puede garantizar la existencia o unicidad de una solución en R. Por simple inspección $y = 0$ es solución, por lo tanto existe una solución tal que $y(2) = 0$, pero no se garantiza la unicidad, de hecho $y = (x - 2)^3$ es solución y también

$$y = \begin{cases} (x-2)^3, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$$

Autoevaluación

1) La pendiente de una familia de curvas en cualquier punto (x, y) del plano XY está dada por $4 - 2x$. Establezca la ecuación diferencial de la familia y determine una ecuación para aquel miembro particular de la familia que pasa por el punto $(0,0)$. Grafique dicha curva.

2) Muestre que $x = a(t - sen(t))$, $y = a(1 - cos(t))$, donde a es cualquier constante distinta de cero, es una solución de $1 + (y')^2 + 2yy'' = 0$.

3) Encuentre la solución general y singular de $y' = \sqrt{y}$

4) Resuelva la siguiente ecuación diferencial sujeta a las condiciones indicadas
$y'' = ln(x)$, $y(1)= y'(1) = 0$.

UNIDAD 2: TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

Estudiaremos los siguientes tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden:

1.- Ecuaciones diferenciales de variables separables
2.- Ecuaciones diferenciales homogéneas
3.- Ecuaciones diferenciales con coeficientes lineales
4.- Ecuaciones diferenciales exactas
5.- Ecuaciones diferenciales lineales
6.- Ecuaciones de Bernoulli
7.- Ecuaciones de Riccati
8.- Ecuaciones de Clairaut

Las aplicaciones de estas ecuaciones diferenciales las podremos apreciar en la solución de problemas del tipo: geométricos, físicos, químicos, mecánicos y circuitos eléctricos.

Forma general de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = F(x, y)}$$

que se puede llevar a la forma

$$\boxed{M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0}$$

1.- Ecuaciones diferenciales de variables separables

Si la ecuación diferencial de 1^{er} orden puede escribirse de la forma

$$\boxed{M(x)\, dx + N(y)\, dy = 0}$$

Entonces se puede integrar cada sumando para obtener la solución:

$$\boxed{\int M(x)\, dx + \int N(y)\, dy = C}$$

En este caso decimos que la ecuación diferencial es del tipo de variable separables.

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial $2xy' = y$

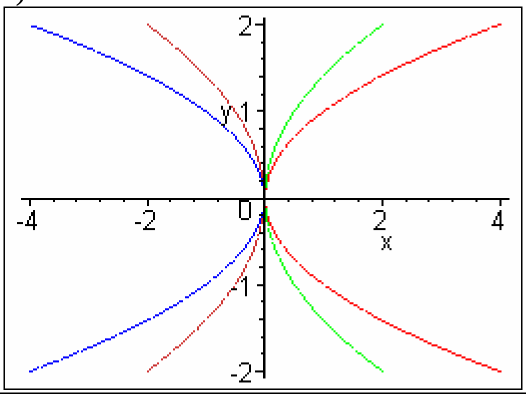
Respuesta

$$2x\,\frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad 2\,\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \quad 2 \ln|y| = \ln|x| + c$$

$$\ln y^2 = \ln|x| + \ln|c|$$
$$\ln y^2 = \ln|x\,c|$$
$$\boxed{y^2 = x\,c}$$

Solución general
(Familia de parábolas)



2.- Ecuación diferencial homogénea

Definición
Una función f(x, y) se llama homogénea de grado n, si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$, $n \geq 0$, $\lambda \neq 0$

Ejemplo 1 :
Sea $f(x, y) = x^3 y - y^4 + x^2 y^2$
$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 \lambda y - (\lambda y)^4 + (\lambda x)^2 (\lambda y)^2$$
$$= \lambda^4 x^3 y - \lambda^4 y^4 + \lambda^4 x^2 y^2$$
$$= \lambda^4 (x^3 y - y^4 + x^2 y^2) = \lambda^4 f(x, y)$$
$\therefore$ f es homogénea de grado 4.

Ejemplo 2 :
$$f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$f(\lambda x, \lambda y) = \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) = f(x, y) = \lambda^0 f(x, y)$$
$\therefore$ es homogénea de grado 0.

Definición
Una ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es homogénea si M y N son funciones homogéneas del mismo grado.

Observaciones:
1.- Esta ecuación puede escribirse en la forma:

$\boxed{\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}}$, es decir, $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = F(x,y)}$

donde $F(x, y)$ es una función homogénea de grado 0.

2.- La sustitución $\boxed{\begin{array}{l} y = v\,x \\ dy = v\,dx + x\,dv \end{array}}$

convierte a la ecuación diferencial homogénea en una de variables separables.

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial: $x + y - (x - y)\,y' = 0$

Solución

Llevándola a la forma $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ se tiene $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$

$$\left.\begin{array}{l} M(x, y) = x + y \\ N(x, y) = x - y \end{array}\right\} \Rightarrow M \text{ y } N \text{ son funciones homogéneas de grado } 1$$

Reemplazando $\boxed{y = vx}$ y $\boxed{dy = vdx + x\,dv}$ en la ecuación, se tiene:

$$(x + vx)\,dx - (x - vx)\,(v\,dx + x\,dv) = 0$$
$$(x + vx - xv + v^2 x)\,dx - (x^2 - vx^2)\,dv = 0$$
$$x\,(1 + v^2)\,dx - x^2\,(1 - v)\,dv = 0$$
$$x\,(1 + v^2)\,dx = x^2\,(1 - v)\,dv.$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{dv(1-v)}{1+v^2} \quad \text{(variables separables)}$$
$$\ln|x| = \operatorname{arctg} v - \frac{1}{2}\ln(1 + v^2) + c$$
$$\ln|x| + \ln(1 + v^2)^{1/2} = \operatorname{arctg} v + c$$
$$\ln|x| + \ln\sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c$$
$$\boxed{\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c}$$

Observe que la solución general de esta ecuación diferencial homogénea ésta dada en forma implícita.

3..- Ecuaciones diferenciales con coeficientes lineales

Forma general:

$\boxed{(ax + by + c)\,dx + (ex + fy + g)\,dy = 0}$ $\quad a, b, c, e, f, g$ constantes.

Solución:

a) Si las rectas $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ y $\boldsymbol{ex + fy + g = 0}$ se intersectan en un punto (h, k), entonces se puede hacer la sustitución:

$u = x - h \qquad v = y - k$

$\boxed{x = u + h} \qquad \boxed{y = v + k} \qquad \boxed{dx = du} \qquad \boxed{dy = dv}$

y se tiene :

$(a u + a h + b v + b k + c)\ du + (eu + eh + fv + fk + g)\ dv = 0$

que resulta ser una **ecuación diferencial homogénea** que puede resolverse como se indicó anteriormente, pues $ah + bk + c = 0$ y $eh + fk + g = 0$, luego

$(au + bv)\ du + (eu + fv)\ dv = 0$

b) Si las rectas $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ y $\boldsymbol{ex + fy + g = 0}$ son paralelas, el método anterior no se puede aplicar, pero la sustitución

$\boxed{u = ax + by \qquad du = adx + bdy}$

da origen a una ecuación diferencial **de variables separables**, pues en este caso , $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$

(las pendientes son iguales).

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial: $(2x - y - 4)\ dx - (x - 2y + 1)\ dy = 0$

Solución

$$\left.\begin{aligned} 2x - y - 4 &= 0 \\ x - 2y + 1 &= 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - y - 4 &= 0 \\ -2x + 4y - 2 &= 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = 2\ , \quad x = 3$$

$\therefore\ (h, k) = (3, 2).$

Sea $x = u + 3$, $y = v + 2$, $dx = du$, $dy = dv$, sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene

$[2\,(u + 3) - (v + 2) - 4]\,du - [u + 3 - 2\,(v + 2) + 1]\,dv = 0$

$[2u - v]\,du - [u - 2v]\,dv = 0$ (ec. dif. Homogénea)

Sea $\boxed{v = tu} \qquad \boxed{dv = t\ du + u\ dt}$

Reemplazando se obtiene de ecuación diferencial de variables separables.

$[2u - tu\,]\,du - [u - 2t\,u\,]\,[t\,du + u\,dt] = 0$

$[2u - tu - tu + 2t^2\,u]\,du - [u^2 - 2\,tu^2\,]\,dt = 0$

$u\,(\,2 - 2t + 2t^2\,)\,du - u^2\,(1 - 2t)\,dt = 0$

$2u\,(1 - t + t^2)\,du = u^2\,(1 - 2t)\,dt$

$$2u\frac{du}{u^2} = \frac{(1-2t)}{1-t+t^2)}dt \quad \text{(ec. dif. de variables separables)}$$

$$2\ln|u| = -\ln\left|1 - t + t^2\right| + \ln|c|$$

$$u^2 = \frac{c}{1 - t + t^2}$$

pero $u = x - 3, \quad t = \dfrac{v}{u} = \dfrac{y-2}{x-3}$

$$\therefore \quad (x-3)^2 = \frac{c}{1 - \dfrac{y-2}{x-3} + \left(\dfrac{y-2}{x-3}\right)^2}$$

$$1 = \frac{c}{(x-3)^2 - (y-2)(x-3) + (y-2)^2}$$

$$(x-3)^2 - (4-2)(x-3) + (4-2)^2 = c$$

Luego, la solución general es $\boxed{x^2 - 4x + y^2 - y - xy = c}$

4) Ecuaciones diferenciales exactas

Son ecuaciones diferenciales de la forma $\boxed{M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0}$

Con la condición: $\boxed{\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y}}$

La solución general de esta ecuación es una función

$\boxed{F(x, y) = c}$ tal que $\boxed{\dfrac{\partial F}{\partial x} = M}$ y $\boxed{\dfrac{\partial F}{\partial y} = N}$, pues $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

ya que en tal caso la ecuación : $\boxed{\dfrac{\partial F}{\partial x} dx + \dfrac{\partial F}{\partial y} dy = 0}$

corresponde a la ecuación diferencial $\boxed{dF = 0}$ $\Rightarrow F = cte.$

En general, para determinar F se resuelve el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \quad F = \displaystyle\int M\,dx + \varphi(y) \\ \therefore \quad \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int M dx\right) + \varphi'(y) = N \end{array}$$

De esta manera se determina $\varphi'(y)$ e integrando se obtiene $\varphi(y)$ con lo cual se determina $F(x, y)$.

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial: $(y + y\cos(xy))\,dx + (x + x\cos(xy))\,dy = 0$

Respuesta:

$M = (y + y\cos(xy))$ y $N = (x + x\cos(xy))$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 + cos\,(xy) - yx\; sen\,(xy)$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 + cos\,(xy) - xy\; sen\,(xy)$

$\therefore \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ (es exacta)

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = y + y\; cos\,(xy)$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = x + x\; cos\,(xy)$

$\Rightarrow \quad F = \int (y + y\cos(xy))dx + \varphi(y)$

$F = yx + \dfrac{y}{y}\; sen\,(xy) + \varphi\,(y)$

$F = xy + sen\,(xy) + \varphi\,(y)$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = x + x\; cos\,(xy) + \varphi'\,(y) = x + x\; cos\,(xy)$

$\Rightarrow \varphi'\,(y) = 0 \Rightarrow \varphi\,(y) = c_1$

$\therefore \quad \boxed{F = xy + sen(xy) + c_1}$

$\therefore$ La solución general de la ecuación diferencial dada es $F = c_2$, luego $xy + sen(xy) = c$ es la solución general.

Factores integrantes (F.I.)

Si la ecuación diferencial $\boxed{M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0}$ (1)

no es exacta, pero $\boxed{u(x, y)M(x, y)dx + u(x, y)\, N(x, y)dy = 0}$ (2)
si lo es, entonces la función u(x, y) se llama factor integrante de la ecuación diferencial (1)
$\therefore$ la solución de la ecuación diferencial de (1) es de la forma:

$$\boxed{F(x, y) = c} \;,\; \text{donde} \quad \boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = uM} \;\wedge\; \boxed{\frac{\partial F}{\partial y} = uN}$$

Como la ecuación diferencial (2) es exacta, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uN) = \frac{\partial}{\partial y}(uM) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}N + u\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}M + u\frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}N - \frac{\partial u}{\partial y}M = u\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)} \quad (3)$$

A partir de (3) se tienen las siguientes formas.

Formas para determinar el factor integrante (F.I)

1) Si u depende de x, y además $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = g(x) \Rightarrow u = e^{\int g(x)dx}$

2) Si u depende de y, y además $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} = h(y) \Rightarrow u = e^{\int h(y)dy}$

3) Si u depende de $z = x + y$, y además $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N - M} = \phi(z) \Rightarrow u = e^{\int \phi(z)dz}$

4) Si u depende de $z = xy$, y además $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} = \phi(z) \Rightarrow u = e^{\int \phi(z)dz}$

Ejemplo
Resolver la ecuación diferencial: $y\, dx + (x^2 y - x)\, dy = 0$
Solución

$M(x, y) = y \qquad \dfrac{\partial M}{\partial y} = 1$

$N(x, y) = x^2y - x \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 1 - 2x\,y + 1 = 2 - 2xy = 2\,(1 - xy)$$

$$\left(\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}\right) = \frac{2(1-xy)}{-x(1-xy)} = \frac{2}{-x} = g(x)$$ (función solo de x)

$$\therefore \quad u = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dada por el F. I. $\boxed{x^{-2}}$, se tiene

$$\boxed{\frac{y}{x^2}dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0}$$ (es exacta)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2} \qquad \Rightarrow f(x, y) = y \int x^{-2}\,dx + \varphi(y) = \frac{-y}{x} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y - \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x} + \varphi'(y) = -\frac{1}{x} + y$$

$$\therefore \quad \varphi'(y) = y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = \frac{y^2}{2} + C_1$$

$$\therefore \quad f(x, y) = -\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} + C_1 = C_2$$

$\therefore$ la solución general de la ecuación diferencial es $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{y}{x} = c$

Sugerencias

A veces se puede hallar un factor integrante por simple inspección, después de agrupar convenientemente los términos de la ecuación, al reconocer un cierto grupo de términos como formando parte de una diferencial exacta.

Grupo de términos	**F. I**
$x\,dy - y\,dx$ - - - - - - - - - - - - - - - - - -	$1/x^2$
$x\,dy - y\,dx$ - - - - - - - - - - - - - - - - - -	$1/y^2$
$x\,dy - y\,dx$ - - - - - - - - - - - - - - - - - -	$1/xy$
$x\,dy - y\,dx$ - - - - - - - - - - - - - - - - - -	$1/(x^2 + y^2)$
$x\,dy + y\,dx$ - - - - - - - - - - - - - - - - - -	$1/(xy)^n$
$x\,dx + y\,dy$ - - - - - - - - - - - - - - - - - -	$1/(x^2 + y^2)^n$

Ejemplos de diferenciales exactas

1) $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$
2) $d(xy) = x\,dy + y\,dx$
3) $d(x^2 + y^2) = 2(x\,dx + y\,dy)$
4) $d\left(arctg\,\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$

5) $d\left(\ln\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{xy}$

Ejemplo
Encontrar un F. I para las siguientes ecuaciones diferenciales:
1) $x\,dy - y\,dx = (1 + y^2)dy$
2) $y\,dx - x\,dy = xy^3\,dy$
3) $x\,dy = (y + x^2 + y^2)dx$

Respuesta:
1) FI = $1/\,y^2$
2) FI = $1/xy$
3) FI = $1/\,x^2+y^2$

5.- Ecuaciones diferenciales lineales

Forma: $\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)}$

Solución: Se busca un factor integrante para

$\boxed{[p(x)y - q(x)]dx + dy = 0}$ (ecuación diferencial lineal en y)

Sea $M(x,y) = p(x)y - q(x)$
$N(x,y) = 1$

$$\therefore \qquad \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x) \Rightarrow \boxed{u = e^{\int p(x)dx}} \qquad \text{F.I.}$$

multiplicando por este F. I se tiene:

$$\boxed{e^{\int p(x)dx}(p(x)y - q(x))dx + e^{\int p(x)dx}dy = 0} \qquad \text{(exacta)}$$

Luego, la solución viene dada por F (x,y) = c, tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = M \wedge \frac{\partial F}{\partial y} = N$, luego se tiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \frac{\partial F}{\partial x} = e^{\int p(x)dx}\left[p(x)y - q(x)\right] \\ 2) & \frac{\partial F}{\partial y} = e^{\int p(x)dx} \end{array}\right| \Rightarrow \quad F = \int e^{\int p(x)dx}\, dy + \varphi(x)$$

$$F = e^{\int p(x)dx} y + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{\int p(x)dx} yp(x) + \varphi'(\mathrm{x}) = e^{\int p(x)dx} yp(x) - e^{\int p(x)dx} q(x)$$

$$\varphi'(x) = -e^{\int p(x)dx} q(x)$$

$$\varphi(x) = -\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c_1$$

$$\therefore \qquad F(x,y) = e^{\int p(x)dx} y + -\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c_1 = c_2$$

$$e^{\int p(x)dx}\, \mathrm{y} - \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx = c$$

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left[c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx\right]}$$ solución general de la ecuación

Ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial: $2y' + 3y = e^{-x}$

Solución: Dividiendo por 2.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{2}y = \frac{1}{2}e^{-x} \qquad \text{(lineal en } y \text{)}$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx\right]$$

$$= e^{-\int \frac{3}{2}dx}\left[c + \int \frac{1}{2}e^{-x}e^{\int \frac{3}{2}dx} dx\right]$$

$$= e^{-\frac{3}{2}x}\left[c + \int \frac{1}{2}e^{-x}e^{\frac{3}{2}x} dx\right]$$

$$= e^{-\frac{3}{2}x}\left[c + \frac{1}{2}\int e^{-x+\frac{3}{2}x}\,dx\right]$$

$$= e^{-3/2x}\left[c + \frac{1}{2}\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx\right]$$

$$= e^{-3/2x}\left[c + \frac{2}{2}e^{\frac{1}{2}x}\right]$$

$$= e^{-3/2x}\left[c + e^{\frac{1}{2}x}\right] = ce^{-3/2x} + e^{-x}$$

$$y = c\,e^{-3/2x} + e^{-x}$$

6.- Ecuación de Bernoulli

Forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)\ y = q(x)\,y^n} \quad 1$$

Solución:

No es lineal para $n \neq 0$ ó $n \neq 1.$

Luego se divide por y^n y se tiene

$$\boxed{y^{-n}\ \frac{dy}{dx} + p(x)\,y^{1-n} = q(x)} \quad 2$$

En seguida se hace la sustitución $\boxed{u = y^{1-n}}$, $\boxed{\frac{du}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\ \frac{dy}{dx}}$

Reemplazando estos resultados en 2 se tiene una ecuación diferencial lineal en u.

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx} + p(x)\ \ u = q(x) \Big/ .\ (1-n)$$

$$\boxed{\frac{du}{dx} + (1-n)\ p(x)\ u = (1-n)\ q(x)}$$

$\therefore$ La solución general de esta ecuación diferencial es:

$$\boxed{u(x) = e^{-\int (1-n)\,p(x)dx}\left[c + \int (1-n)q(x)e^{\int (1-n)\,p(x)dx}\,dx\right]}$$

Volviendo a la sustitución $\boxed{u = y^{1-n}}$ se obtiene la solución general de la ecuación diferencial de Bernoulli (1)

Ejemplo:

Resolver $\quad 2\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = 5x^3y^3$

Solución:

$$2y^{-3}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y^{-2}=5x^3 \qquad \text{hacemos } u=y^{-2} \qquad \frac{du}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

Reemplazando, se tiene

$$-\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}u=5x^3$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}u=-5x^3$$

Solución general: $u(x)=e^{-\int\frac{dx}{x}}\left[c+\int -5x^3e^{\int\frac{dx}{x}}dx\right]$

$$u(x)=\frac{1}{x}\left[c-5\frac{x^5}{5}\right]=\frac{c}{x}-x^4$$

$$y^{-2}=\frac{c}{x}-x^4$$

7.- Ecuación de Riccati

Forma: $\boxed{\frac{dy}{dx}+Q_2(x)y^2+Q_1(x)y+Q_0(x)=0}$

Donde $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ son funciones continuas en algún intervalo I, $Q_2\neq 0$

Solución: Para resolver esta ecuación se necesita conocer una solución particular y_p. Con la sustitución $\boxed{y=y_p+\frac{1}{z}}$, $\boxed{\frac{dy}{dx}=y'_p-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}}$ donde z es función de x, la ecuación diferencial de Riccati se transforma en una ecuación diferencial lineal en z.

Ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial: $2y'-\left(\frac{y}{x}\right)^2-1=0$, $\qquad y_p=x$

Solución:

Sea $y=y_p+\frac{1}{z}=x+\frac{1}{z} \qquad \frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$

Reemplazando: $2\left(1-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}\right)-\left(1+\frac{1}{xz}\right)^2-1=0$

$$2-\frac{2}{z^2}\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x^2z^2}(xz+1)^2-1=0 \quad \Big/ -1$$

$$-2 + \frac{2}{z^2}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x^2z^2}(xz+1)^2 + 1 = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = \left(1 - \frac{1}{x^2z^2}(xz+1)^2 \cdot\right)\frac{z^2}{2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2x^2}(xz+1)^2$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{2} - \frac{x^2z^2}{2x^2} - \frac{2xz}{2x^2} - \frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{dz}{dx} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)} z = \underbrace{-\frac{1}{2x^2}}_{q(x)} \qquad \text{(lineal en } z\text{)}$$

$$z = \frac{1}{x}\left[c + \int -\frac{1}{2x^2}\,xdx\right] = \frac{1}{x}\left[c + -\frac{1}{2}\ln x\right]$$

como $\quad y = y_p + \frac{1}{z} \Rightarrow y - y_p = \frac{1}{z} \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{y-y_p} = \frac{1}{y-x}}$

$$\frac{1}{y-x} = \frac{1}{x}\left[c - \frac{1}{2}\ln|x|\right] \Rightarrow y - y_p = \frac{x}{c - \frac{1}{2}\ln|x|}$$

$$\boxed{y = x + \frac{x}{c - \ln\sqrt{|x|}}}$$

8.- La ecuación de Clairaut

Forma general

$$\boxed{y = xy' + f(y')}$$

Donde $f(y')$ define una función diferenciable de y'

Ejemplos:

$y = xy' + (y')^2$

$y = xy' + tg(y')$

$y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$

son ecuaciones de Clairaut

Solución de la ecuación de Clairaut:

Hacer $\boxed{y' = v}$ en la forma general para obtener $\boxed{y = x\,v + f(v)}$ y derivando con respecto a x queda $y' = x\,v' + v + f'(v)\,v'$

se factoriza por v' y se tiene $\boxed{v'(x + f'(v)) = 0}$

Caso 1: $\boxed{v' = 0}$

$\Rightarrow\ v = c$

$\therefore\ \boxed{y = c\,x + f(c)}$ solución general de la ecuación diferencial (Familia de rectas)

Caso 2: $\boxed{x + f'(v) = 0}$, como $y = x\,v + f(v)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{y} \quad \boxed{x = -f'(v)} \\ \therefore \quad \boxed{y = -vf'(v) + f(v)} \end{array}\right\} \text{ ecuaciones paramétricas de una curva con parámetro v.}$$

NOTA: Este no es un caso especial de la solución general, es una solución singular (envolvente de la familia de rectas)

Ejemplo:
Resolver la ecuación diferencial $y = xy' + (y')^2$
Solución:

Sea $y' = v$

$\therefore\ \boxed{y = x\,v + v^2}$

derivando con respecto a x se tiene

$y' = x\,v' + v + 2v\,v'$

como $y' = v$

$\therefore\ v'\,(x + 2v) = 0$

Caso 1: $v = 0$

$\Rightarrow\ v = c$ y reemplazando en $y = x\,v + v^2$

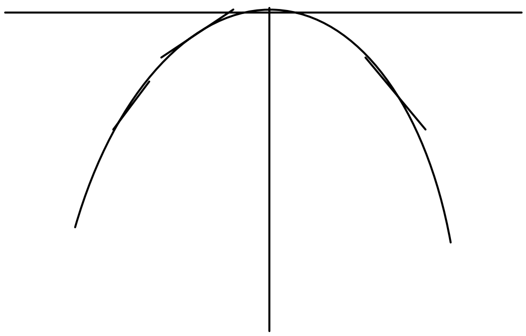
$\therefore\ \boxed{y = c\,x + c^2}$ solución general

Caso 2: $x + 2v = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2v = 0 \\ y = x\,v + v^2 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2v \\ y = -v^2 \end{array}\right| \Rightarrow y = -\frac{x^2}{4}$$

como $y = -\dfrac{x^2}{4}$ no es un caso especial de $y = c\,x + c^2$, es una solución singular

Gráfico:



$y = c\,x + c^2$ familia de tangentes a la parábola

$$y = \frac{-x^2}{4}$$

envolvente de la familia de las rectas

Ejercicios propuestos

Determinar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$

2) $dx - (2xy + 2ye^{y^2})dy = 0$

3) $\dfrac{dy}{dx} = -2 - y + y^2$

4) $xy' = y - x\cos^2(y/x)$

5) $(xy - 1)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

6) $(x - 2y + 1)dx + (2x - 4y + 3)dy = 0$

7) $y = xy' + tg(y')$

8) $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$

9) $(3x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$

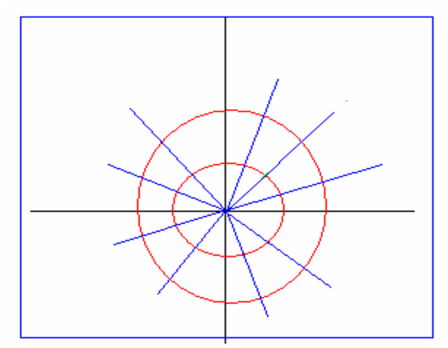
10) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$

UNIDAD 3: APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

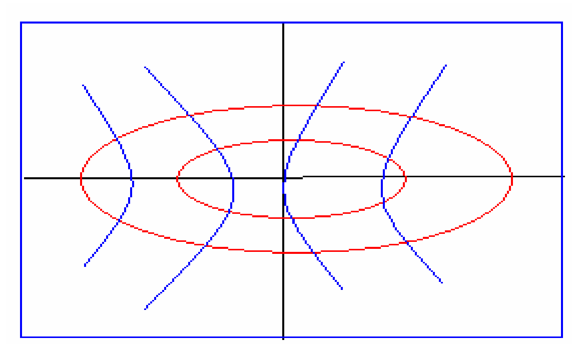
1.- Familias de curvas y trayectorias ortogonales

Definición: (trayectorias ortogonales)
Una familia de curvas forma un conjunto de trayectorias ortogonales de otra familia si cada miembro de la primera familia intersecta a todo miembro de la segunda familia en ángulos rectos, las familias son mutuamente ortogonales. (Las rectas tangentes en los puntos de intersección forman ángulo recto).

Ejemplos de familias mutuamente ortogonales.



familia de rectas
y familia de círculos



familia de elipses
y familia de hipérbolas

Aplicaciones físicas de las trayectorias ortogonales.

a) Las curvas a lo largo de las cuales fluye el calor en un objeto físico bidimensional tal como una hoja delgada de metal, son ortogonales a las curvas de igual temperatura (curvas isotermas).
b) Las líneas de flujo que surgen de un campo eléctrico o magnético en el plano, son ortogonales a las curvas de igual potencia del campo (curvas equipotenciales).

Procedimiento para hallar la ecuación de las trayectorias ortogonales de una familia de curvas.

1.- Determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas.

$$F(x, y, y') = 0$$

2.- Determinar la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales.
Como la pendiente de las trayectorias ortogonales debe ser el recíproco negativo de la pendiente de trayectorias dadas, esta debe ser

$$F\left(x, y, \frac{-1}{y'}\right) = 0$$

3.- Determinar la solución de esta nueva ecuación diferencial.

Ejemplos

1) Hallar la ecuación de las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x^2 + y^2 = c^2$.
Familia de círculos concéntricos.

Respuesta

Derivando implícitamente con respecto a x:

$2x + 2yy' = 0$

$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}}$ ecuación diferencial asociada a la familia de curvas

$\therefore$ $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}}$ ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales.

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + \ln |c|$$

$\boxed{y = cx}$ familia de rectas que pasan por (0, 0)

---

2) Hallar las trayectorias ortogonales de $x^2 + y^2 = 2c\,x$.

Respuesta

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2c$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = c$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2x}$$

$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}}$ ecuación diferencial asociada a la familia de curvas.

$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}}$ ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales. (homogénea).

$y = vx$

$dy = x\,dv + v\,dx$

$(x\,dv + v\,dx)(x^2 - v^2x^2) = 2\,x\,vx\,dx$

$x^3\,dv - v^2x^3\,dv + x^2v\,dx - v^3x^2\,dx = 2x^2v\,dx$

$(x^2v - v^3x^2 - 2x^2v)\,dx + (x^3 - v^2x^3)dv = 0$

$(-v^3x^2 - x^2v)\,dx + x^3(1 - v^2)\,dv = 0$

$x^2(-v^3 - v)\,dx + x^3(1 - v^2)\,dv = 0$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv(1-v^2)}{-v^3-v} = 0$$

$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{v^2-1}{v^3+v}$ dv = ln |c|

$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(v^2+1)-2}{v(v^2+1)}$ dv = ln| c|.

ln |x| + $\int \frac{dv}{v} - 2\int \frac{dv}{v(v^2+1)}$ = ln |c|.

ln |x| + ln |v| – 2 $\int \left(\frac{1}{v} - \frac{v}{v^2+1}\right)$ dv = ln |c|

ln |x| + ln| v| – 2 ln| v| + ln (v^2 + 1) = ln |c|.

ln |x| – ln| v| + ln |v^2 + 1| = ln |c|.

$$\frac{x^2}{y}\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = c$$

$$\frac{x^2}{y}\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right) = c$$

$\boxed{x^2 + y^2 = c\, y}$

Observación

Usando coordenadas polares

$x = r \cos \theta$

$y = r \operatorname{sen} \theta$

como tg φ = $\frac{rd\theta}{dr}$ = pendiente de la curva respecto al radio vector.

entonces - $\frac{dr}{rd\theta}$ = pendiente de las trayectorias ortogonales.

$$\boxed{F\left(r,\theta, \frac{rd\theta}{dr}\right)} \Rightarrow \boxed{F\left(r,\theta, -\frac{dr}{rd\theta}\right)}$$

Ejemplo

Determinar las trayectorias ortogonales de la familia: r = 2 c cos θ

Respuesta

$r = 2c\cos\theta$ es una familia de circunferencias, $r^2 = 2cr\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2cx \Rightarrow$
$(x - c)^2 + y^2 = c^2$.

Derivando r respecto a θ, se tiene:

$\dfrac{dr}{d\theta} = -2c\ \text{sen}\,\theta$, como $c = \dfrac{r}{2\cos\theta}$

$\dfrac{dr}{d\theta} = -r\dfrac{sen\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \dfrac{rd\theta}{dr} = -\dfrac{\cos\theta}{sen\theta}$ ecuación diferencial asociada.

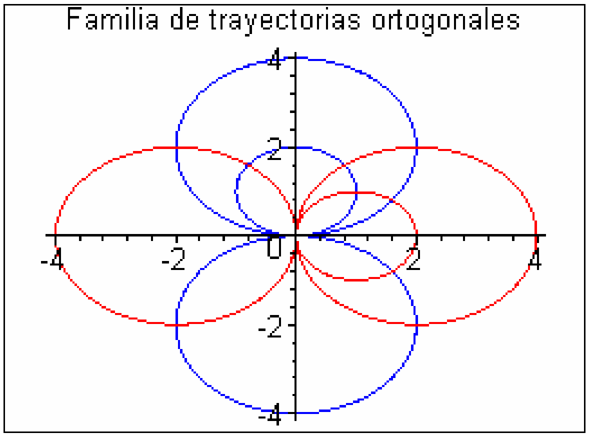
$\therefore$ ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales.

$-\dfrac{dr}{rd\theta} = -\dfrac{\cos\theta}{sen\theta} \Rightarrow \dfrac{dr}{r} = \dfrac{\cos\theta}{sen\theta}d\theta.$ ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales

Integrando cada término, queda:

$\ln|r| = \ln|\text{sen}\,\theta| + \ln|c|$
Luego $r = c\ sen\ \theta$ es la ecuación de las trayectorias ortogonales

Nota 1: Pasando a coordenadas rectangulares la ecuación $r = csen\theta$, se tiene la ecuación $\sqrt{x^2+y^2} = c\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, es decir $x^2 + y^2 = c\,y$ y su gráfica es la siguiente



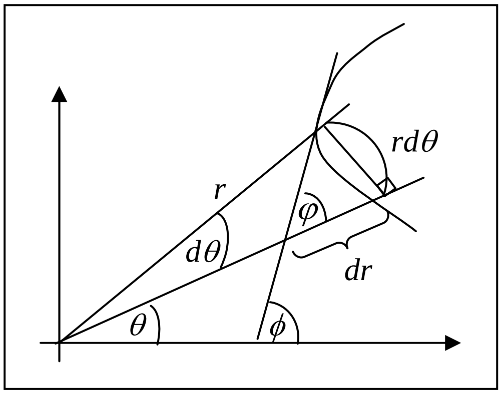
La ecuación $x^2 + y^2 = cy$ o bien $r = c\ \text{sen}\,\theta$ corresponde a una familia de círculos.
Si se quiere graficar, es más cómodo usar $x^2 + y^2 = 2c$ y entonces $r = 2c\ \text{sen}\,\theta$.

Nota 2:
Dada la curva $r = f(\theta)$. Por coordenadas polares se tiene $x = r\cos\theta$, $y = r\ \text{sen}\,\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = -\, r \operatorname{sen}\theta + \cos\theta \;\frac{dr}{d\theta}$ $\qquad\qquad$ $\frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \;\frac{dr}{d\theta}$

sea $\varphi = \phi - \theta$, luego $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\phi - \theta)$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{tg\phi - tg\theta}{1 + tg\phi tg\theta}\ , \quad \text{donde} \quad \operatorname{tg}\phi = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$



2.- Problemas geométricos

Dada una curva $y = f(x)$.

Pendiente de la recta tangente $= \dfrac{dy}{dx}$

Ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en el punto (x_o, y_o)

$$\boxed{y - y_o = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_o, y_o)} \cdot (x - x_o)}$$

Ecuación de la recta normal a la curva $y = f(x)$, en el punto (x_o, y_o).

$$\boxed{y - y_o = \frac{-1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_o, y_o)}} \cdot (x - x_o)}, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_o, y_o)} \neq 0$$

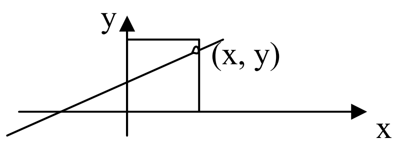
Problemas:

1) Encontrar la familia de curvas que cumplen la siguiente condición: la parte de la tangente en (x, y) comprendida entre el eje x y el punto de tangencia está dimidiada por el eje y.

Respuesta:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x} \Rightarrow \ln(y) = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln c \Rightarrow \boxed{y^2 = x\,c}$$

familia de parábolas.



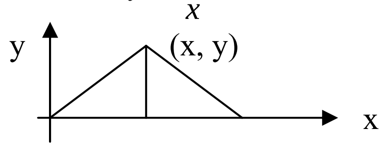
---

2) La tangente en cada punto de una curva y la recta que une ese punto con el origen forman un triángulo isósceles con base en el eje x.
Hallar la ecuación de la curva que pasa por (2, 2).

Respuesta:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = -\ln x + \ln c \Rightarrow y = \frac{c}{x}$$ familia de hipérbolas.

si $x = 2 \wedge y = 2$, $c = 4 \;\therefore\; y = \dfrac{4}{x}$ es la curva pedida.



3.- Problemas de crecimiento y decrecimiento. Reacciones químicas

Si una molécula tiende a descomponerse espontáneamente en moléculas más pequeñas, a una velocidad que no está afectada por la presencia de otras sustancias, entonces el número de moléculas de este tipo que se descomponen en una unidad de tiempo será proporcional al número total presente. (reacción de 1^er^ orden).

Si x = cantidad de la sustancia al instante t.

$\frac{dx}{dt}$ = variación de x respecto a t.

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \pm\ kx \quad , \quad k > 0, \quad \text{la variación de x respecto a t es proporcional a x.}}$$

El signo - indica que la cantidad de materia se reduce cuando aumenta el tiempo.
El signo + indica que la cantidad de materia crece cuando t crece.
La constante K recibe el nombre de constante de proporcionalidad.

$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{x}$ indica que la variación de *x* respecto a *t* es inversamente proporcional a *x*.

$\frac{dx}{dt} = kx \cdot t$ indica que la variación de *x* respecto a *t* es proporcional (directamente) a *x* y a *t*.

$\frac{dx}{dt} = \frac{kx}{t}$ indica que la variación de *x* respecto a *t* es proporcional a *x* e inversamente proporcional a *t*.

Problemas

1) El radio se desintegra con una velocidad proporcional a la cantidad presente. La vida media es de 1600 años, tiempo necesario para que se descomponga la mitad. Hallar la cantidad desintegrada en 100 años.

Respuesta

$\frac{dx}{dt} = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = -k\,dt \Rightarrow \ln x = -kt + \ln c$

$\Rightarrow \quad x = c\,e^{-kt}$ Para $t = 0,\ x = x_o \Rightarrow c = x_o$

$\Rightarrow \quad x = x_o\,e^{-kt}$ Para $t = 1600,\ x = \frac{x_o}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{1600}$

$\Rightarrow \quad x = x_o\ e^{-\frac{\ln 2}{1600}t}$ Para $t = 100$, $x = x_o\ e^{\frac{-\ln 2}{1600}\cdot 100}$

$\Rightarrow \quad x = x_o \cdot 0{,}957 = 95{,}7\%\ x_o$

$\Rightarrow$ se ha desintegrado el 4, 3 %.

2) Un cultivo tiene inicialmente una cantidad N_o de bacterias. Para t = 1 hora, el número de bacterias medido es $\frac{3}{2}N_o$. Si la rapidez de multiplicación es proporcional al número de bacterias presentes, determine el tiempo necesario para que el número de bacterias se triplique.

Respuesta

Sea x = número de bacterias en el instante t.

$$\frac{dx}{dt} = k\,x \;\Rightarrow\; \frac{dx}{x} = kdt \;\Rightarrow\; \ln|x| = kt + c.$$

$$\Rightarrow \quad x = e^{kt+c} \qquad t = 0,\; x = N_o \;\Rightarrow\; c = \ln N_o.$$

$$\Rightarrow \quad x = N_o\, e^{kt} \qquad t = 1,\quad x = \frac{3}{2}N_o \;\Rightarrow\; k = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = N_o\, e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)t} \quad , \quad \text{si } x = 3N_o, \text{ entonces}$$

$$3N_o = N_o\, e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)t} \;\Rightarrow\; \ln 3 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)t \;\Rightarrow\; t = \frac{\ln(3)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$\Rightarrow$ t = 2,71 horas.

---

3) Suponga que una gota de un líquido se evapora con una velocidad proporcional a su superficie. Hallar el radio de la gota en función del tiempo.

Respuesta:

S: superficie de la gota $= 4\pi r^2$ (superficie de una esfera)

V: volumen de la gota $= \frac{4}{3}\pi r^3$ (volumen de una esfera)

$$\therefore \quad \frac{dV}{dt} = -k\,4\pi r^2$$

$$4\pi r^2\frac{dr}{dt} = -k\,4\pi r^2$$

$$4\pi r^2\frac{dr}{r^2} = -k\,4\pi\, dt$$

$$r = -kt + c$$

si para t = 0, $r = r_o$ es el radio inicial de la gota, entonces el radio de la gota después de un tiempo t es $r = -kt + r_o$.

Problema de enfriamiento

4) Según la ley de enfriamiento de Newton , la velocidad a que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia de temperatura de la sustancia y del aire. Si la temperatura del aire es 30° y la sustancia se enfría de 100° a 70° en 15 minutos. ¿Cuándo será de 40° la temperatura de la sustancia?

Respuesta

$\boxed{\dfrac{dT}{dt} = -k\,(T - T_a)}$, T = temperatura de la sustancia, T_a = Temperatura del aire

$$\frac{dT}{T - T_a} = -k\ dt$$

$\ln|T - T_a| = -k\,t + \ln c$

$\therefore\ T - T_a = c\ e^{-kt}$

$\therefore\ T = C\,e^{-kt} + T_a$

Para $t = 0$ $\quad T = 100 \quad T_a = 30$

$\therefore\ 100 = Ce^{-0} + 30 \quad \Rightarrow 70 = C$, por lo tanto $T = 70\ e^{-kt} + T_a$, como $70 = 70\,e^{-k\,15} + 30$

$$-15k = \ln\left(\frac{4}{7}\right) \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{\ln\left(\frac{4}{7}\right)}{15}, \text{ luego} \quad T = 70°\ e^{-\frac{1}{15}\ln\left(\frac{4}{7}\right)t} + 30°$$

Para T = 40º, se tiene $\quad 40º = 70°\ e^{-\frac{1}{15}\ln\left(\frac{4}{7}\right)t} + 30° \quad \Rightarrow \quad 1º = 70°\ e^{-\frac{1}{15}\ln\left(\frac{4}{7}\right)t}$

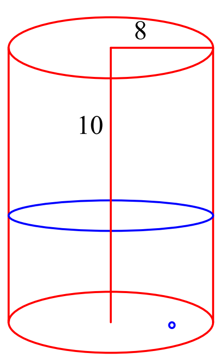
$$\therefore \quad \frac{1}{7} = e^{-\frac{1}{15}\ln\left(\frac{4}{7}\right)t} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{15}\ln\left(\frac{4}{7}\right)t \Rightarrow t = \frac{15\ln(\frac{1}{7})}{\ln(\frac{4}{7})} \approx 52 \text{ minutos.}$$

---

5) Hallar el tiempo que se necesita para vaciar un tanque cilíndrico de radio 8 dm. y altura 10 dm. a través de un orificio redondo de radio $\frac{1}{12}$ dm. situado en el fondo del tanque, sabiendo que por un orificio de ese tipo sale el agua a una velocidad aproximada $v = 4{,}8\sqrt{h}$ dm/seg donde h es la altura del agua en el tanque.

Respuesta

Volumen de un cilindro $= \pi\, r^2\, h$



$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} = \pi r^2\frac{dh}{dt} = \pi r^2 v \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{dh}{dt}$$

$t = 0 \Rightarrow V = \pi\,640 \ \wedge\ h = 10, \qquad t = t_0 \Rightarrow V = 0 \wedge\ h = 0$

$$-\pi\ 64\ \frac{dh}{dt} = \pi\left(\frac{1}{12}\right)^2 4{,}8\sqrt{h}$$

(variación del volumen de agua en el tanque) (volumen de salida de agua)

Luego $\qquad -64\ dh = \dfrac{4{,}8\sqrt{h}}{144}\ dt$

$- \dfrac{144 \cdot 64}{4{,}8\sqrt{h}} dh = dt$

$- 1920 \dfrac{dh}{\sqrt{h}} = dt$

$- 1920 \displaystyle\int \dfrac{dh}{\sqrt{h}} = t + c.$

$- 1920 \sqrt{h} \cdot 2 = t + c.$

$- 3840 \sqrt{h} = t + c.$

$t = 0, \quad h = 10 \qquad c = - 3840 \sqrt{10}$

$\therefore \quad t = - 3840 \sqrt{h} + 3840 \sqrt{10} = 3840 \left(\sqrt{10} - \sqrt{h}\right)$ para $h = 0$

$t = 3840 \sqrt{10}$ seg. $=$ 3 horas 22 minutos.

Problema de mezclas

6) Un tambor de 100 lts. está lleno de una solución que contiene 30 Kgs. de sal. Se echa agua con una concentración de 4 Kgrs. de sal por cada 100 lts. a razón de 25 lt /min; se homogeniza la mezcla y sale en la misma razón por un orificio ¿Cuánto es el monto de sal que queda luego de 20 minutos?.

Respuesta:

Sea x la cantidad de sal que hay en el tambor al cabo de t minutos.

$\therefore \dfrac{dx}{dt} =$ velocidad de ganancia de sal – velocidad de pérdida de sal

$$\frac{dx}{dt} = 25 \cdot \frac{4}{100} - 25 \cdot \frac{x}{100 + (25 - 25)t}$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{x}{4} = \frac{4 - x}{4}$$

$\boxed{\dfrac{dx}{4 - x} = \dfrac{1}{4} dt}$ integrando $\Rightarrow \quad - \ln |4 - x| = \dfrac{1}{4} t - \ln C.$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|\frac{4 - x}{C}\right| = -\frac{1}{4}t \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{4 - x}{C}\right| = e^{-\frac{1}{4}t}$$

$|4 - x| = |C|\, e^{-1/4\, t}$, como $4 \leq x \leq 30 \quad \therefore |4 - x| = x - 4$, luego $x - 4 = Ce^{-1/4\, t}$

$\boxed{x = 4 + e^{-1/4\, t}}$

para $t = 0, \quad x = 30 \quad \Rightarrow \quad 30 = 4 + C \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 26}$

$\therefore \quad \boxed{x = 4 + 26\, e^{-\frac{1}{4} t}}$

Si $t = 20$ minutos, $x = 4 + 26\, e^{-5} =$ $\boxed{4{,}18 \text{ Kgrs.}}$

4.- Problemas mecánicos

Si un cuerpo se mueve en línea recta, entonces se tiene:

Velocidad

$v = \dfrac{dx}{dt}$, x = desplazamiento del cuerpo en el instante t desde un punto 0.

Aceleración

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

Fuerza

$F = m \cdot a$ (en dinas, newton, kilogramos peso, libras de fuerza)

Masa

$$m = \frac{w}{g}$$

Donde g es la aceleración gravitacional y W es el peso
$g = 9{,}8\ m/seg^2 = 980\ cm/seg^2 = 32\ pies/seg^2$
W puede venir dado en kilogramos peso, o en libras.

Sistema de unidades

	Sistema C.G.S.	Sistema M.K.S.	Sistema P.L.S.
Longitud	cm.	m.	pies
Masa	grs.	Kgrs. masa	libra - masa
Tiempo	seg.	seg.	seg.
Aceleración	cm/seg^2	m/seg^2	$pies/seg^2$
Fuerza	dinas(grs. $\frac{cm}{seg^2}$)	Newton (Kgrs $\frac{m}{seg^2}$)	libra – fuerza

Caída libre $F = m \cdot g.$

La única fuerza que actúa es la del campo gravitacional. Si x es la distancia hasta una altura fija, entonces se tiene la ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g$$

Caída retardada: $F = m\cdot g - F_r$, F_r = fuerza de resistencia del medio

---

Problemas

1) **Una masa de 25 gramos cae desde el reposo bajo la influencia de la gravedad.**

a) Establezca una ecuación diferencial y condicione para el movimiento.
b) Encuentre la distancia viajada y la velocidad conseguida 3 seg. después de empezar un movimiento.
c) ¿Cuánta distancia recorre la masa entre el 3° y 4° seg.? ¿Entre el 4° y 5° seg.?

Respuesta

$a = g$

$\frac{dv}{dt} = g \quad \Rightarrow \quad v = gt + c_1$

$t = 0\ ,\ v = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0 \qquad \Rightarrow \quad c_1 = 0 \qquad \therefore\ v = g\,t$

$\therefore\ v = \frac{dv}{dt} = g\,t$

$x = g\,\frac{t^2}{2} + c_2$

$t = 0\ ,\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$

$\therefore \quad x = \frac{gt^2}{2}$

a) Ecuación de movimiento $x(t) = \frac{g}{2}t^2$ Condiciones Iniciales $t = 0,\ x = 0,\ v = 0$

b) Para $t = 3$ seg. $x(3) = \frac{980}{2}\,9 = 4410$ cm.

$v(3) = 980 \cdot 3 = 2940$ cm / seg.

c) Para $t = 4$ seg. $x(4) = \frac{980}{2} \cdot 16 = 7840$ cm.

d) Para $t = 5$ seg. $x(5) = \frac{980}{2} \cdot 25 = 12.250$ cm.

Entre el 3° y 4° seg. recorre : 3430 cm.
Entre el 4° y 5° seg. recorre : 4410 cm.

---

2) Una masa de 200 grs. se lanza hacia arriba con una velocidad de 2450 cm / seg.
a) Encuentre la distancia desde el punto de partida y las velocidades conseguidas 2 y 4 seg. después de empezar el movimiento.
b) Encuentre el punto más alto alcanzado y el tiempo requerido.
c) ¿Cuáles son las distancias totales recorridas después de 2 seg. , después de 4 seg.?

Respuesta

$a = -\,g$

$\frac{dv}{dt} = -\,980$

$v = 980\,t + C_1$

$t = 0, \quad v = 2450 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2450$

$\therefore \quad v = -980\,t + 2450$

$$\frac{dx}{dt} = -980\,t + 2450$$

$$x = -\frac{980t^2}{2} + 2450\,t + c_2$$

$t = 0\,, \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$

$\therefore \quad \boxed{x(t) = -490\,t^2 + 2450\,t}$

a) $x(2) = -490 \cdot 4 + 2450 \cdot 2 = 2940$ cm.
$x(4) = -490 \cdot 16 + 2450 \cdot 4 = 1960$ cm.
$v(2) = -980 \cdot 2 + 2450 = 490$ cm / seg. $\uparrow$
$v(4) = -980 \cdot 4 + 2450 = -1470$ cm / seg. $\downarrow$

b) Punto más alto, si $v = 0 \Rightarrow t = \dfrac{2450}{980} = 2{,}5$ seg.

$x(2,5) = -490 \cdot 6{,}25 + 6125 = 3062,5$ cm.

c) $x(2) = 2940$ cm.
$x(2{,}5) + x(2,5) - x(4) = 4165$ cm.

---

3) Un peso de 6 libras se deja caer desde una cima de $\frac{1}{4}$ millas de alto. Asumiendo ninguna resistencia del aire. ¿En qué tiempo y con qué velocidad llega a la tierra?

Respuesta:

1 milla = 5280 pies, $\frac{1}{4}$ milla = 1320 pies, $g = 32$ pies / seg^2.

$a = g \quad , \dfrac{dv}{dt} = 32$

$\boxed{v = 32t + c_1}$

$t = 0, \quad v = 0\,, \quad c_1 = 0 \quad \therefore \quad v(t) = 32t$

$\dfrac{dx}{dt} = 32t$, luego $\boxed{x = 32\dfrac{t^2}{2} + c_2}$

$t = 0\,, \quad x = 0\,, \quad c_2 = 0$

$x(t) = 16\,t^2$

si $x = 1320$ pies $\qquad t = \sqrt{\dfrac{1320}{16}} = 9,08$ seg.

$v(9,08) = 32 \cdot 9,08 = 290{,}56$ pies / seg.

---

4) Una pequeña gota de aceite de 0,2 grs. de masa, cae en el aire desde el reposo. Para una velocidad de 40 cm / seg. la fuerza debida a la resistencia del aire es 160 dinas. Asumiendo que la fuerza de resistencia del aire es proporcional a la velocidad.

a) Encuentre la velocidad y la distancia recorrida como una función de tiempo.

b) Encuentre la velocidad límite.

Respuesta :

Sea F_r = fuerza debida a la resistencia del aire

$F_r = k\,v$

Si $v = 40$ cm / seg. $F_r = 160$ dinas

$160 = K \cdot 40 \Rightarrow K = 4.$

$$\boxed{F = m\cdot g - kv}$$

$$m\,\frac{dv}{dt} = m\cdot g - 4v$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{4v}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} = 980 - \frac{4}{0{,}2}\,v$$

$$\frac{dv}{dt} = 980 - 20v$$

$$\frac{dv}{980 - 20v} = dt$$

$$\frac{1}{-20}\ln|980 - 20v| = t + c_1\,,\ \text{pues}\ 980 - 20v > 0 \Rightarrow 0 \leq v < 49$$

$$980 - 20v = e^{-20t - 20C_1}$$

$$t = 0\ ,\ v = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{\ln(980)}{20}$$

$$\therefore\ 980 - 20v = e^{-20t}\cdot e^{\ln 980}$$

$$980 - 20v = 980\,e^{-20t}$$

$$980 - 980\,e^{-20t} = 20v$$

$$v = 49 - 49\,e^{-20t}$$

$$v(t) = 49\,(1 - e^{-20t})$$

$$x(t) = 49t - \frac{49e^{-20t}}{-20} + c_2$$

$$t = 0\ ,\ x = 0\ ,\ c_2 = \frac{-49}{20}\text{, luego}\qquad x(t) = 49t + \frac{49}{20}e^{-20t} - \frac{49}{20}$$

b) si $t \to +\infty$ $v(t) = 49$ cm / seg. es la velocidad límite.

5.-Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a los circuitos eléctricos

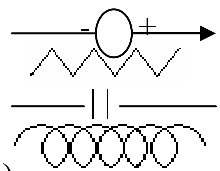
El flujo de corriente en una red eléctrica consistente en un número finito de circuitos conectados en serie, está gobernado por las siguientes reglas conocidas como leyes de Kirchhoff.

a) La suma algebraica de todas las corrientes que fluyen en un punto cualquiera de la red es cero.

b) La suma algebraica de la pérdida de voltaje a través de los diversos componentes eléctricos, en cualquier circuito orientado a la red, es cero.

Consideraremos redes que consistan en un solo circuito formado por:

Una fuente de voltaje (E) (voltio)
Una resistencia (R) (ohmio)
Una capacitancia (C) (faradio)
Una Inductancia (L) (henrio)
Corriente (I) (amperio)
Carga (Q) (culombio) , $Q'(t)=I$



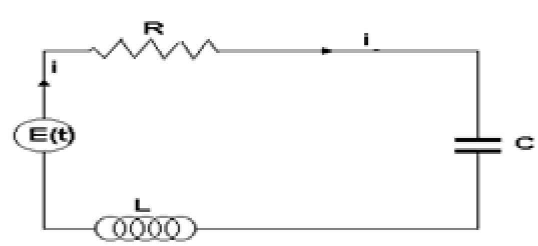
y se cumplen las siguientes leyes.

1) La caída del voltaje a través de una resistencia es proporcional a la corriente que pasa través de la resistencia, es decir $\boxed{E_R = I\,R}$

2) La caída del voltaje, a través de un inductor es proporcional a la tasa de tiempo instantánea de cambio de la corriente, es decir $\boxed{E_L = L\,\dfrac{dI}{dt}}$

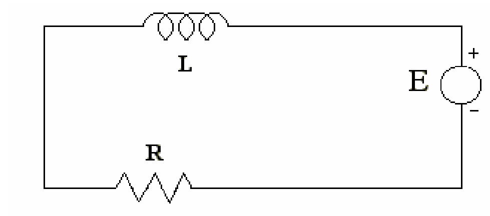
3) La caída del voltaje, a través de un condensador es proporcional a la carga eléctrica instantánea en el condensador, es decir $\boxed{E_c = \dfrac{Q}{C}}$

Convención: La corriente fluye del lado positivo (+) de la fuente de voltaje, a través del circuito hacia el lado negativo.



Consideraremos tres casos para analizar.

<u>Caso 1:</u> Dado un circuito en serie con una fuente constante de voltaje, E, (batería), una resistencia R y una inductancia L.



Por la segunda ley de Kirchhoff se tiene: $E_L + E_R = E$, es decir $L\dfrac{dI}{dt} + RI = E$

Si el circuito fue excitado en el instante $t = 0$, el flujo de corriente se obtiene como la solución del problema de valor inicial.

$\boxed{L\dfrac{dI}{dt} + RI = E \;,\quad I(0) = 0}$ o bien $\boxed{\dfrac{dI}{dt} + \left(\dfrac{R}{L}\right)I = \dfrac{E}{L}}$ (ecuación diferencial lineal)

<u>Solución</u>

$$I = e^{-\int \frac{R}{L}dt}\left[\int \frac{E}{L}e^{\int \frac{R}{L}dt}dt + c\right] = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\int \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}dt + c\right] = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}\cdot\frac{L}{R} + c\right] = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t} + c\right]$$

Como $t = 0 = I.$, entonces $0 = \dfrac{E}{R} + c$, luego $c = \dfrac{-E}{R}$ $\therefore$ $I = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\dfrac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t} - \dfrac{E}{R}\right]$

$$I = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

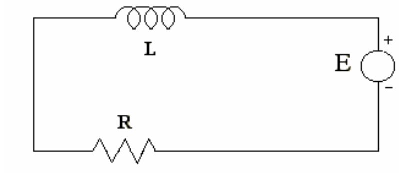
Término independiente del tiempo, de estado estacionario

Término transitorio, pues cuando $t \to \propto,\ \dfrac{E}{R}e^{-\frac{-R}{L}t} \to 0$

<u>Ejercicio</u>

A un circuito en serie, en el cual la inductancia es de 0.1 henrios y la resistencia es de 50 ohmios, se le aplica una tensión de 30 voltios. Exprese la corriente eléctrica en función del tiempo y determine la corriente cuando el tiempo tiende al infinito, si I(0) = 0.

Caso 2: Dado un circuito en serie con una fuente de corriente alterna E sen(wt), una resistencia R, y una inductancia L.



Entonces, por la segunda ley de Kirchhoff, se tiene:

$$L\,\frac{dI}{dt} + R\,I = E\ \text{sen}\,(wt)\,,\quad I\,(0) = 0$$

$$\boxed{\frac{dI}{dt} + \left(\frac{R}{L}\right)I = \left(\frac{E}{L}sen(wt)\right)}$$ ecuación diferencial lineal en I

Solución :

$$I = e^{-\int \frac{R}{L}dt}\left[\int \frac{E}{L}sen(wt)e^{\int \frac{R}{L}dt}dt + c\right] = e^{-\int \frac{R}{L}t}\left[\int \frac{E}{L}sen(wt)e^{\int \frac{R}{L}t}dt + c\right] =$$

$$e^{-\int \frac{R}{L}t}\left[\frac{E}{L}\int sen\,(wt)e^{\int \frac{R}{L}t}dt + c\right] = e^{-\int \frac{R}{L}t}\left[\frac{E}{L}\left(\frac{L R e^{\frac{R}{L}t}\,sen(wt)}{R^2 + L^2w^2} - \frac{L^2 w\cos(wt)e^{\frac{R}{L}t}}{R^2 + L^2w^2}\right) + c\right]$$

$$t = 0 = I \quad \Rightarrow \quad c = \frac{ELw}{R^2 + L^2w^2}$$

$$\therefore \quad I = e^{-\int \frac{R}{L}t}\left[\frac{E}{L}\left(\frac{L R e^{\frac{R}{L}t}\,sen(wt)}{R^2 + L^2w^2} - \frac{L^2 w\cos(wt)e^{\frac{R}{L}t}}{R^2 + L^2w^2}\right) + \frac{ELw}{R^2 + L^2w^2}\right]$$

$$I = \frac{ERsen(wt)}{R^2 + L^2w^2} - \frac{ELw\cos(wt)}{R^2 + L^2w^2} + \frac{ELwe^{\frac{-R}{L}t}}{R^2 + L^2w^2}$$

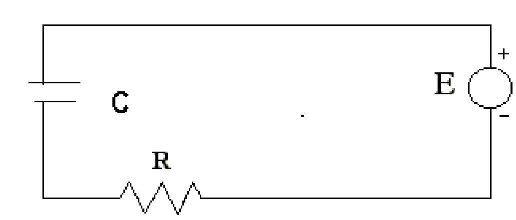
$$I = \frac{E}{R^2 + w^2L^2}\,(R\ \text{sen}\ (wt) - wL\ \cos\ (wt)) + \frac{ELwe^{\frac{-R}{L}t}}{R^2 + L^2w^2}$$

Sea $R = z\ \cos\,(\alpha) \ \wedge\ wL = z\ \text{sen}\ (\alpha) \quad \therefore\ z^2 = R^2 + w^2 L^2$
y $R\ \text{sen}\ (wt) - wL\ \cos\ (wt) = z\ \cos\,(\alpha)\ \text{sen}\ (wt) - z\ \text{sen}\ (\alpha)\cos\ (wt) = z\ \text{sen}\ (wt - \alpha)$.

$$\therefore \quad \boxed{I = \frac{wELe^{\frac{-R}{L}t}}{z^2} + \frac{E}{z}\ \text{sen}\ (wt - \alpha)}$$

$\alpha =$ ángulo de fase, $z = \sqrt{R^2 + w^2L^2}$ impedancia del estado estacionario.

<u>Caso 3</u>: Dado un circuito en serie con una resistencia, una capacitancia y una fuente de voltaje



Supongamos que una resistencia de R ohmios varía con el tiempo t (segundos), de acuerdo a R = 1 + 0,01 t, $0 \le t \le 1000$. Se conecta en serie con un condensador de 0,1 faradios y una f.e.m. de 100 voltios. La carga inicial en el condensador es de 5 culombios. Se trata de encontrar a) la carga y la corriente como una función del tiempo. b) la carga máxima teórica.

<u>Solución:</u>

Aplicando ley de Kirchoff se tiene RI + $\frac{Q}{C} = E$, como I = $\frac{dQ}{dt}$, entonces queda la ecuación.

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

Reemplazando los datos queda la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{0{,}1 + 0{,}001t} = \frac{100}{1 + 0{,}01t}$$

$$Q(t) = e^{-\int \frac{1}{0{,}1+0{,}001t}dt}\left[\int \frac{100}{1+0{,}01t} e^{\int \frac{1}{0{,}1+0{,}001t}dt} dt + C\right]$$

$Q(t) = 10 + C_1\,(0{,}1 + 0{,}001t)^{-1000}$

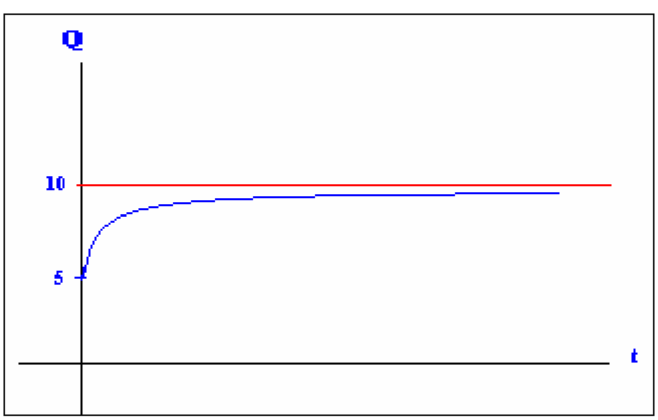
Para t = 0, Q = 5, luego $C_1 = -5(0{,}1)^{1000}$

$Q(t) = 10 - 5\,(1 + 0{,}01t)^{-1000}$ (carga en función del tiempo)

Como $I = \frac{dQ}{dt}$, luego

$I(t) = 50\,(1 + 0{,}01t)^{-1001}$ (intensidad de corriente en función del tiempo)

Q_{max} se obtiene para $t \to +\infty$ $\therefore$ $Q_{max} = 10$ culombios



6.- Dinámica poblacional

Sea P(t) una función de población que corresponde a una aproximación continua a la población real que por supuesto crece con incrementos discretos.
Consideremos que la población cambia exclusivamente por la ocurrencia de nacimientos y decesos y no por inmigraciones o emigraciones.

Definimos

B(t) = número de nacimientos que han ocurrido desde t = 0, hasta el instante t.
D(t) = número de decesos que han ocurrido desde t = 0, hasta el instante t.

$$\boxed{P(t) = B(t) - D(t)}$$

Indice de natalidad: Número de nacimientos por unidad de tiempo, por unidad de población.

$$\beta(t) = \lim_{h\to 0} \frac{B(t+h) - B(t)}{hP(t)} = \frac{1}{P}\frac{dB}{dt}$$

$$\boxed{\therefore \frac{dB}{dt} = \beta P}$$

Indice de mortalidad: Número de decesos por unidad de tiempo, por unidad de población.

$$\delta(t) = \lim_{h\to 0} \frac{D(t+h) - D(t)}{hP(t)} = \frac{1}{P}\frac{dD}{dt}$$

$$\boxed{\therefore \frac{dD}{dt} = \delta P}$$

$$\therefore \frac{dP}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt} = \beta P - \delta P = (\beta - \delta)P$$

$$\boxed{\therefore \frac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P}$$

Observaciones:

1) Si β y δ son constantes, entonces $\beta - \delta = k$, constante y se tiene $\boxed{\frac{dP}{dt} = kP}$

2) Si β es una función lineal decreciente, $\beta = \beta_0 - \beta_1 P$, donde β_0 y β_1 son constantes positivas y si $\delta = \delta_0$ es constante, entonces se tiene la ecuación:
$\boxed{\frac{dP}{dt} = ((\beta_0 - \beta_1 P) - \delta_0)P}$ si hacemos $k = \beta_1$ y $M = \frac{\beta_0 - \delta_0}{\beta_1}$, entonces escribiremos que
$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP(M - P)}$ que es la ecuación logística de la población.

Si P < M, se obtiene la solución:

$\boxed{P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}}}$, donde $P_0 = P(0)$

Nota: si $P_0 < M$, entonces $P(t) < M$, $\forall\ t \geq 0\ \ y\ \ \lim_{t\to+\infty} P(t) = M$, M se llama **población límite**

Ejemplo:
Supongamos que en 1885 la población de cierto país era de 50 millones de habitantes y que estuvo creciendo a razón de 750.000 personas por año en ese tiempo. Suponga también que en 1940 la población era de 100 millones y que entonces el crecimiento era a razón de 1 millón al año. Supongamos que la población satisface la ecuación logística. Determinar la población límite M y la población pronosticada para el año 2000.

Respuesta:
Consideramos la ecuación logística $\boxed{\dfrac{dP}{dt} = kP(M-P)}$
y sustituimos los dos pares de datos propuestos

$$\left.\begin{array}{lll} para\ 1885 & 0{,}75 = 50k(M-50) \\ para\ 1940 & 1{,}00 = 100k(M-100) \end{array}\right\} \text{en millones}$$

Resolviendo el sistema, se tiene $\boxed{M = 200}$ y $\boxed{k = 0{,}0001}$
La población límite del país es de 200 millones de habitantes.

$\boxed{\text{Considerando } t = 0 \text{ para el año 1940, con } P_0 = 100 \text{ se tiene}}$

$$P_0 = 100 \quad M = 200 \quad k = 0{,}0001 \quad t = 60$$

$$P(60) = \frac{(P_0)(M)}{P_0 + (M - P_0)e^{-(k)(M)(t)}} = 153{,}7\ \ millones\ \ de\ \ habi\tan tes$$

Autoevaluación

1) Dibuje cada una de las siguientes familias de curvas, encuentre sus trayectorias ortogonales.

a) $r = c(1 + \cos\theta)$, b) $y = c\,e^{x}$

2) Un paracaidista y un paracaídas pesan 200 libras; en el instante en que el paracaídas se abre, él está viajando verticalmente hacia abajo a 40 pies / seg. si la resistencia del aire es directamente proporcional a la velocidad instantánea y la resistencia del aire es de 80 libras cuando la velocidad es 20 pies / seg.

a) Encuentre la velocidad límite.
b) Determine la posición y la velocidad a cualquier tiempo.

3) Un peso de 192 libras tiene la velocidad límite de 16 pies / seg. cuando cae en el aire, el cual ofrece una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad instantánea del peso , si el peso parte del reposo.

a) Encuentre la velocidad del peso después de 1 seg.
b) ¿A qué distancia se encuentra antes de que la velocidad sea de 15 pies / seg.?

Tiempo estimado para responder la autoevaluación 1,5 horas.

Respuesta de la autoevaluación

1) a) $r = c(1 + \cos\theta)$ (Cardioide)

Respuesta:

$$\frac{dr}{d\theta} = c \ \text{sen}\ \theta$$

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r sen\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{dr}{rd\theta} = -\frac{sen\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{rd\theta}{dr} = -\frac{1+\cos\theta}{sen\theta}$$

$$\left(-\frac{dr}{rd\theta}\right) = -\frac{1+\cos\theta}{sen\theta}$$

$$\frac{dr}{r} = (\sec\theta + \text{ctg}\,\theta)\, d\theta.$$

$\ln(r) = \ln(\text{cosec}\theta - \text{ctg}\theta) + \ln(\text{sen}\,\theta) + c$

$\ln(r) = \ln(1 - \cos\theta)\, c$

$$\boxed{r = c(1 - \cos\theta)}$$

1) b) $y = c\, e^x$

Respuesta:

$$\frac{dy}{dx} = c\, e^x = \frac{y}{e^x} e^x = y$$

$$\frac{dy}{dx_{T.O.}} = \frac{1}{ce^x} = -\frac{1}{y}$$

$y\, dy = -\, dx$

$$\frac{y^2}{2} = -x + c$$

$$x = -\frac{y^2}{2} + c$$

2) $W_P = 200$ libras

$V_p = 40$ pies / seg.

$R_a = K v.$

$R_e = 80$ libras para $v = 20$ pie / seg.

$80 = k \cdot 20 \Rightarrow \boxed{k = 4}$

$\boxed{F = 200 - 4v}$

$m\,a = 200 - 4v$

$\frac{200}{32}\frac{dv}{dt} = 200 - 4v$

$\frac{25}{4}\frac{dv}{dt} = 4\ (50 - v)$

$\frac{dv}{50-v} = \frac{16}{25}\ dt$

$-\ln(50 - v) = \frac{16}{25}\ t + c_1$

$\ln\ (50 - v) = -\ \frac{16}{25}\ t - c_1$

$50 - v = e^{-\frac{16}{25}t - c_1}$

$v = 50 - e^{-\frac{16}{25}t - c_1}$

$t = 0\ ,\ v = 40$

$40 = 50 - e^{-c_1}$

$-10 = e^{-c_1}$

$e^{-c_1} = 10$

w = g · g.

$-c_1 = \ln 10$

$\therefore v = 50 - e^{-\frac{16}{25}t + \ln 10}$

$v = 50 - 10\ e^{-\frac{16}{25}t}.$

$\boxed{v(t) = 50 - 10\, e^{-0,64t}\ \text{pies / seg.}}$

a) velocidad límite . $\lim_{t \to \infty} v(t)$

$v = 50$ pies / seg.

b) $v(t) = 50 - 10\ e^{-0,64t}$

$$x(t) = 50t + \frac{10}{0,64}\ e^{-0,64t} + c_2$$

$$x(t) = 50t + 15,63\ e^{-0,64t} + c_2$$

$t = 0$, $x = 0$, $c_2 = -15,63$

$$\boxed{x(t) = 50t + 15,63\ e^{-0,64t} - 15,63} \text{ pies}$$

3) $F_r = Kv$

$F = 192 - Kv$

$$m\ \frac{dv}{dt} = 192 - Kv$$

$$\frac{192}{32}\ \frac{dv}{dt} = 192 - Kv$$

$$6\ \frac{dv}{dt} = 192 - Kv$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{192}{6} - \frac{kv}{6}$$

$$\frac{dv}{dt} = 32 - \frac{k}{6}\ v$$

$$\frac{dv}{32 - \frac{k}{6}v} = dt$$

$$\frac{\ln\left(32 - \frac{k}{6}v\right)}{-\frac{k}{6}} = t + c_1$$

$$\ln\left(32 - \frac{k}{6}\ v\right) = -\frac{k}{6}\ t - \frac{k}{6}\ c_1$$

$$32 - \frac{k}{6}\,v = e^{\frac{-k}{6}t - \frac{k}{6}c_1}$$

$$\frac{k}{6}\,v = 32 - e^{\frac{-k}{6}(t+c_1)}$$

$$v = \frac{32 \cdot 6}{k} - \frac{6}{k}\,e^{-\frac{k}{6}(t+c_1)}$$

$$\text{velocidad límite} = \frac{32 \cdot 6}{k} = 16$$

$$\frac{192}{k} = 16 \Rightarrow \boxed{k = 12}$$

$$v = 16 - \frac{1}{2}\,e^{-2(t+c_1)}$$

$$t = 0 \quad , \quad v = 0$$

$$0 = 16 - \frac{1}{2}\,e^{-2c_1}$$

$$\frac{1}{2}\,e^{-2c_1} = 16$$

$$e^{-2c_1} = 32$$

$$-2\,c_1 = \ln 32$$

$$c_1 = \frac{\ln 32}{-2}$$

$$v = 16 - \frac{1}{2}\,e^{-2t + \ln 32}$$

$$v = 16 - 16\,e^{-2t}$$

$$v = 16\,(1 - e^{-2t})$$

$$v(1) = 16\,(1 - e^{-2}) = 13{,}83 \quad \text{pies / seg.}$$

$$15 = 16\,(1 - e^{-2t})$$

$$e^{-2t} = 0{,}0625$$

$- 2t = \ln (0, 0625) \Rightarrow 1, 39$ seg.

$v = 16 – 16 e^{- 2t}$

$$\frac{dx}{dt} = 16 – 16 e^{- 2t}$$

$$x = 16t \frac{16e^{-2t}}{2} + c_2$$

$x(t) = 16t + 8e^{-2t} + c_2$

$t = 0, \ x = 0$

$0 = 8 + c_2$
$c_2 = -8$

$$\boxed{x(t) = 16t + 8e^{-2t} - 8}$$

$x(1,39) = 16 \cdot 1,39 + 8e^{-2,78} – 8$
$= 22,24 + 8e^{-2,78} – 8$

$$\boxed{x = 14,74 \text{ pies}}$$

$v = 16 – 16e^{-2t}$

$$\frac{dx}{dt} = 16 – 16e^{-2t}$$

$$x = 16t + \frac{16}{2} e^{-2t} + c_2$$

$x(t) = 16t + 8e^{-2t} + c_2$

$t = 0, \ x = 0$

$0 = 8 + c_2$
$c_2 = -8$

$x(t) = 16t + 8e^{-2t} – 8$
$x(1,39) = 16 \cdot 1,39 + 8e^{-2,78} – 8$
$= 22,24 + 8e^{-2,78} – 8$

$x = 14,74$ pies

Ejercicios propuestos

1) Dibuje cada una de las siguientes familias de curvas, encuentre sus trayectorias ortogonales y grafíquelas: a) $xy = c$, b) $y = cx^2$

2) Encuentre las curvas que satisfacen cada una de las siguientes condiciones geométricas.
a) La parte de la tangente que corta a los ejes está dimidiada por el punto de tangencia.
b) La proyección sobre el eje x de la parte de la recta normal entre (x, y) y el eje x tiene longitud 1.

3) Un tanque contiene 100 decálitros de salmuera obtenida disolviendo 60Kg de sal. Se introduce al tanque a una velocidad de 2decálitros/min, agua salada que contiene 1Kg de sal por decálitro, y la mezcla, conservada homogénea mediante agitación, sale a una velocidad de 3 decálitros/min. Hallar la cantidad de sal en el tanque al cabo de una hora.

4) Dos químicos, A y B, reaccionan para formar otro químico C. Se encuentra que la tasa a la cual C se forma, varía con las cantidades instantáneas de los químicos A y B presentes. La formación requiere 2 libras de A por cada libra de B. Si 10 libras de A y 20 libras de B están presentes inicialmente, y si 6 libras de C se forman en 20 minutos, encontrar la cantidad del químico C en cualquier tiempo.

5) La fuerza de resistencia del agua que actúa sobre un bote es proporcional a su velocidad instantánea, y es tal que a 20 pies / seg. , la resistencia del agua es 40 libras. Si el bote pesa 320 libras y el único pasajero para 160 libras y si el motor puede ejercer una fuerza estable de 50 libras en la dirección del movimiento.
a) Encuentre la máxima velocidad a la cual el bote puede viajar.
b) Encuentre la distancia recorrida y la velocidad a cualquier tiempo, asumiendo que el bote parte del reposo.

6) Un cuerpo de masa m cae desde el reposo en un medio en que la resistencia (en libras) es proporcional a la velocidad (pies/seg) si la gravedad específica del medio es $\frac{1}{4}$ la del cuerpo y si la velocidad terminal es 24 pies/seg = 7,31 m/seg. Hallar a) la velocidad al cabo de 3 seg, b) la distancia recorrida en 3 seg.

7) Una resistencia de 4 ohmios y un inductor de 1 henrio se conectan en serie con un voltaje dado por $100\, e^{-4t} \cdot \cos 50\, t$, $t \geq 0$. Encontrar I(t) , si $I = 0$ en $t = 0$.

UNIDAD 4: SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE UNA TÉCNICA CUALITATIVA

Estudiaremos la ecuación diferencial de la forma: $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = f(t,y)}$

Campo de direcciones y el método de las isoclinas

(Isoclina = pendiente constante)

Si $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$ satisface el teorema de existencia – unicidad en una región R, en cada punto (a,b) de R se traza un segmento de recta con **pendiente f(a ,b)**, se obtiene un gráfico llamado **campo de direcciones**.

Ejemplo

Obtenga el campo de direcciones de la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{y}$

Respuesta

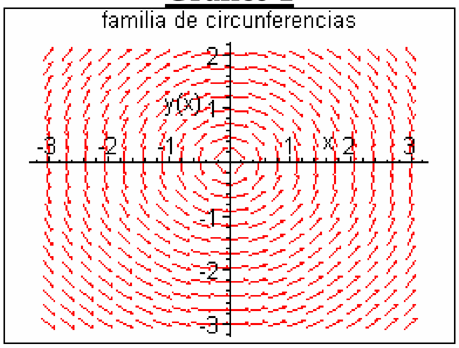
Sea $f(t, y) = -\frac{t}{y}$. Damos valores a t e y, y se tiene la siguiente tabla:

y/t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4	-1	-3/4	-1/2	-1/4	0	1/4	1/2	3/4	1
-3	-4/3	-1	-2/3	-1/3	0	1/3	2/3	1	4/3
-2	-2	-3/2	-1	-1/2	0	1/2	1	3/2	2
-1	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
2	2	3/2	1	1/2	0	-1/2	-1	-3/2	-2
3	4/3	1	2/3	1/3	0	-1/3	-2/3	-1	-4/3
4	1	3/4	1/2	1/4	0	-1/4	-1/2	-3/4	-1

Para y = -4 y t = -4, se tiene f(-4, -4) = -1, etc.

Para graficar el campo de pendientes, ubicamos los puntos (t, y) y sobre ellos dibujamos un pequeño segmento de recta de pendiente f(t,y).

Gráfico 1



Solución: $t^2 + y^2 = C$, que corresponde a una familia de circunferencias concéntricas.

Casos especiales

a) Campos de pendientes para dy/dt = f(t)

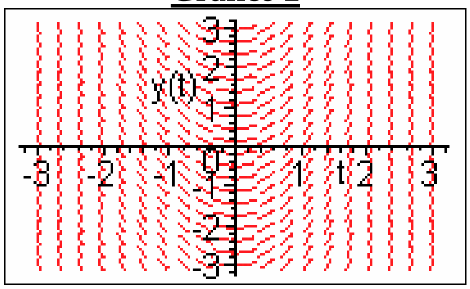
El campo de direcciones es paralelo a lo largo de cada línea vertical, pues la pendiente no depende de y.

Ejemplo:

Generar el campo de pendientes a partir de la ecuación $\boxed{\frac{dy}{dt} = 2t}$

Respuesta: La gráfica del campo de pendientes es la siguiente

Gráfico 2



Integrando la ecuación se tiene

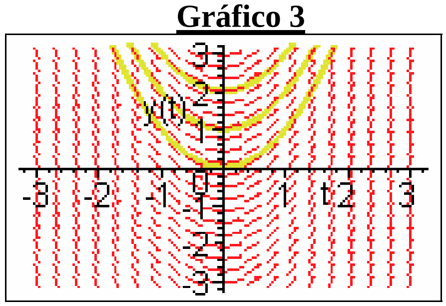
$$y(t) = \int 2t\,dt = t^2 + c$$

donde c es la constante de integración.

Por consiguiente, la solución general de la ecuación diferencial consiste en funciones de la forma

$$y(t) = t^2 + c$$

Gráfico 3



b) Campos pendientes para ecuaciones autónomas

Definición de ecuación autónoma

Las ecuaciones autónomas son ecuaciones diferenciales de la forma

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = f(y)}$$

El campo de direcciones es paralelo a lo largo de cada línea horizontal, pues la pendiente no depende de t.

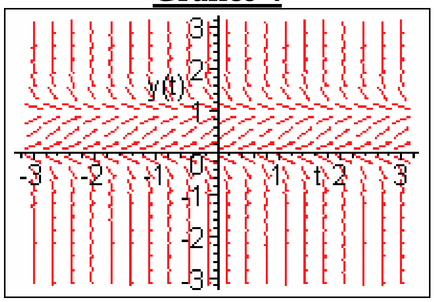
Ejemplo:

Determinar el campo de pendientes para la ecuación autónoma

$$\frac{dy}{dt} = 4y(1-y)$$

Respuesta:

Gráfico 4



- Si 0< y< 1, entonces dy/dt es positiva y las tangentes sugieren que una solución con 0<y <1 es creciente.
- Si y< -1 o si y >1, entonces dy/dt es negativa y cualquier solución con y < -1 o y > 1 es decreciente.

Definición de punto de equilibrio de una ecuación diferencial autónoma

Dada la ecuación autónoma $\frac{dy}{dt} = f(y)$. Llamaremos punto de equilibrio de la ecuación a los valores de y, tales que f(y) = 0, es decir los valores de y , tales que $\frac{dy}{dt} = 0$. Estos puntos también se llaman puntos críticos, soluciones de equilibrio, o soluciones constantes. Geométricamente, todas las marcas de pendiente son horizontales para estos puntos.

Ejemplo:

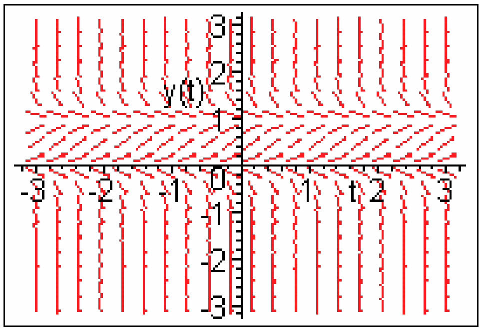
Para la ecuación autónoma $\boxed{\frac{dy}{dt} = 4y(1-y)}$

Tenemos soluciones de equilibrio en y = 0 y en y = 1, pues 4y (1 – y) = 0 implica y = 0 e y = 1.

El campo de pendientes es horizontal a todo lo largo de esas dos líneas horizontales y por tanto sabemos que ambas corresponden a las gráficas de soluciones.

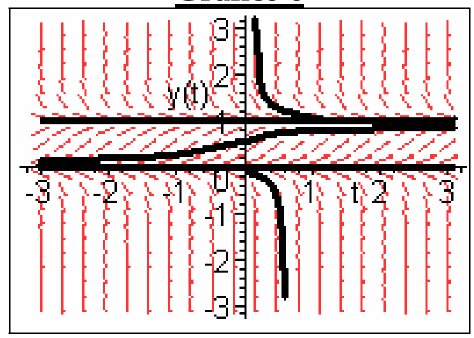
Intervalos de crecimiento de $f(y)$: $]0,1[$
Intervalos de decrecimiento de $f(y)$: $]-\infty,0[,\ ]1,+\infty[$

Gráfico 5



El campo de pendientes para
dy/dt = 4y(1 – y)

Gráfico 6



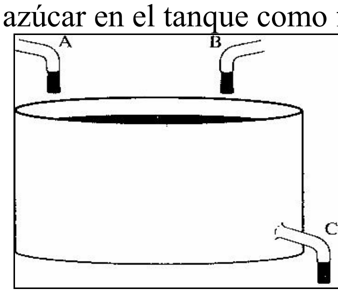
Las gráficas de tres soluciones superpuestas sobre el campo de pendientes para *dy/dt = 4y(1 – y)*

Un problema de mezclado

Consideremos un gran tanque que contiene azúcar y agua con lo que se prepararán refrescos embotellados. Suponga que:

a) El tanque contiene 100 galones de líquido. Además, la cantidad que fluye hacia adentro es la misma que fluye hacia afuera, pero siempre hay 100 galones en el tanque.
b) El tanque se mantiene bien mezclado, por lo que la concentración de azúcar es uniforme en todo el tanque.
c) El agua azucarada que contiene 5 cucharadas de azúcar por galón entra al tanque a través de un tubo A, a razón de 2 galones por minuto.
d) El agua azucarada que contiene 10 cucharadas de azúcar por galón entra al tanque a través de un tubo B, a razón de 1 galón por minuto.
e) El agua azucarada sale del tanque a través de un tubo C, a razón de 3 galones por minuto.

Se desea determinar la cantidad de azúcar en el tanque como función del tiempo.



Respuesta:

La ecuación diferencial que modela al problema es la siguiente

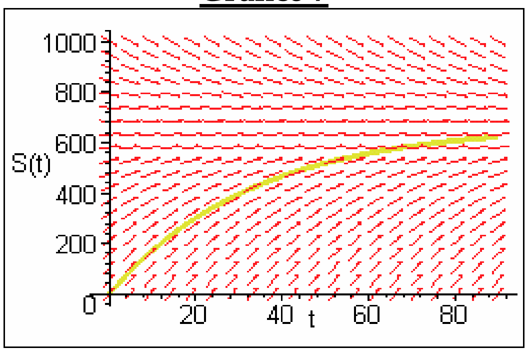
$\frac{dS}{dt} = 2\cdot 5 + 1\cdot 10 - 3\cdot \frac{S}{100}$, donde S describía la cantidad de azúcar en un tanque en el tiempo *t*.

Luego: $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{2000 - 3S}{100}$

La solución general de esta ecuación es S (t) = $ce^{-0.03t} + \dfrac{2000}{3}$, donde c es una constante arbitraria.

Usando el campo de pendiente de esta ecuación es posible obtener fácilmente una descripción cualitativa de esas soluciones. En la gráfica siguiente mostramos el campo de pendientes y las gráficas de las respuestas seleccionadas.

Gráfico 7



El campo de pendientes es horizontal si $S = 2000/3$, la solución de equilibrio.
Las pendientes son positivas si $S < 2000/3$ y negativas si $S > 2000/3$.
Las soluciones tiendan hacia el equilibrio cuando t crece.

Este análisis cualitativo indica que, independientemente de cuál sea la cantidad inicial de azúcar, la proporción de azúcar en el tanque tiende a *2000/3* cuando $t \to \infty$.

Obtenemos la misma información tomando el límite de la solución general cuando $t \to \infty$, pero no siempre es fácil de calcularlo.

Definición de línea de fase

Es una recta que resume el campo de direcciones. En la recta se ubican los puntos de equilibrio y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(y)$.

Ejemplo

Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = (1 - y)y.$$

El lado derecho de la ecuación diferencial es $f(y) = (1 - y)y$.
$f(y) = 0$ ocurre cuando $y = 0$ e $y = 1$.

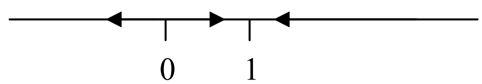
Por lo tanto, la función constante $y_1(t) = 0$ y $y_2(t) = 1$, son soluciones de equilibrio para esta ecuación.

Los puntos $y = 0$ y $y = 1$ sobre el eje y se denominan **puntos de equilibrio**.

$f(y)$ es positivo si $0 < y < 1$,
$f(y)$ es negativo si $y < 0$ o $y > 1$.

Podemos dibujar la línea de fase colocando los puntos de equilibrio $y = 0$ y $y = 1$, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento con una flecha.

Gráfico 8



Línea de fase para $dy/dt = (1 - y)y$.

Las líneas de fase para esbozar soluciones

Podemos obtener un croquis aproximado de las gráficas de soluciones, directamente a partir de las líneas de fase. El tipo de información que predicen estas líneas de fase indican el comportamiento límite de las soluciones cuando t crece o disminuye. El gráfico obtenido al trazar las gráficas de las soluciones, se llama **retrato de fase**.

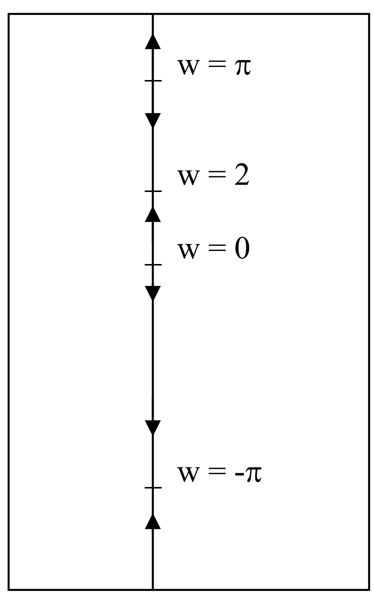
Ejemplo 1

Consideremos el problema de valor inicial: $\dfrac{dw}{dt} = (2 - w)\,\text{sen}\, w\,,\ \ w(0) = 0.4$

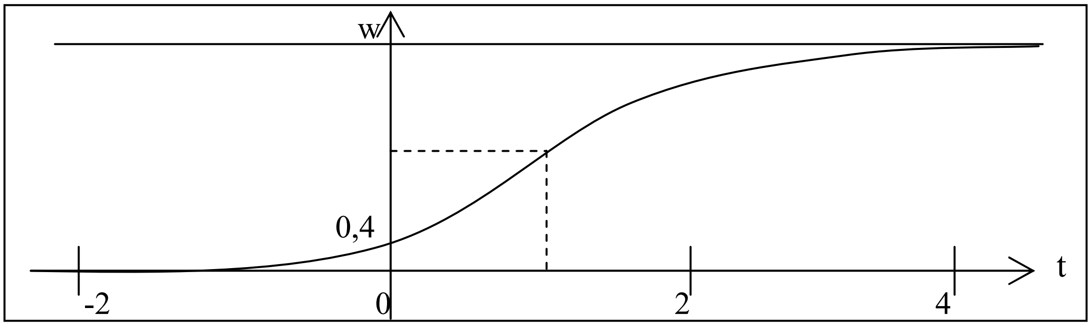
$F(w) = (2 - w)\,\text{sen}(w)$ Puntos críticos: $2, 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\ldots$

La línea de fase es la siguiente.

Gráfico 9: Línea de fase



Gráfica 10: Retrato de Fase



Gráfica de la solución al problema de valor inicial $\frac{dw}{dt} = (2 - w)\,\text{sen}\, w,\;\; w(0) = 0.4$

Nota: Suponga que $y(t)$ es una solución de una ecuación autónoma

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = f(y).}$$

- Si $f(y(0)) = 0$, entonces $y(0)$ es un punto de equilibrio y $y(t) = y(0)$ para toda t.
- Si $f(y(0)) > 0$, entonces $y(t)$ es creciente para toda t y $y(t) \to \infty$, cuando t se incrementa, o bien $y(t)$ tiende al primer punto de equilibrio mayor que $y(0)$.
- Si $f(y(0)) < 0$, entonces $y(t)$ es decreciente para toda t y $y(t) \to -\infty$, cuando t se incrementa, o bien $y(t)$ tiende al primer punto de equilibrio menor que $y(0)$.

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 2 \qquad\qquad \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$$

Ejemplo 2

Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = \left(1 - \frac{P}{20}\right)^3 \left(\frac{P}{5} - 1\right) P^7$$

Si la condición inicial está dada por P(0) = 8, ¿qué sucede cuando t se vuelve muy grande?.

Respuesta:

Los puntos de equilibrio son: P = 0, P = 5 y P = 20.

Si 0 < P < 5, f(P) es negativa; luego P es decreciente en $]0,5[$

Si P < 0 o 5 < P < 20, f(P) es positiva; luego P es creciente en $]-\infty,0[\;\; y \;\;]5,20[$

Si P > 20, f(P) es negativa, luego P es decreciente en $]20,+\infty[$.

Cuando $t \to \infty$, P(t) tiende hacia el punto de equilibrio P = 20.

Cuando $t \to -\infty$, la solución con condición inicial P(0) = 8 decrece hacia el siguiente punto de equilibrio más pequeño, que es P = 5. Por consiguiente, P(t) es siempre mayor que P = 5.

Gráfico 11

Línea de fase para $dP/dt = f(P) = (1 - P/20)^3((P/5) - 1)P^7$

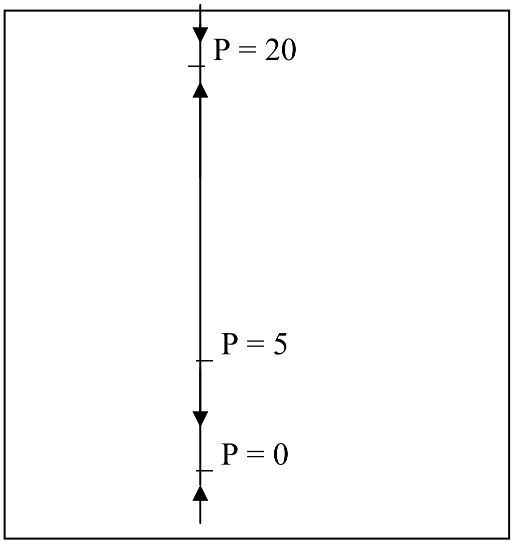
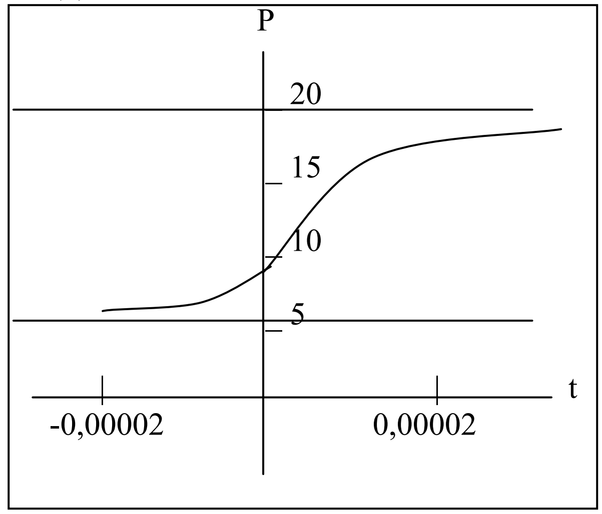


Gráfico 12

Gráfica de la solución al problema de valor inicial $dP/dt = (1 - P/20)^3((P/5)-1)\,P^7$, $P(0) = 8$.



Clasificación de los puntos de equilibrio

Si y_0 es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial autónoma $dy/dt = f(y)$, entonces se tiene:

Sumidero asintóticamente estable: si cualquier solución cercana a y_0 se acerca a y_0 en forma asintótica cuando $t \to \infty$.

Fuente: si cualquier solución cercana a y_0 se aleja de y_0 cuando $t \to \infty$.

Nodo: Si y_0 no es sumidero ni fuente.

Gráfico 13

Ejemplos de puntos nodales de equilibrio y gráficas de soluciones cercanas.

SUMIDERO	FUENTE	NODO
equilibrio estable	equilibrio inestable	equilibrio semiestable
$f'(y_0) < 0$	$f'(y_0) > 0$	$f'(y_0) = 0$ $f''(y_0) \neq 0$

Ejemplo

Dada una ecuación diferencial, clasificar los puntos de equilibrio como sumideros, fuentes o nodos, a partir de la línea de fase.

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = y^2 + y - 6 = (y+3)(y-2)}$$

Respuesta:

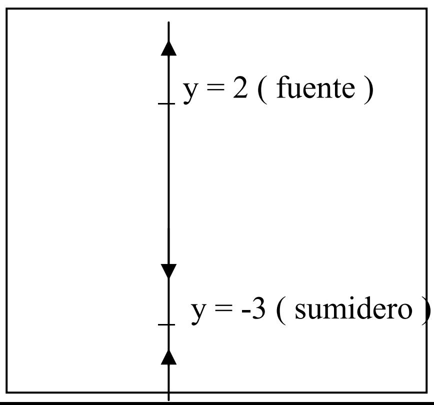
Los puntos de equilibrio son $y = -3$ y $y = 2$.

$dy/dt < 0$ para $-3 < y < 2$ y $dy/dt > 0$ para $y < -3$ y $y > 2$.

Con esta información podemos dibujar la línea de fase, y en ésta vemos que $y = -3$ es un sumidero y $y = 2$ es una fuente.

Gráfico 14

Línea de fase para $dy/dt = y^2 + y - 6$.



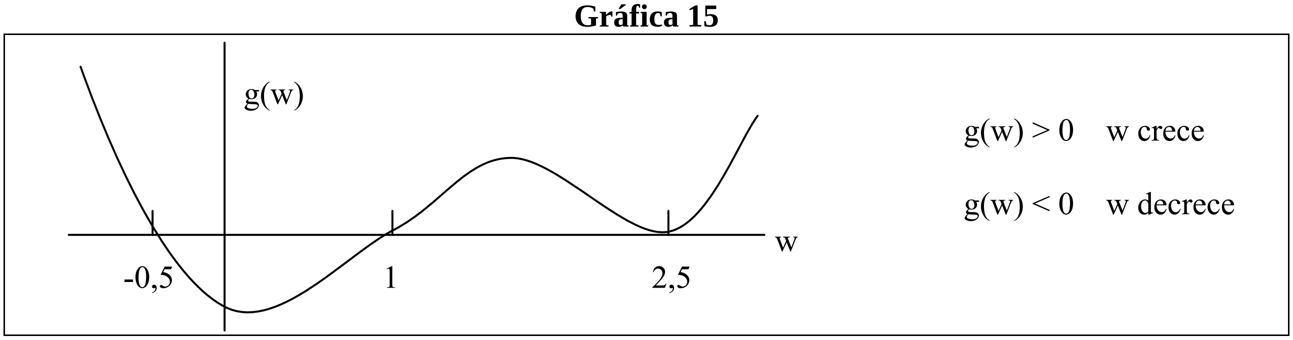
Observación:

Supongamos que nos dan una ecuación diferencial $dw/dt = g(w)$, donde $g(w)$ está especificado en términos de una gráfica y no en términos de una fórmula. Podemos aún entonces esbozar la línea de fase. El gráfico de g(w) se llama diagrama de fase o plano fase de la ecuación diferencial $dw/dt = g(w)$.

Ejemplo

Sea $g(w)$ la gráfica siguiente

Gráfica 15

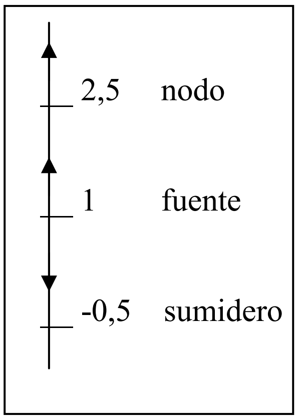


La ecuación diferencial correspondiente tiene tres puntos de equilibrio: $w = -0.5$, $w = 1$ y $w = 2.5$

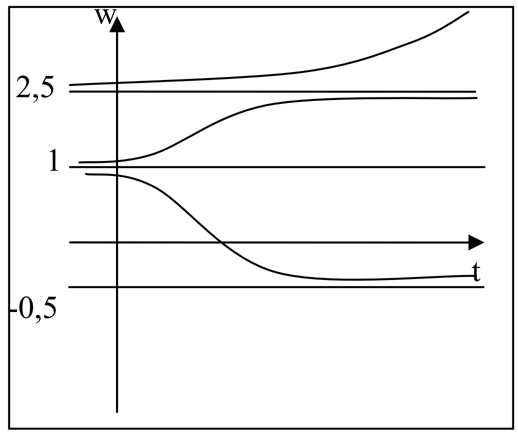
$g(w) > 0$ si $w < -0.5$, $1 < w < 2.5$ y $w > 2.5$.
$g(w) < 0$ si $-0.5 < w < 1$.

Usando esta información podemos dibujar la línea de fase y clasificar los puntos de equilibrio. El punto $w = -0.5$ es un sumidero, el punto $w = 1$ es una fuente y el punto $w = 2.5$ es un nodo.

Gráfica 16
Línea de fase para la ec. dif. $dw/dt = g(w)$



Gráfica 17
Retrato de Fase



<u>Estabilidad de una solución de equilibrio de una ecuación diferencial de primer orden.</u>

<u>Definición:</u> Sea x_e una solución de equilibrio de la ecuación diferencial $\boxed{\frac{df}{dx} = f(x)}$

Esta solución de equilibrio puede ser estable o inestable:

a) Un equilibrio x_e es estable si todas las soluciones que comienzan cerca de x_e, se quedan cerca de x_e. Es decir, x_e es estable si $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que $\forall$ x, $|x - x_e| < \delta \Rightarrow |x(t, x_e) - x_e| < \varepsilon$, $\forall\ t \geq 0$
b) Un equilibrio x_e es inestable si mientras más cerca de x_e comience la solución, se queda más lejos de $x = x_e$.
c) Un equilibrio x_e es asintóticamente estable si el equilibrio es estable y además la solución se acerca al equilibrio para todas las condiciones iniciales cercanas, es decir x(t) ---> x_e, cuando t ---> $+\infty$. Es decir, x_e es asintóticamente estable si es estable y además $\exists$ r > 0, tal que $|x(t,x_e) - x_e| > 0$

<u>Observación:</u>

Dada la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = f(x)$, y sea x_e un equilibrio de ella. Luego $f(x_e) = 0$.

Si x está cerca de x_e, entonces $\frac{dx}{dt} = f(x_e) + (x - x_e) f'(x_e)$, por teorema del valor medio,

$$f'(x_e) = \frac{f(x) - f(x_e)}{x - x_e} \Rightarrow f(x) = f(x_e) + (x - x_e) f'(x_e) = \frac{dx}{dt}.$$ Como $f(x_e) = 0$

$\therefore \boxed{\dfrac{dx}{dt} = (x - x_e) f'(x_e)}. \Rightarrow \dfrac{dx}{x - x_e} = f'(x_e)dt \Rightarrow \ln|x - x_e| = f'(x_e)t + c$

Luego, la solución de esta ecuación es $\boxed{x = x_e + c\, e^{f'(x_e)t}}$

Nota: $\boxed{\lim\limits_{x \to x_e} \dfrac{f(x) - f(x_e)}{x - x_e} = f'(x_e)}$

Si $f'(x_e) > 0$, las soluciones se alejan del equilibrio exponencialmente, cuando t --->+∞ y se tiene que x_e es inestable.

Si $f'(x_e) < 0$, las soluciones decaen exponencialmente hacia el equilibrio, cuando t --->+∞ y se dice que el equilibrio x_e es estable. Además, como x(t) ----> x_e, diremos que el equilibrio es asintóticamente estable.

En resumen:

Si x_e es un equilibrio de $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$, entonces:

a) Si $f'(x_e) < 0$, x_e es asintóticamente estable
b) Si $f'(x_e) > 0$, x_e es inestable
c) Si $f'(x_e) = 0$, y $f''(x_e) \neq 0$ $\quad x_e$ es semiestable.

Ejemplo

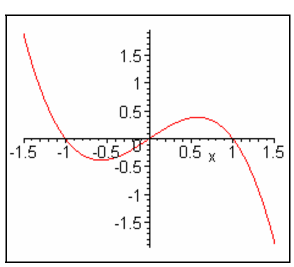
Sea $\dfrac{dx}{dt} = x - x^3$, $f(x) = x(1-x)(1+x)$, luego $f(x) = 0$ implica puntos de equilibrio: 0, 1, -1

$$f'(x) = 1 - 3x^2$$

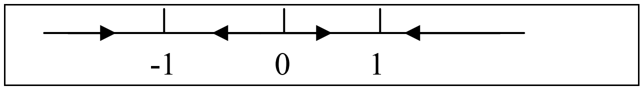
$$\Rightarrow \begin{array}{c} f'(0) = 1 > 0 \\ f'(1) = -2 < 0 \\ f'(-1) = -2 < 0 \end{array}$$

f'(0) > 0, luego x = 0 es inestable
f'(1) < 0, luego x = 1 es asintóticamente estable
f'(-1) < 0, luego x = -1 es asintóticamente estable

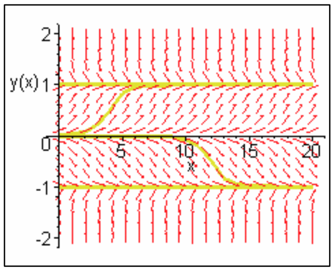
Plano fase de la ecuación diferencial autónoma $\dfrac{dx}{dt} = x - x^3$



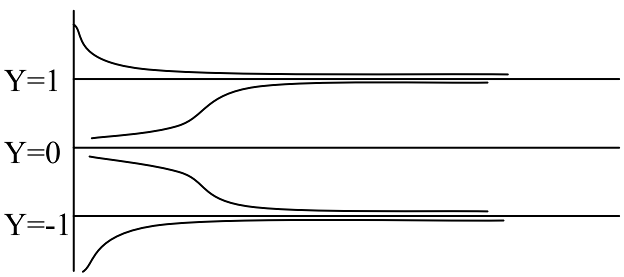
Línea de fase de x(t).



Campo de direcciones de la ecuación diferencial autónoma $\dfrac{dx}{dt} = x - x^3$



Retrato de fase de la ecuación diferencial autónoma $\dfrac{dx}{dt} = x - x^3$

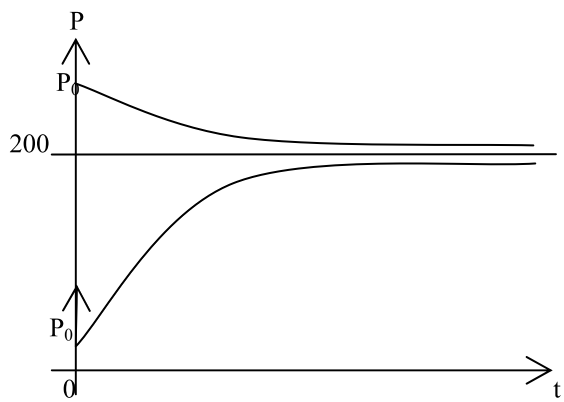


Aplicación del análisis cualitativo a la dinámica poblacional

Ejemplo:
Supongamos que en 1885 la población de cierto país era de 50 millones de habitantes y que estuvo creciendo a razón de 750.000 personas por año en ese tiempo. Suponga también que en 1940 la población era de 100 millones y que entonces el crecimiento era a razón de 1 millón al año. Supongamos que la población satisface la ecuación logística. Determinar la población límite M y la población pronosticada para el año 2000.

Respuesta
Puntos de equilibrio: P = 0, P = M.

Retrato de fase



Bifurcaciones

Ecuaciones con Parámetros
Una ecuación diferencial que depende de un parámetro μ se bifurca cuando hay una variación cualitativa en el comportamiento de las soluciones a partir de una modificación en el parámetro.

Notación:
Una función de la variable dependiente *y*, que también depende de un parámetro μ, se denota por $f_\mu(y)$. La ecuación diferencial correspondiente con variable dependiente y *y* parámetro μ es

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = f_\mu(y)}$$

Llamamos a esta forma una **familia paramétrica** de ecuaciones diferenciales, puesto que en realidad es una colección de ecuaciones distintas, una para cada valor de μ.

Ejemplo:

El modelo de crecimiento exponencial para poblaciones. $\boxed{\frac{dP}{dt} = kP}$

contiene el parámetro k, que es la constante de proporcionalidad para la razón de crecimiento *dP/dt* versus la población total *P*.

Estudiaremos cómo cambian las soluciones de una ecuación diferencial cuando un parámetro es variado. Específicamente estudiaremos ecuaciones autónomas con un parámetro.

Ejercicio

Consideremos la familia paramétrica $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu}$

Para cada valor de μ tenemos una ecuación diferencial autónoma, y podemos dibujar su línea de fase y analizarla usando los procedimientos de la sección previa.

Por ejemplo si escogemos los valores $\mu = -4$, $\mu = -2$, $\mu = 0$, $\mu = 2$ y $\mu = 4$, esto nos da cinco ecuaciones diferenciales autónomas diferentes con cinco líneas de fase diferentes. Una de éstas es

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = f_{-2}(y) = y^2 - 2y - 2.}$$

Esta ecuación diferencial tiene puntos de equilibrio en valores de *y* para los cuales

$$\boxed{f_{-2}(y) = y^2 - 2y - 2 = 0} \qquad y = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Los puntos de equilibrio son $y = 1-\sqrt{3}$ e $y = 1+\sqrt{3}$, y entre ambos, la función f_{-2} es negativa por arriba y debajo de ellos f_{-2} es positiva. Por tanto, $y = 1 - \sqrt{3}$ es un sumidero e $y = 1 + \sqrt{3}$ es una fuente. Con esta información podemos graficar la línea de fase. Para los otros valores de μ se sigue un procedimiento similar y se obtienen las siguientes líneas de fase.

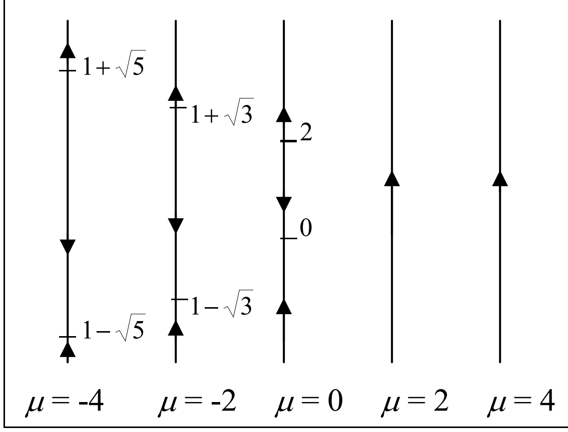


Gráfico 18
Líneas de fase para

$$\frac{dy}{dt} = f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu$$

para $\mu = -4, -2, 0, 2$ y 4.

Cada una de las líneas de fase es algo diferente de las otras. Sin embargo, la descripción básica para $\mu = -4$, $\mu = -2$ y $\mu = 0$ es la misma: hay exactamente dos puntos de equilibrio; el menor es un sumidero y el mayor es una fuente.

Las soluciones con condiciones iniciales muy negativas se aproximan a un punto de equilibrio cuando t crece, y a $-\infty$ cuando t decrece. Y aquellas que poseen valores iniciales entre los puntos de equilibrio, tienden al menor punto de equilibrio cuando t crece y al mayor cuando t decrece.

Si $\mu = 2$ y $\mu = 4$, todas las soluciones tienden a $+\infty$ cuando t crece y a $-\infty$ cuando t decrece. Como hay un cambio importante en la naturaleza de las soluciones, decimos que ha ocurrido una bifurcación en alguna parte entre $\mu = 0$ y $\mu = 2$.

Para investigar la naturaleza de esta bifurcación, dibujamos las gráficas de f_μ para los valores μ anteriores. Para $\mu = -4, -2$ y 0, $f_\mu(y)$ tiene 2 raíces, pero para $\mu = 2$ y 4 la gráfica de $f_\mu(y)$ no cruza el eje y.
En alguna parte entre $\mu = 0$ y $\mu = 2$, la gráfica de $f_\mu(y)$ debe ser tangente al eje y.

Definición:
Llamaremos valor de la bifurcación a los valores de μ tales que $\dfrac{dy}{dt} = f_\mu(y) = 0$.

Nota:
El valor de la bifurcación presenta una variación cualitativa en el comportamiento de las soluciones.

Ejemplo:

Encontrar los valores de bifurcación de la ecuación $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu}$

Respuesta:
Las raíces de la ecuación cuadrática $y^2 - 2y + \mu = 0$ son $y = 1 \pm \sqrt{1-\mu}$.
Si $\mu < 1$, esta cuadrática tiene dos raíces reales;
Si $\mu = 1$, tiene una sola raíz
Si $\mu > 1$, no posee raíces reales.

$\therefore$ Las ecuaciones diferenciales correspondientes cuentan con:
dos puntos de equilibrio si $\mu < 1$,
un punto de equilibrio si $\mu = 1$
ningún punto de equilibrio si $\mu > 1$.

Luego, la naturaleza cualitativa de las líneas de fase cambia cuando $\boxed{\mu = 1}$. Decimos que ocurre una bifurcación en $\mu = 1$ y que éste es un **valor de bifurcación**.

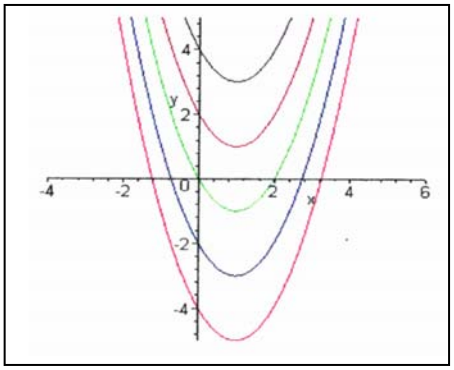


Gráfico 19
Gráficas de $f_{\mu}(y) = y^2 - 2y + \mu$
μ = -4, -2, 0, 2 y 4

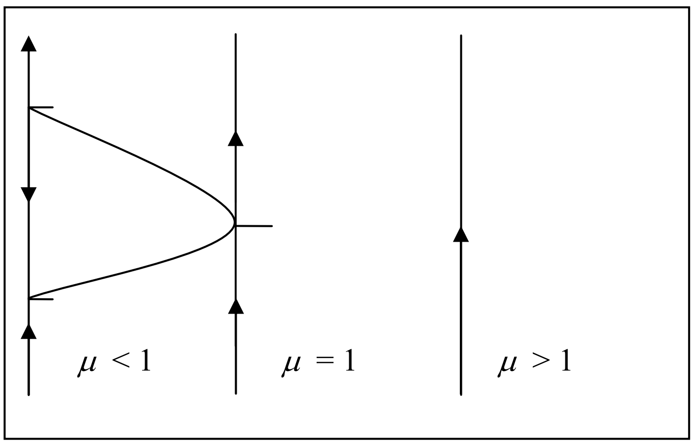


Gráfico 20
Líneas de fase correspondientes
Para dy/dt = $f_{\mu}(y) = y^2 - 2y + \mu$.

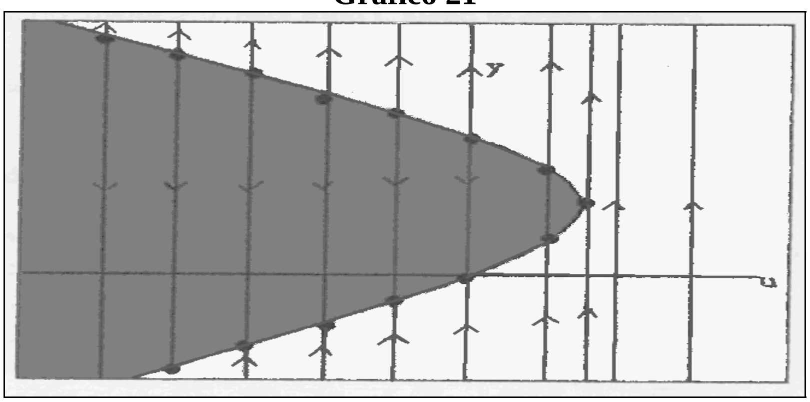
<u>El diagrama de bifurcación</u>
Este diagrama es una gráfica (en el plano μ - y) de las líneas de fase cercanas a un valor de bifurcación, que permite ver claramente los cambios experimentados por las líneas de fase, cuando el parámetro pasa por este valor.

Procedimiento para determinar el diagrama de bifurcación

1) Determine los valores de bifurcación haciendo $f_{\mu}(y) = 0$
2) Considere valores de μ ligeramente inferiores y ligeramente superiores a cada valores de bifurcación.
3) Para trazar el diagrama de bifurcación, graficamos los valores del parámetro a lo largo del eje horizontal.
4) Para cada valor μ dibujamos la línea de fase correspondiente a μ sobre la línea vertical por μ.

Nota:
Podemos imaginar este diagrama como una película: conforme nuestro ojo barre la imagen de izquierda a derecha, vemos evolucionar las líneas de fase a través de la bifurcación.

Gráfico 21



Ejercicios propuestos

I) Esbozar la línea de fase para las siguientes ecuaciones diferenciales e identificar los puntos de equilibrio:

1) $\dfrac{dy}{dt} = 3y(1-y)$ 2) $\dfrac{dy}{dt} = \cos y$

3) $\dfrac{dw}{dt} = (w-2)\,\mathrm{sen}\, w$ 4) $\dfrac{dw}{dt} = w^2 + 2w + 10$

II) En los ejercicios 5-8 se da una ecuación diferencial y se especifican varias condiciones iniciales. Graficar las soluciones que satisfacen estas condiciones:

5) Ecuación del ejercicio 1; $y(0) = 1$, $y(2) = -1$, $y(0) = 1/2$, $y(0) = 2$.

6) Ecuación del ejercicio 2; y(0) = 0, y(-1) = 1, y(0) = $-\pi/2$, y(0) = π .

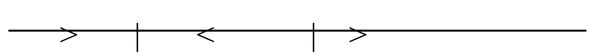
7) Ecuación del ejercicio 3; $w(0) = 1$, $w(0) = 7/4$, $w(0) = -1$, $w(0) = 3$

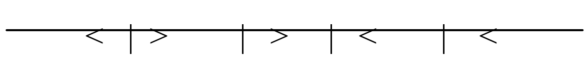
8) Ecuación del ejercicio 4; $w(0) = 0$, $w(1/2) = 1$, $w(0) = 2$.

III) En los ejercicios 9-11 describa el comportamiento a largo plazo de la solución de la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dt} = y^2 - 4y + 2$ con la condición inicial dada

9) $y(0) = 1$ 10) $y(0) = -10$ 11) $y(3) = 1$

IV) En los ejercicios 12-13 se muestra una línea de fase para una ecuación autónoma *dy/dt* = *f*(*y*). Haga un bosquejo de la gráfica de la función f(y). Suponga que y = 0 está a la mitad del segmento.

12) 

13) 

14) Suponga que desea modelar una población con una ecuación diferencial de la forma *dP/dt* = *f*(*P*), donde *P*(*t*) es la población en el tiempo *t*. Se han efectuado experimentos que dan la información siguiente:

- Los únicos puntos de equilibrio en la población son $P = 0$, $P = 10$ y $P = 50$.
- Si la población decrece es 100, la población decrece.
- Si la población es 25, la población aumenta.

a) Esboce las posibles líneas de fase para este sistema para $P > 0$ (hay dos).
b) Haga un croquis aproximado de las correspondientes funciones *f*(*P*) para cada una de sus líneas de fase.
c) Dé una fórmula para las funciones *f*(*P*) cuyas gráficas concuerden (cualitativamente) con las del inciso (b) para cada una de sus líneas de fase.

15) Sea $f(y)$ una función continua.

a) Suponga que $f(-10) > 0$ y $f(10) < 0$. Demuestre que hay un punto de equilibrio para $dy/dt = f(y)$ entre $y = -10$ y $y = 10$.
b) Considere que $f(-10) > 0$, que $f(10) < 0$ y que hay muchos puntos de equilibrio finitos entre $y = -10$ y $y = 10$. Si $y = 1$ es una fuente, demuestre que $dy/dt = f(y)$ debe tener por lo menos dos sumideros entre $y = -10$ y $y = 10$. (¿Puede usted decir dónde están localizados?)

16) a) Esboce la línea de fase para la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(y-2)(y+1)}$$

y analice el comportamiento de la solución con la condición inicial $y(0) = 1/2$.

b) Aplique procedimientos analíticos al problema del valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(y-2)(y+1)}, y(0) = \frac{1}{2},$$

y compare sus resultados con su análisis en el inciso (a).

17) En los ejercicios 1- 4, localice los valores de bifurcación para la familia paramétrica y dibuje las líneas de fase para valores del parámetro ligeramente menores que, ligeramente mayores que, y en el valor de la bifurcación.

1) $\dfrac{dy}{dt} = y^2 + a$

2) $\dfrac{dy}{dt} = y^2 + ay + 1$

3) Para la familia paramétrica.

4) Considere el modelo de población

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{P^2}{50} + 2P,$$

para una especie de pez en un lago. Suponga que las autoridades han decidido permitir la pesca, pero no es claro cuántas licencias de pescar se autorizarán. Suponga que con licencia, una persona pescará en promedio 3 peces por año.

a) ¿Cuál es el mayor número de licencias que pueden autorizarse para que los peces tengan oportunidad de sobrevivir en el lago?
b) Suponga que se emiten el número de licencias de pescar determinado en el inciso a)¿Qué pasará a la población de peces, es decir, cómo se comporta la población actual con respecto de la población inicial?
c) El simple modelo de población anterior puede verse como el de una población ideal de peces que no está sometida a los problemas ambientales de un lago real. Para la población real de peces habrá cambios ocasionales en la población que no se consideraron cuando se construyó este modelo. Por ejemplo, si el nivel del agua aumenta debido a una fuerte lluvia, unos cuantos peces adicionales podrían ser capaces de nadar debajo de una corriente usualmente seca para alcanzar el lago, o bien, el agua adicional podría llevar a éste materia tóxica, matando algunos peces. Dada la posibilidad de perturbaciones

inesperadas de la población no incluida en el modelo, ¿qué cree usted que pasará a la población real de peces si se permite la pesca al nivel determinado en el inciso (b)?

18) En la ecuación diferencial que modela poblaciones de peces con recolección,

$$\frac{dP}{dt} = f_C(P) = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right) - C,$$

vemos que si $C > kN/4$ la población de peces se extinguirá. Si dicha población llega casi a cero debido a que el nivel C de pesca es ligeramente mayor que $kN/4$, ¿por qué debe implementarse el veto para que la población se recupere?. Es decir, si un nivel de pesca justamente arriba de $C = kN/4$ ocasiona un colapso de la población, ¿por qué no puede ser restituida la población reduciendo el nivel de pesca justamente abajo de $C = kN/4$?.

NOTA 1:
Definimos el índice de un punto de equilibrio para una ecuación para una ecuación diferencial autónoma. Una fuente tiene índice + 1, un sumidero tiene índice –1 y los nodos índice 0. Considere la familia paramétrica de ecuaciones diferenciales $dy/dt = f_\alpha(y)$, donde f depende continuamente de α y y. En los ejercicios 6-7 suponemos que esta ecuación diferencial tiene un número finito de puntos de equilibrio en el intervalo $0 \le y \le 1$ para toda α.

19) Supongamos que para $\alpha = 0$, la suma de los índices de los puntos de equilibrio en el intervalo $0 \le y \le 1$ es –1. Si $f_\alpha(0) \ne 0 y f_\alpha(1) \ne 0$ para toda α, demuestre que $dy/dt = f_\alpha(y)$ debe tener por lo menos un sumidero en $0 \le y \le 1$ para toda α.

20) Supongamos que para $\alpha = 0$, la suma de los índices de los puntos de equilibrio en el intervalo $0 \le y \le 1$ es 0. Si para cada α, $f_\alpha(0) > 0$ y $f_\alpha(1) \ne 0$, demuestre que existe un número positivo M_α que depende de α y que $dy/dt = f_\alpha(y) + M_\alpha$ no tiene puntos de equilibrio en el intervalo $0 \le y \le 1$.

NOTA 2:
Suponga que n es un entero positivo par. Entonces, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^n,$$

tiene un nodo en $y = 0$ y ningún otro punto de equilibrio. Podría antojarse clasificar todas bifurcaciones diferentes que pueden ocurrir.

21) Para la familia paramétrica

$$\frac{dy}{dt} = y^4 + \alpha y^2,$$

¿cuántos puntos de equilibrio están próximos a $y = 0$ si α es ligeramente mayor que cero?. ¿Cuántos hay si α es ligeramente menor que cero?.

UNIDAD 5: ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN N.

Forma general

$$\boxed{a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + - - - + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x)}$$

si a_i son constantes $\forall_i$, la ecuación se llama ecuación diferencial lineal con coeficientes constante. En caso contrario ecuación diferencial lineal de coeficientes variables.

Ejemplos

$3y''' + 2y'' - 4y' + 8y = 3e^{-x} - 5x^2$ ec. diferencial lineal con coeficientes constantes, de orden 3

$xy'' - 2y' + x^2 y = x^3 - 2$ ec. diferencial lineal con coeficiente variables, de orden 2.

Usando los operadores : $D, D^2, D^3, \ldots$, donde $Dy = \dfrac{dy}{dx}$, $D^2y = \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots$

Anotaremos

$\boxed{a_o D^n y + a_1 D^{n-1} y + --- + a_{n-1} Dy + a_n y = F}$ o bien $(a_o D^n + a_1 D^{n-1} + --- + a_{n-1} D + a_n)\, y = F$

Si $\phi(D) = a_o D^n + a_1 D^{n-1} + --- + a_n$, anotaremos $\boxed{\phi(D)\, y = F}$

Propiedades de los operadores

1) $D^n(u+v) = D^n(u) + D^n(v)$, u,v funciones diferenciables
2) $D^n(\alpha u) = \alpha D^n(u)$, α = constante
3) $\phi(D)(u+v) = \phi(D)(u) + \phi(D)(v)$
4) $\phi(D)(\alpha u) = \alpha\, \phi(D)\, u$, α = constante

$\therefore D^n$ y $\phi(D)$ son operadores lineales

Definición :

Sea $\boxed{\phi(D)\, y = F(x) \quad , \quad F(x) \neq 0}$ ecuación diferencial general de orden n.

Se puede asociar con la ecuación $\boxed{\phi(D)\, y = 0}$ llamada ecuación complementaria o ecuación homogénea de la ecuación diferencial lineal general.

Teorema fundamental I

Si $y = u(x)$ es cualquier solución de la ecuación $\phi(D)\, y = F(x)$ e $y = v(x)$ es cualquier solución de la ecuación $\phi(D)\, y = 0$, entonces $y = u(x) + v(x)$ es solución de la ecuación $\phi(D)\, y = F(x)$.

Si v(x) tiene n constantes arbitrarias, donde n es el orden de la ecuación, entonces es la solución general de la ecuación complementaria.

Si u(x) no tiene constantes arbitrarias, es una solución particular de $\phi(D)\, y = F(x)$.

Definición : Solución complementaria de la ecuación ϕ (D) y = F(x)
Corresponde a la solución general de la ecuación complementaria y la denotaremos por y_c.

Definición : Solución particular de la ecuación ϕ (D) y = F(x)
Es una solución seleccionada de la ec. dada (sin constantes arbitrarias) y la denotaremos por y_p

Teorema fundamental II
La solución general de la ecuación diferencial ϕ (D) y = F(x) viene dada por $\boxed{y = y_c + y_p}$

Teorema de existencia – unicidad
Si a_i (x) y F(x) son funciones continuas en [a, b] y $a_o(x) \neq 0$ y p_o, …., p_n, son constantes dadas.
Entonces $\exists!$ solución y(x), tal que $[a_o(x) D^n + a_1(x) D^{n-1} + \ldots + a_n(x)]\, y = F(x)$, cumple las condiciones $y(c) = p_o$, $y'(c) = p_1$, ….., $y^{(n-1)}(c) = p_n$, $c \in [a, b]$

Nota: El teorema proporciona sólo condiciones suficientes, es decir, aún si las condiciones enunciadas no se satisfacen todas, pueden existir soluciones únicas.

Solución general de la ecuación complementaria de una ecuación diferencial de coeficientes constantes
Considerar una ecuación auxiliar, que se obtiene al reemplazar el operador D por m en la ecuación diferencial, se obtiene un polinomio en m y se calculan sus raíces. Se pueden presentar tres casos.

Caso 1: Raíces reales distintas
Si $m_1, m_2, \ldots, m_k$ son raíces reales distintas de la ecuación auxiliar en m, entonces $\boxed{y_1 = e^{m_1 x},\ \ y_2 = e^{m_2 x} \ldots\ldots\ldots y_n = e^{m_n x}}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial complementaria ϕ (D) y = 0, y también $\boxed{y = c_1\, e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + c_k e^{m_k x}}$ es solución de la ecuación complementaria.

Si la ecuación diferencial es de orden n y se obtiene n raíces reales distintas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, entonces $y = c_1 e^{m_1 x} + \ldots\ldots\ldots + c_n e^{m_n x}$ es la solución general de la ecuación complementaria, es decir, es la solución complementaria.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $\boxed{y'' - 3y' + 2y = 0}$

Solución:

$m^2 - 3m + 2 = 0$

$(m-1)(m-2) = 0 \Rightarrow m = 1 \quad \vee \quad m = 2 \Rightarrow y = e^x$, $y = e^{2x}$ sea solución

$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ es la solución general.

2) $\boxed{y''' - 6y'' + 11 y' - 6y = 0}$

Solución:

$m^3 - 6m^2 + 11 m - 6 = 0$

$(m - 1)(m - 2)(m - 3) = 0 \Rightarrow m = 1, 2, 3.$

$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ es la solución general.

Caso 2: Raíces reales iguales

Si la ecuación auxiliar tiene m_k como raíz con multiplicidad k, entonces $\boxed{y_1 = e^{m_1 x},\ \ y_2 = xe^{m_2 x} ....y_k = x^{k-1} e^{m_k x}}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial complementaria ϕ (D) y = 0, y también $\boxed{y = (c_1 + c_2 x + ... + c_k x^{k-1}) e^{m_k x}}$ es solución de la ecuación diferencial.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $\boxed{(D^2 - 6D + 9)y = 0}$

Solución:

$m^2 - 6 m + 9 = 0$, luego $(m - 3)^2 = 0$, es decir m = 3 con multiplicidad 2.

$\therefore\ y = (c_1 + c_2 x) e^{3x}$ solución general.

2) $\boxed{(D^3 - 6D^2 + 12 D - 8)y = 0}$

Solución:

$m^3 - 6m^2 + 12 m - 8 = 0$, luego $(m - 2)^3 = 0$, es decir m = 2, con multiplicidad 3.

$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{2x}$ es la solución general.

3) $\boxed{(D^6 - 6D^5 + 12 D^4 - 6D^3 - 9D^2 + 12D - 4)\ y = 0}$

Solución:

$m^6 - 6m^5 + 12m^4 - 6m^3 - 9m^2 + 12m - 4 = 0$

$(m - 1)^3 (m - 2)^2 (m + 1) = 0$

$\therefore$ m = 1 con multiplicidad 3

m = 2 con multiplicidad 2

m = - 1 con multiplicidad 1

$\therefore\ y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x + (c_4 + c_5 x) e^{2x} + (c_6 e^{-x})$ es la solución general.

Caso 3: Raíces complejas

Si la ecuación auxiliar presenta raíces complejas conjugadas, de la forma: $m_1 = a + ib$, $m_2 = a - ib$, entonces una solución de la ecuación diferencial es

$$\boxed{y = e^{ax}\ [c_1 \text{ sen } (b\,x) + c_2 \cos (b\,x)]}$$

pues $e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax} (\cos b\,x + i \text{ sen } bx)$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Nota: $e^{ibx} = 1 + \dfrac{ibx}{1!} + \dfrac{(ibx)^2}{2!} + \dfrac{(ibx)^3}{3!} + \ldots. = 1 + ibx - \dfrac{b^2x^2}{2!} - \dfrac{ib^3x^3}{3!} + \ldots.$

$$e^{ibx} = \left[1 - \frac{b^2x^2}{2!} + \ldots.\right] + i\left[bx - \frac{b^3x^3}{3!} + \ldots.\right] = \cos(bx) + i sen(bx)$$

$y_1 = e^{ax} \cos(bx)$ $\quad y_2 = e^{ax} \text{ sen}(bx)$ $\quad$ son soluciones independientes

Ejemplos

1) $\boxed{(D^2 + 2D + 5)\ y = 0}$

$m^2 + 2m + 5 = 0$

$m = -1 \pm 2i$

$y = e^{-x} [c_1 \text{ sen } 2x + c_2 \cos 2x]$

2) $\boxed{(D^4 - 5D^2 + 12\,D + 28)\ y = 0}$

$m^4 - 5m^2 + 12\,m + 28 = 0$

raíces : -2 , -2, $2 \pm \sqrt{3}\ i$

$y = (c_1 + c_2x)\, e^{-2x} + e^{2x}\ (c_3 \text{ sen} \sqrt{3}\ x + c_4 \cos \sqrt{3}\ x)$

3) $\boxed{(D^2 - 2D + 5)^2\ \ y = 0}$

$(m^2 - 2\,m + 5)^2 = 0$

$m^2 - 2m + 5 = 0 \ \Rightarrow\ m = 1 \pm 2i$ $\quad$ con multiplicidad 2.

$\therefore \quad y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \text{ sen } 2x) + x\, e^x (c_3 \cos 2x + c_4 \text{ sen } 2x).$

Nota:

$m^2 - 2m + 5 = 0 \ \Rightarrow m = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \dfrac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$

Ejercicios propuestos:

1. Encuentre las soluciones generales de cada una de las siguientes ecuaciones:
a) $y'' + 4y' - 5y = 0$ b) $(4D^2 - 25)y = 0$ c) $y'' = 4y$
d) $2y''' - 5y'' + 2y' = 0$ e) $I''(t) - 4I'(t) + 2I(t) = 0$ f) $(D^3 + 2D^2 - 5D - 6)y = 0$

2. Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas.
a) $y'' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$ b) $(D^2 - 3D + 2)y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$
c) $(D^3 - 16D)y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 16$

3. Encuentre las soluciones generales de cada una de las siguientes ecuaciones:
a) $(D^2 - 4D + 4)y = 0$ b) $16y'' - 8y' + y = 0$ c) $4I''(t) - 12I'(t) + 9I(t) = 0$
d) $(D^6 - 4D^4)y = 0$ e) $(D^4 - 2D^3 + D^2)y = 0$ f) $4y^{(IV)} - 20y'' + 25y = 0$

4. Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas:
a) $(D^2 - 2D + 1)y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$
b) $(D^3 - D^2)y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$
c) $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -16\dfrac{ds}{dt} - 64s$; $s = 0$, $\dfrac{ds}{dt} = -4$ *donde* $t = 0$

5. Encuentre la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones:
a) $y'' + 4y = 0$ b) $(D^2 + 4D + 5)y = 0$ c) $4\dfrac{d^2s}{dt^2} = -9s$
d) $4y'' - 8y' + 7y = 0$ e) $y^{(IV)} = -16y''$ f) $(D^3 + D^2 - 2)y = 0$

6. Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas.
a) $(D^2 + 1)y = 0$; $y(0)=4$, $y'(0)=0$ b) $U''(t) = -16U(t)$; $U(0)=0$, $U'(0) = 4$
c) $I''(t) + 2I'(t) + 5I(t) = 0$; $I(0) = 2$, $I'(0) = 0$

Independencia lineal y Wronskianos

Definición: Llamaremos wronskiano de las funciones y_1 e y_2 al determinante:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$$

Teorema 1

Sean y_1, y_2 dos soluciones de la ecuación diferencial

$$(a_o D^2 + a_1 D + a_2)\, y = 0$$

$a_o \neq 0$, a_1, a_2 funciones continuas de x en algún intervalo. Entonces

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_o(x)}dx} \quad \text{(identidad de Abel)}$$

Teorema 2

Sean y_1 , y_2 soluciones de la ecuación diferencial
$(a_o D^2 + a_1 D + a_2)\, y = 0$ en algún intervalo I. Entonces

a) y_1, y_2 son linealmente dependientes (l.d.) en I $\Leftrightarrow$ $W(y_1, y_2) = 0$ en I.
b) y_1, y_2 son linealmente independiente (l.i.) en I $\Leftrightarrow$ $W(y_1, y_2) \neq 0$ en I.

Teorema 3

Sea y_1 una solución de la ecuación diferencial $(a_o D^2 + a_1 D + a_2)\, y = 0$.
Entonces una solución l. i con y_1 está dada por

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_o}dx}}{y_1^2}dx$$

Nota

Este teorema permite determinar una solución y_2 conocida otra solución y_1.

Ejemplo

Encontrar la solución general de $x^2 y'' + xy' - y = 0$, si se sabe que $y = x$ es una solución de la ecuación diferencial.

Respuesta

$a_o = x^2$, $a_1 = x$, $y_1 = x$

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{-\ln x}}{x^2} = x\int \frac{x^{-1}}{x^2}dx = x\int x^{-3}dx = x\frac{x^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2x}$$

$$\therefore \quad y = c_1 x + c_2 \cdot \frac{1}{x} \quad \wedge \quad w(y_1 , y_2) = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & \frac{-1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{-2}{x} \neq 0, \forall x$$

Teorema 4

Si y_1 , y_2 son soluciones l.i. de la ecuación diferencial $(a_oD^2 + a_1 D + a_2)y = 0$ e y_p es una solución particular de $(a_0 D^2 + a_1 D + a_2) y = F(x)$, entonces $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ es una solución de la ecuación complementaria e $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$ es una solución de la ecuación general.

Nota

Los teoremas anteriores se pueden generalizar al caso de n funciones y ecuación diferencial de orden n.

$$\boxed{(a_o D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n) y = 0} \quad (*)$$

1) $w (y_1 ,\ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y'_1 & \ldots & y'_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$

2) $w (y_1,\ldots, y_n) = c \; e^{-\int \frac{a_1}{a_o} dx}$ identidad de Abel.

3) $y_1 ,\ldots, y_n$ son l.d. en I $\Leftrightarrow$ $w = 0$ en I.
$y_1 ,\ldots, y_n$ son l.i. en I $\Leftrightarrow$ $w \neq 0$ en I.

4) Si $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones l.i. de la ecuación diferencial $(*)$ e y_p es una solución particular de la ecuación general $(a_o D^n + \ldots + a_n) y = F(x)$ entonces $y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$ es una solución de la ecuación diferencial $(*)$ e $y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n + y_p$ es una solución de la ecuación diferencial general.

Ejercicio:

Determine si las siguientes funciones son linealmente independientes

a) $x + 2$, $2x - 3$	$w = 7 \neq 0$ l.i.
b) $\text{sen}^2 x$, $\cos^2 x$, 2	$w = 0$ l.d.
c) $1, x, x^2, x^3$.	$w = 12 \neq 0$ l.i.

Solución particular de la ecuación diferencial ϕ (D)y = F(x).

Método de los coeficientes indeterminados

Se aplica a la ecuación diferencial $\phi(D)y = F(x)$, donde F(x) contiene un polinomio, términos de la forma sen(rx), cos(rx), e^{rx} , donde r es constante o combinaciones de sumas y productos de estos.

Caso a : si F(x) contiene la forma e^{rx}

Se trata de buscar una función ***y*** cuya derivada n-ésima produzca F(x). Luego $\boxed{y_p = a\, e^{rx}}$

Ejemplo:

Resolver $y'' + 4y = 4\, e^{2x}$

Respuesta:

Sea $y = a\, e^{2x}$ una posible solución

$y' = 2a\, e^{2x}$

$y'' = 4a\, e^{2x}$

reemplazando en la ecuación, se tiene

$4a\, e^{2x} + 4a\, e^{2x} = 4\, e^{2x}$,

luego $8a\, e^{2x} = 4\, e^{2x}$,

$\therefore \quad a = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \boxed{y_p = \frac{1}{2} e^{2x}}$ es la solución particular.

La ecuación complementaria $y'' + 4y = 0$ tiene solución general $\boxed{y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x}$

En efecto: $m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \pm\ 2i$ raíces complejas conjugadas.

$\therefore$ la solución general de la ecuación dada es $\boxed{y = y_c + y_p = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{e^{2x}}{2}}$

Caso b : si F(x) contiene la forma sen(rx) o cos(rx)

Se trata de buscar una función ***y*** cuya derivada n-ésima produzca sen(rx) o cos(rx).

Luego

$\boxed{y_p = a \operatorname{sen}(rx) + b \cos(rx)}$

Ejemplo:

Resolver $(D^2 + 4D + 4)\, y = 6 \operatorname{sen}(3x)$

Respuesta:

Sea $y_p = a \operatorname{sen}(3x) + b \cos(3x)$

$y_p' = 3a \cos(3x) - 3b \operatorname{sen}(3x)$

$y_p'' = -9a \operatorname{sen}(3x) - 9b \cos(3x)$.

Reemplazando en la ecuación dada, se tiene

- 9a sen(3x) – 9b cos(3x) + 4 (3a cos(3x) – 3b sen (3x)) + 4 (a sen(3x) + b cos(3x)) = 6 sen(3x)
(-5a – 12b) sen(3x) + (12a – 5b) cos(3x) = 6 sen(3x).
$\therefore$ (- 5a – 12b) = 6 $\wedge$ (12a – 5b) = 0

Resolviendo el sistema se tiene: $a = \frac{-30}{169}$, $b = \frac{-72}{169}$

$\therefore$ $\boxed{y_p = \frac{-30}{169} \text{ sen } 3x + \frac{-72}{169} \cos 3x}$ solución particular

La ecuación complementaria $(D^2 + 4D + 4)y = 0$ tiene solución general $\boxed{y_c = (c_1 + c_2 x) e^{-2x}}$

En efecto: $m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow (m + 2)^2 = 0 \Rightarrow m = -2$ con multiplicidad 2.

$\therefore$ la solución general de la ecuación dada es :

$$\boxed{y = y_c + y_p = (c_1 + c_2 x) e^{-2x} + \frac{-30}{169} \text{ sen } 3x + \frac{-72}{169} \cos 3x}$$

Caso c: si F(x) contiene la forma de un polinomio de grado n.
Se trata de buscar una función ***y***, cuya derivada n-ésima produzca F(x).
Luego $\boxed{y_p = a_n x^n + \ldots.. + a_o}$

Ejemplo:
Resolver $(D^2 + 4D + 9)y = x^2 + 3x$.
Respuesta:

Sea
$$\begin{array}{|l} y = ax^2 + bx + c \\ y' = 2ax + b \\ y'' = 2a. \end{array}$$

Reemplazando en la ecuación dada, se tiene: $2a + 8ax + 4b + 9ax^2 + 9bx + 9c = x^2 + 3x$.
Resolviendo el sistema se tiene:
$$\begin{array}{l|} 9a = 1 \\ 8a + 9b = 3 \\ 2a + 4b + 9c = 0 \end{array}$$

Luego: $a = \frac{1}{9}, b = \frac{19}{81}, c = \frac{-94}{729}$

$\therefore$ $\boxed{y_p = \frac{1}{9}x^2 + \frac{19}{81}x - \frac{94}{729}}$ solución particular

La ecuación complementaria $(D^2 + 4D + 9)\, y = 0$ tiene solución general
$$\boxed{y_c = e^{-2x} (c_1 \cos \sqrt{5}\, x + c_2 \text{ sen } \sqrt{5}\, x)}$$

En efecto:
$m^2 + 4m + 9 = 0 \Rightarrow m = -2 \pm \sqrt{5}\, i$ raíces complejas conjugadas

$\therefore$ la solución general de la ecuación dada es :

$$y = y_c + y_p = e^{-2x}\,(c_1 \cos(\sqrt{5}\, x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{5}\, x)) + \frac{1}{9}x^2 + \frac{19}{81}x - \frac{94}{729}$$

Ejercicio
Resolver $(D^2 + 2D + 1)\, y = 2\cos(2x) + 3x + 2 + 3e^x$
Respuesta:
Sea $\boxed{y_p = a \operatorname{sen}(2x) + b\cos(2x) + cx + d + f e^x}$
$y' = 2a\cos(2x) - 2b \operatorname{sen}(2x) + c + f e^x$
$y'' = 4a \operatorname{sen}(2x) - 4b\cos(2x) + f e^x$

Reemplazando en la ecuación dada.

$(-3a - 4b) \operatorname{sen} 2x + (4a - 3b)\cos 2x + cx + d + 2c + 4 f e^x = 2\cos 2x + 3x + 2 + 3e^x$
$\therefore$ $-3a - 4b = 0$
$4a - 3b = 2$

$$c = 3 \Rightarrow a = \frac{8}{25},\ b = -\frac{6}{25},\ c = 3,\ d = -4,\ f = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \boxed{y_p = \frac{8}{25} \operatorname{sen} 2x - \frac{6}{25}\cos 2x + 3x - 4 + \frac{3}{4}e^x}$$

La ecuación complementaria $(D^2 + 2D + 1)y = 0$ tiene solución general $\boxed{y_c = (c_1 + c_2 x)\, e^{-x}}$

En efecto:
$m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m + 1)^2 = 0 \Rightarrow m = -1$ con multiplicidad 2.

$\therefore$ la solución general de la ecuación dada es :

$$y = y_c + y_p = (c_1 + c_2 x)\, e^{-x} + \frac{8}{25} \operatorname{sen} 2x - \frac{6}{25}\cos 2x + 3x - 4 + \frac{3}{4}e^x$$

El método aniquilador (Justificación al método de los coeficientes indeterminados)

Dada la ecuación diferencial $\phi(D)\, y = F(x)$ se trata de buscar un operador tal que aplicado a la ecuación dada, se obtenga una ecuación con el lado derecho igual a cero. El operador requerido se llama operador de aniquilación o aniquilador.

Ejemplos
1) Resolver $(D^2 + 4)\, y = 4e^{2x}$

Respuesta: $(D^2 + 4)\, y = 4e^{2x}$ / D
$D(D^2 + 4)\, y = 8e^{2x}$

$\therefore$ $\quad 2\,(D^2 + 4)\,y = 8\,e^{2x}$
$D\,(D^2 + 4)\,y = 8\,e^{2x}$

Aniquilador: $(D - 2)$

Restando: $(D - 2)(D^2 + 4)y = 0 \quad * \quad (m - 2)(m^2 + 4) = 0$ ecuación auxiliar
$m = 2,\ m = \pm 2i$

$\boxed{y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + c_3\,e^{2x}}$ solución general de $*$

$y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x \quad , \quad y_p = c_3\,e^{2x}$

Reemplazando y_p en la ecuación dada, se tiene $c_3 = \frac{1}{2}$

2) Resolver $(D^2 + 4D + 4)\,y = 6 \operatorname{sen} 3x$

Respuesta:

Aniquilador: $(D^2 + 9)$

$(D^2 + 9)(D^2 + 4D + 4)\,y = (D^2 + 9)(6 \operatorname{sen} 3x)$
$(D^2 + 9)(D^2 + 4D + 4)\,y = 0$
$(m^2 + 9)(m^2 + 4m) = 0 \Rightarrow m = \pm 3i,\ m = -2$ con multiplicidad 2

$y = (c_1 + c_2 x)\,e^{-2x} + c_3 \operatorname{sen} 3x + c_4 \cos 3x$
$y_p = c_3 \operatorname{sen} 3x + c_4 \cos 3x$

Reemplazando y_p en la ecuación dada.: $c_3 = \frac{-30}{169}$, $c_4 = \frac{-72}{169}$

3) Resolver $(D^2 + 2D + 1)\,y = 2 \cos 2x + 3x + 2 + 3\,e^x$

Respuesta

para $2 \cos 2x$ usamos $D^2 + 4$
para $3x + 2$ usamos D^2
para $3e^x$ usamos $D - 1$

$\therefore\ D^2 (D - 1)(D^2 + 4)(D^2 + 2D + 1)\,y = 0$
$\therefore\ y = (c_1 + c_2 x)\,e^{-x} + c_3 \operatorname{sen} 2x + c_4 \cos 2x + c_5\,e^x + c_6 x + c_7$
$y_p = c_3 \operatorname{sen} 2x + c_4 \cos 2x + c_5\,e^x + c_6 x + c_7$

Reemplazando y_p en la ecuación dada, se tiene

$c_3 = \frac{8}{25} \qquad c_4 = \frac{-6}{25} \qquad c_5 = \frac{3}{4} \qquad c_6 = 3 \qquad c_7 = -4.$

Ejercicios propuestos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $(D^3 + 4D)\,y = e^x + \operatorname{sen} x$

2) $s''(t) - 3s'(t) + 2s(t) = 8t^2 + 12e^{-t}$, $s(o) = 0$, $s'(o) = 2$
3) $y'' + y = 6\cos^2 x$, $y(0) = 0$ y $(\pi/2) = 0$
4) $y'' - 3y' + 2y = 4\,\text{sen}^3 3x$
5) Demuestre el uso del método de aniquilación para
   a) $y'' + y = 2e^{3x}$
   b) $(D^2 + 2D + 1)\,y = 4\,\text{sen}\,2x$
   c) $(D^2 - 4)\,y = 8x^2$

Excepciones en el método de los coeficientes indeterminados

Ejemplo:
Resolver $\boxed{(D^2 + 3D + 2)y = 4e^{-2x}}$
a) Usando el método de los coeficientes indeterminados
b) Usando aniquiladores

Respuesta
a) Usando el método de los coeficientes indeterminados
ecuación auxiliar $m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = -1$, $m = -2$
$\therefore\ y_c = c_1 e^{-ex} + c_2 e^{-x}$
sea $y = a\,e^{-2x}$
$y' = -2a\,e^{-2x}$
$y'' = +4a\,e^{-2x}$
reemplazando
$4a\,e^{-2x} + 3(-2a\,e^{-2x}) + 2ae^{-2x} = 4e^{-2x}$
$4a\,e^{-2x} - 6a\,e^{-2x} + 2ae^{-2x} = 4e^{-2x}$
$0 = 4e^{-2x}$ **contradicción**
Mejor considerar $y = ax\,e^{-2x}$, si $y = a\,e^{-2x}$ está en y_c
$(D^2 + 3D + 2)(ax\,e^{-2x}) = -a\,e^{-2x} = 4e^{-2x} \Rightarrow a = -4$
$\therefore\ y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} - 4x\,e^{-2x}$

b) Por el método de aniquilación
$(D^2 + 3D + 2)\,y = 4e^{-2x}$ / $(D + 2)$
$(D + 2)(D^2 + 3D + 2)\,y = -8e^{-2x} + 8e^{-2x} = 0$
$(m + 2)(m + 2)(m + 1) = 0$
$\Rightarrow\ y = c_1\,e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_3\,x\,e^{-2x}$, $c_3 = -4$

Observación
Si un término de y_p está en y_c, se debe multiplicar el término de y_p por una potencia mínima de x para que esto no ocurra.

Ejercicios
1) Resolver $(D^2 + 4)\,y = 6\,\text{sen}\,2x + 3x^2$
Respuesta :
ecuación auxiliar $m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2i$
$\therefore\ y_c = c_1\cos(2x) + c_2\,\text{sen}(2x)$, $f(x) = 6\,\text{sen}(2x) + 3x^2$
como sen (2x) aparece en y_c.
sea $y_p = x(a\,\text{sen}(2x) + b\cos(2x)) + cx^2 + dx + f$.

$y'_p = (a \text{ sen } (2x) + b \cos (2x)) + x (2a \cos (2x) - 2b \text{ sen } (2x)) + 2cx + d$

$y''_p = 2a \cos(2x) - 2b \text{ sen}(2x) + 2a \cos(2x) - 2b \text{ sen}(2x) + x(-4a \text{ sen}(2x) - 4b \cos(2x)) + 2c$

$= 4a \cos (2x) - 4b \text{ sen } (2x) + x (-4a \text{ sen } (2x) - 4b \cos (2x)) + 2c$

al sustituir en la ecuación diferencial queda:

$4a \cos(2x) - 4b \text{ sen}(2x) + x(-4a \text{ sen}(2x) - 4b \cos(2x)) + 2c + 4x(a \text{ sen}(2x) + b \cos(2x)) + cx^2 + dx + f) = 6 \text{ sen } 2x + 3x^2$

$4a \cos 2x – 4b \text{ sen } 2x + 4cx^2 + 4dx + 4f + 2c = 6 \text{ sen } 2x + 3x^2$

$\therefore\ 4a = 0 \ , \ -4b = 6, \ 4c = 3 \ , \ 4d = 0 \ , \ 4f + 2c = 0$

$\Rightarrow\ a = 0 \ , \ b = -\frac{3}{2} \ , \ c = \frac{3}{4} \ , \ d = 0 \ \ f = -\frac{3}{8}$

$\therefore\ y_p = -\frac{3}{2} x \cos 2x + \frac{3}{4} x^2 - \frac{3}{8}$

$\therefore\ y = c_1 \text{ sen } 2x + c_2 \cos 2x - \frac{3}{2} x \cos 2x + \frac{3}{4} x^2 - \frac{3}{8}$

2) Resolver $\boxed{(D^3 – 3D^2 + 3D – 1)\, y = 2 e^x}$

Respuesta:

ecuación auxiliar $(m^3 – 3m^2 + 3m – 1) = 0$

$(m – 1)^3 = 0$

$y_c = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\, e^x$

como e^x está en y_c y $x e^x$ está en y_c y $x^2 e^x$ está en y_c , sea $\boxed{y_p = a x^3 e^x}$

$\therefore\ (D^3 – 3D^2 + 3D – 1)(a x^3 e^x) = 6a\ e^x = 2 e^x \ \Rightarrow\ a = \frac{1}{3}$

$\therefore\ y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\, e^x + \frac{1}{3} x^3 e^x.$

Método de variación de parámetro

Dada la ecuación diferencial

$$\boxed{y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = F(x)}$$

sabemos que tiene como solución general

$$\boxed{y(x) = y_c + y_p}$$

donde $y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ e y_p es una solución particular

El método consiste en reemplazar las constantes c_1 y c_2 por las funciones $v_1(x)$ y $v_2(x)$, tal que $\boxed{y = v_1 y_1 + v_2 y_2}$ sea una solución particular de la ecuación dada.

derivando : $y' = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2'$

ordenando : $y' = (v_1 y_1' + v_2 y_2') + (v_1' y_1 + v_2' y_2)$

para simplificar, hacemos $\boxed{v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0}$

$\therefore$ $\boxed{y' = v_1 y_1' + v_2 y_2'}$

derivando y'
queda $\boxed{y'' = v_1 y_1'' + v_1' y_1' + v_2 y_2'' + v_2' y_2'}$

Reemplazando en la ecuación dada, se tiene

$$(v_1 y_1'' + v_1' y_1' + v_2 y_2'' + v_2' y_2') + P(x)(v_1 y_1' + v_2 y_2') + Q(x)(v_1 y_1 + v_2 y_2) = F(x).$$

Ordenado queda

$$v_1 (y_1'' + P(x) y_1' + Q(x)y_1) + v_2 (y_2'' + P(x) y_2' + Q(x)y_2) + v_1' y_1' + v_2' y_2' = F(x)$$

$$\therefore \quad v_1 \cdot 0 + v_2 \cdot 0 + v_1' y_1' + v_2' y_2' = F(x)$$

pues y_1, y_2 son soluciones de la ecuación diferencial complementaria.

Luego $\boxed{v_1'y_1' + v_2'y_2' = F(x)}$

y como agregamos la condición $v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0$ se tiene el sistema

$$\left.\begin{array}{l} v_1' y_1' + v_2' y_2' = F(x) \\ v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = F(x) \end{array}\right|$$

por Regla de Cramer $v_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ F & y_2' \end{vmatrix}}{w}$, $v_2' = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & F \end{vmatrix}}{w}$

de donde $v_1' = \dfrac{-y_2F(x)}{w(y_1,y_2)}$, $v_2' = \dfrac{y_1F(x)}{w(y_1,y_2)}$

$\therefore \quad v_1 = \displaystyle\int \frac{-y_2F(x)}{w}dx \qquad v_2 = \int \frac{y_1F(x)}{w}dx$

$\therefore$ $\boxed{y_p = y_1 \displaystyle\int \frac{-y_2F(x)}{w}\,dx + y_2 \int \frac{y_1F(x)}{w}\,dx}$ es la solución particular buscada.

Ejemplo

Resolver $\boxed{y'' + 4y' + 4y = x\,e^{2x}}$

Respuesta

Solución complementaria

$y'' + 4y + 4y = 0$

$m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow (m + 2)^2 = 0 \Rightarrow m = -2$ con multiplicidad 2.

$\therefore \quad y_c = (c_1 + c_2\,x)\,e^{-2x}$

Solución particular

sea $y_1 = e^{-2x}$, , $y_2 = x\,e^{-2x}$

$y_1' = -2e^{-2x}$, $y_2' = e^{-2x}\ (1 - 2x)$

$\therefore \quad y_p = v_1(x)\ y_1(x) + v_2(x)\ y_2(x)$

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x}(1-2x) \end{vmatrix} = e^{-4x}$$

$$\therefore \quad y_p = e^{-2x} \int \frac{-xe^{-2x}xe^{2x}}{e^{-4x}}\,dx + x\,e^{-2x} \int \frac{e^{-2x}xe^{2x}}{e^{-4x}}\,dx$$

$$y_p = e^{-2x} \int -x^2e^{4x}dx + xe^{-2x}\int xe^{4x}dx = e^{2x}\left[\frac{x}{16} - \frac{1}{32}\right]$$

$$\therefore \quad y = y_c + y_p = e^{-2x}(c_1 + c_2\,x) + e^{2x}\left[\frac{x}{16} - \frac{1}{32}\right]$$

Ejercicios propuestos:

1) Encuentre la solución general de las siguientes ec. diferenciales con coef. constantes.

a) $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$
b) $y'' - y' - 6y = e^{-x}$
c) $y'' + y = \operatorname{cosec} x$
d) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$
e) $y'' - 2y' - 3y = 64x\,e^{-x}$
f) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sec 2x$

2) Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones dif. con coef. variables.

a) $(x^2 - 1)\,y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$, si $y = x$ es solución de la ec. complementaria.
b) $(x^2 + x)y'' + (2 - x^2)y' - (2 + x)y = x(x + 1)^2$, si $y = e^x$ es sol. de la ec. complementaria

Observación
El método de variación de parámetros puede extenderse a ecuaciones diferenciales de orden arbitrario.

Dada la ecuación diferencial de orden n.

$$\boxed{y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + a_n(x) = F(x)}$$

y supongamos que se conoce la solución complementaria.

$$\boxed{y_c = c_1\, y_1(x) + \ldots\ldots + c_n\, y_n(x)}$$

se busca una solución particular de la forma.

$$\boxed{y_p = c_1(x) y_1(x) + \ldots\ldots + c_n(x)\, y_n(x)}$$

tal que

$$\left.\begin{array}{l} c_1'\, y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_n'\, y_n = 0 \\ c_1'\, y_1' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_n'\, y_n' = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_1'\, y_1^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1'\, y_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + c_n'\, y_n^{(n-1)} = F(x) \end{array}\right|$$

sea W $[y_1, \ldots.., y_n]$ = Wronskiano de $y_1, \ldots.., y_n$

y sea $V_k(x)$ = determinante obtenido de W al reemplazar su columna k por

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $c_k'(x) = \dfrac{V_k(x) F(x)}{w}$ $\quad \therefore\ c_k(x) = \displaystyle\int \frac{V_k(x)\cdot F(x)}{w}\, dx$

Luego: $\boxed{y_p = y_1(x)\displaystyle\int \frac{V_1(x)F(x)}{w}dx + \ldots\ldots + y_n(x)\int \frac{V_n(x)F(x)}{w}\, dx}$ es la solución particular buscada.

Ejemplos
1) Hallar una solución particular y_p para la ecuación $\boxed{3\, y''' + 5y'' - 2y' = e^x}$
Respuesta

$y''' + \dfrac{5}{3} y'' \dfrac{-2}{3} y' = \dfrac{e^x}{3}$, luego F(x) = $\dfrac{e^x}{3}$

Ecuación complementaria: $3y''' + 5y'' - 2y' = 0$

Ecuación auxiliar: $3m^3 + 5m^2 - 2m = 0$

$m(3m^2 + 5m - 2) = 0$

$3m(m+2)(m - 1/3) = 0$

$\therefore \quad y_c = c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{x/3}$

$y_1 = 1 \;,\quad y_2 = e^{-2x} \;,\quad y_3 = e^{x/3}$

$$\boxed{y_p = y_1^{(x)} \int \frac{V_1(x)F(x)}{w}dx + y_2 \int \frac{V_2(x)F(x)dx}{w} + y_3 \int \frac{V_3(x)F(x)dx}{w}}$$

$$w = \begin{vmatrix} 1 & e^{-2x} & e^{\frac{x}{3}} \\ 0 & -2e^{-2x} & \frac{e^{\frac{x}{3}}}{3} \\ 0 & 4e^{-2x} & \frac{e^{\frac{x}{3}}}{9} \end{vmatrix} = -\frac{14}{9}e^{\frac{-5x}{3}} \qquad V_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} & e^{\frac{x}{3}} \\ 0 & -2e^{-2x} & \frac{e^{\frac{x}{3}}}{3} \\ 1 & 4e^{-2x} & \frac{e^{\frac{x}{3}}}{9} \end{vmatrix} = \frac{7}{3}e^{\frac{-5x}{3}}$$

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{\frac{x}{3}} \\ 0 & 0 & \frac{e^{\frac{x}{3}}}{3} \\ 0 & 1 & \frac{e^{\frac{x}{3}}}{9} \end{vmatrix} = -\frac{e^{\frac{x}{3}}}{3} \qquad V_3 = \begin{vmatrix} 1 & e^{-2x} & 0 \\ 0 & -2e^{-2x} & 0 \\ 0 & 4e^{-2x} & 1 \end{vmatrix} = -2e^{-2x}$$

$$\therefore \quad y_p = 1\int \frac{\frac{7}{3}e^{\frac{-5}{3}x}\quad\frac{e^x}{3}}{\frac{-14}{9}e^{\frac{-5x}{3}}}dx + e^{-2x}\int \frac{-\frac{e^{\frac{x}{3}}}{3}\cdot\frac{e^x}{3}}{\frac{-14}{9}e^{\frac{-5}{3}x}}dx + e^{\frac{x}{3}}\int \frac{-2e^{-2x}\cdot\frac{e^x}{3}}{\frac{-14}{9}e^{\frac{-5x}{3}}}dx$$

$$\boxed{y_p = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{42}e^x + \frac{9}{14}e^x = \frac{1}{6}e^x}$$

---

2) Resolver $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^x$

Respuesta:

Ec. complementaria $(D^3 - 2D^2 - D + 2)\,y = 0$

Ec. auxiliar $m^3 - 2m^2 - m + 2 = 0 \Rightarrow m = 2,\ 1,\ -1.$

$\therefore \quad \boxed{y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x}}$

sean $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{-x}$

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^x & e^{-x} \\ 2e^{2x} & e^x & -e^{-x} \\ 4e^{2x} & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = e^{2x}\cdot e^x e^{-x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = e^{2x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = e^{2x}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = e^{2x}(3-9) = \boxed{-6e^{2x}}$$

$$V_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 1 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^e & -e^{-x} \end{vmatrix} = \boxed{-2}$$

$$V_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 & e^{-x} \\ 2e^{2x} & 0 & -e^{-x} \\ 4e^{2x} & 1 & e^{-x} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -(-e^x - 2e^x) = \boxed{3e^x}$$

$$V_3 = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^x & 0 \\ 2e^{2x} & e^x & 0 \\ 4e^{2x} & e^x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^x \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix} = e^{3x} - 2e^{3x} = \boxed{-e^{3x}}$$

$$y_p = e^{2x} \int \frac{-2e^x}{-6e^{2x}}dx + e^x \int \frac{3e^x e^x}{-6e^{2x}}dx + e^{-x}\int \frac{-e^{3x}e^x}{-6e^{2x}}dx$$

$$y_p = \frac{2e^{2x}}{6} - e^{-x} + \frac{-e^x x}{2} + \frac{e^{-x}}{6}\cdot -\frac{1}{3}e^x - \frac{x}{2}e^x + \frac{1}{12}e^x$$

$y_p = -\frac{1}{4}e^x - \frac{x}{2}e^x$ como $e^x \in y_c$, $y_p = -\frac{x}{2}e^x$

$\therefore y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \frac{x}{2}e^x$

Ejercicios propuestos de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales sujetas a condiciones dadas si las hay.

1) $y'' + 3y = x^2 + 1;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = senx$

3) $(D^2 + 2D + 1)y = e^x + e^{-x}$

4) $y''' - 4y = 4x + 2 + 3e^{-2x}$

5) $\dfrac{d^2I}{dt^2} + 2\dfrac{dI}{dt} + 5I = 34\cos 2t$

6) $\dfrac{d^4x}{dt^4} - x = 8e^{-t}$

7) $y'' - 4y = xe^{2x};\ y(0) = y'(0) = 0$

8) $x^2 y'' - 6y = 0;\ y(1) = 2,\ y'(1) = 0$

9) $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 1$

10) $y^{(IV)} + 16y'' = 64\cos 4x$

11) $y'' + 4y = x(1 + \cos x)$

12) $\dfrac{d^2r}{d\phi^2} = 2r - e^{-2\phi}$

13) $y''' - 4y'' + 4y' = 12e^{2x} + 24x^2$

14) $y'' + y = secx,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

15) $x^2y'' - 4xy' + 4y = 24(x+1)$

16) $\dfrac{d^4s}{dt^4} - 2\dfrac{d^2s}{dt^2} + s = 100\cos 3t$

17) $4y'' - 4y' + y = \ln x$

18) $D(D^2 - 1)(D^2 - 4)y = X^2 - X + e^x$

19) $\dfrac{d^4I}{dt^4} + 9\dfrac{d^2I}{dt^2} = 20e^{-t};\ I(0) = I'(0) = 0$

20) $x^2y''' - xy'' + y' = \dfrac{\ln x}{x}$

UNIDAD 6: ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES VARIABLES QUE PUEDEN TRANSFORMARSE EN ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES.

La ecuación diferencial

$$\boxed{(a_o x^n D^n + a_1 x^{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} xD + a_n)\ y = F(x)}$$

donde $a_o, a_1, \ldots, a_n$ son constantes, se llama ecuación diferencial de Euler.
La transformación $\boxed{x = e^z}$ convierte a esta ecuación diferencial en una de coeficientes constantes.

Ejemplo
Resolver $x^2 y'' + x y' + 4y = 1$
Respuesta

Sea $\boxed{x = e^z}$ $\quad \therefore \quad \dfrac{dx}{dz} = e^z$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{dy/dz}{dx/dz} = \boxed{e^{-z}\frac{dy}{dz}}$$

$$\therefore\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(e^{-z}\frac{dy}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(e^{-z}\frac{dy}{dz}\right)\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dz}\left(e^{-z}\frac{dy}{dz}\right)e^{-z}$$

$$y'' = e^{-2z}\frac{dy}{dz} + e^{-2z}\frac{d^2y}{dz^2} = \boxed{e^{-2z}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)}$$

reemplazando en la ecuación diferencial, se tiene

$$x^2 y'' + x y' + 4y = e^{2z}\ e^{-2z}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) + e^z\ e^{-z}\ \frac{dy}{dz} + 4y = 1.$$

$$\therefore\ \boxed{\frac{d^2y}{dz^2} + 4y = 1}$$

$\Rightarrow\ m^2 + 4 = 0 \ \Rightarrow\ m = \pm\ 2i \ \Rightarrow\ y_c = c_1 \cos 2z + c_2 \text{ sen } 2z$

$$\Rightarrow W = \begin{vmatrix} \cos 2z & sen2z \\ -2sen2z & 2\cos 2z \end{vmatrix} = \boxed{2} \ \Rightarrow y_p = \cos 2z \int \frac{-sen2z}{2}dz + sen2z\int\frac{\cos 2z}{2}dz = \frac{1}{4}$$

$\therefore\ y = c_1 \cos 2z + c_2 \text{ sen } 2z + \frac{1}{4}$, como $z = \ln x$
$\therefore\ y = c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \text{ sen }(2 \ln x) + \frac{1}{4}$.

Ejercicios propuestos

1.- Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones de Euler.

a) $x^2 y'' - 2x y' + 2y = 0$

b) $(x^2 D^2 - x D + 2) y = \ln x$

c) $x^2 y'' - 2x y' = 5 \ln x$

2.- Determine m tal que $\boxed{y = x^m}$ es solución de $x^2 y'' + 3x y' - 3y = 0$
Determine la solución general de $x^2 y'' + 3x y' - 3y = x^2 - 4x + 2$

3.- Use la transformación $\boxed{2x + 3 = e^z}$ para resolver

$(2x + 3)^2 y'' + (2x + 3) y' - 2y = 24 x^2$

4.- Resolver $(x + 2)^2 y'' - y = 4$, usando la transformación $\boxed{x + 2 = e^z}$

5.- Use la transformación $\boxed{z = \text{sen } x}$ para resolver

$y'' + (\text{tg } x) y' + (\cos^2 x) y = 0$

6.- Haga $\boxed{x = z^m}$, con m adecuado para resolver la ecuación diferencial

$xy'' - y' - 4x^3 y = 0$

Respuestas de los ejercicios propuestos

1.- **a)** $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

$x = e^z \qquad y' = e^{-z}\dfrac{dy}{dz}, \quad y'' = e^{-2z}\left(\dfrac{d^2y}{dz^2} - \dfrac{dy}{dz}\right)$

$x^2y'' - 2xy' + 2y = e^{2z}e^{-2z}\left(\dfrac{d^2y}{dz^2} - \dfrac{dy}{dz}\right) - 2e^z e^{-z}\dfrac{dy}{dz} + 2y = 0$

$\dfrac{d^2y}{dz^2} - \dfrac{3dy}{dz} + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 - 3m + 2 = 0$

$(m-1)(m-2) = 0 \Rightarrow m = 1, m = 2$

$y = c_1e^z + c_2e^{2z} \qquad\qquad z = \ln x$

$\boxed{y = c_1 x + c_2 x^2}$

b) $(x^2D^2 - xD + 2)\, y = \ln x \qquad \boxed{x = e^z} \qquad \boxed{z = \ln x}$

$x^2D^2y - Dy + 2y = e^{2z}\,e^{-2z}\left(\dfrac{d^2y}{dz^2} - \dfrac{dy}{dz}\right) e^z\, e^{-z}\left(\dfrac{dy}{dz}\right) + 2y = \ln e^z$

$\boxed{\dfrac{d^2y}{dz^2} - 2\dfrac{dy}{dz} + 2y = z}$

Ecuación complementaria. $(D^2 - 2D + 2)\,y = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 2 = 0$

$m = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{e} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{2 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$

$\therefore\ y_c = (c_1 \cos z + c_2 \operatorname{sen} z)\, e^z$ es la solución complementaria

Como $F(z)=z$ hacemos $y_p = az + b$, luego $y_p' = a$, $y_p'' = 0$. Reemplazamos estos datos en la ecuación $y'' - 2y' + 2y = z$ y se tiene $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{1}{2}$ luego $y_p = \dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{2}$. Por lo tanto la solución es

$y = (c_1 \cos z + c_2 \operatorname{sen} z)\, e^z + \dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{2}$

c) $x^2y'' - 2xy' = \ln x$

$x = e^z \quad y' = e^{-z}\dfrac{dy}{dz}, \quad y'' = e^{-2z}\left(\dfrac{d^2y}{dz^2} - \dfrac{dy}{dz}\right)$

$x^2 y'' - 2x y' = \dfrac{d^2y}{dz^2} - \dfrac{dy}{dz} - 2\dfrac{dy}{dz} = 5z$

$\boxed{D^2 y - 3D y = 5z}$

$m^2 - 3m = 0 \Rightarrow m(m-3) = 0 \Rightarrow m = 0, \; m = 3$

$y_c = c_1 e^o + c_2 e^{3z} = c_1 + c_2 e^{3z}$

$$w = \begin{vmatrix} 1 & e^{3z} \\ 0 & 3e^{zz} \end{vmatrix} = 3e^{3z}$$

$$y_p = \int -\frac{e^{3z} 5 \cdot z}{3 \cdot e^{3z}} dz + e^{3z} \int \frac{5z}{3e^{3z}} dz = -\frac{5}{3}\int z dz + \frac{5}{3} e^{3z} \int e^{-3z} \cdot z dz$$

$$y_p = -\frac{5}{3}\frac{z^2}{2} + \frac{5}{3} e^{3z} \frac{e^{-3z}}{9}(-3z-1) = -\frac{5}{6}z^2 - \frac{5}{27}(3z+1)$$

$$y_p = -\frac{5}{6}z^2 - \frac{5}{9}z - \frac{5}{27}$$

$$y = c_1 + c_2 e^{3z} - \frac{5}{6}z^2 - \frac{5}{9}z - \frac{5}{27}$$

$$\boxed{y = c_1 + c_2 x^3 - \frac{5}{6}\ln^2 x - \frac{5}{9}\ln x - \frac{5}{27}}$$

---

2) $y = x^m$ solución de $x^2 y'' + 3x y' - 3y = 0$

$y' = m x^{m-1}, \quad y'' = m(m-1) x^{m-2}$

$$\begin{aligned} x^2 y'' + 3x y' - 3y &= m(m-1)x^m + 3m x^m - 3x^m = 0 \\ &= m(m-1) + 3m - 3 = 0 \\ &= m^2 + 2m - 3 = 0 \\ &= (m-1)(m+3) = 0 \end{aligned}$$

$m = 1, \; m = -3 \Rightarrow y = x^{-3} \;\wedge\; y = x$ son soluciones de la ecuación diferencial

$\therefore \quad \boxed{y = c_1 x^{-3} + c_2 x}$ es solución de la ecuación diferencial $x^2 y'' + 3x y' - 3y = 0$

Ahora resolveremos la ecuación diferencial $x^2 y'' + 3x y' - 3y = x^2 - 4x + 2$. Para ello utilizaremos los resultados obtenidos anteriormente. Como ya tenemos la solución complementaria ahora calcularemos la solución particular usando el método de variación de parámetros.

$$F(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2}$$

$$y_1 = x^{-3}, \quad y_2 = x$$

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{-3} & x \\ -3x^{-4} & 1 \end{vmatrix} = x^{-3} + 3x^{-3} = 4x^{-3}$$

$$\boxed{w = 4x^{-3}}$$

$$y_p = y_1 \int \frac{-y_2 F(x)}{w} dx + y_2 \int \frac{y_1 F(x)}{w} dx$$

$$y_p = x^{-3} \int \frac{-x \cdot (x^2 - 4x + 2)}{4x^{-3} \cdot x^2} dx + x \int \frac{x^{-3}(x^2 - 4x + 2)}{4x^{-3} \cdot x^2} dx$$

$$y_p = \frac{-x^{-3}}{4} \int x^2 (x^2 - 4x + 2) dx + \frac{x}{4} \int x^{-2} (x^2 - 4x + 2) dx$$

$$y_p = \frac{x^{-3}}{4} \int x^4 - 4x^3 + 2x^2) dx + \frac{x}{4} \int (1 - 4x^{-1} + 2x^{-2}) dx$$

$$y_p = -\frac{x^{-3}}{4} \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{2x^3}{3} \right] + \frac{x}{4} \left[x - 4 \ln x - \frac{2}{x} \right]$$

$$y_p = -\frac{x^2}{20} + \frac{x}{4} - \frac{1}{6} + \frac{x^2}{4} - x \ln x - \frac{1}{2}$$

$$y_p = x^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{20} \right) + \frac{x}{4} - x \ln x - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$\boxed{y_p = \frac{x^2}{5} + \frac{x}{4} - x \ln x - \frac{2}{3}}$$

$$y = y_c + y_p = c_1 x^{-3} + c_2 x + \frac{x^2}{5} + \frac{x}{4} - x \ln x \frac{-2}{3}$$

$$\boxed{y = c_1 x^{-3} + c_2 x + \frac{x^2}{5} - x \ln x - \frac{2}{3}}$$

3) $(2x + 3)^3\ y'' + (2x + 3)\ y' - 2y = 24\ x^2$

$\boxed{2x + 3 = e^z} \quad \Rightarrow x = \dfrac{e^z - 3}{2} \quad \Rightarrow \dfrac{dx}{dz} = \dfrac{e^z}{2} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = 2e^{-z}$

Respuesta

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{2e^{-z}}{z}$$

$$y'' = \frac{dy}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\frac{2e^{-z}}{dz}\right)\cdot 2e^{-z}$$

$$y'' = \left(\frac{d^2y}{dz^2} - 2e^{-z} + 2\frac{dy}{dz}\cdot e^{-z}\right)\cdot 2e^{-z}$$

$$y'' = 4\ e^{-2z}\ \frac{d^2y}{dz^2} - 4e^{-2z}\frac{dy}{dz}$$

Reemplazando

$$4\ \frac{d^2y}{dz^2} - 4\frac{dy}{dz} + 2\cdot\frac{dy}{dz} - 2y = \frac{24}{4}\left(e^z - 3\right)^2 / \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{2}\frac{dy}{dz} - \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}(e^z - 3)^2}$$

Ecuación complementaria $\left(D^2 - \dfrac{1}{2}D - \dfrac{1}{2}\right)\ y = 0 \Rightarrow m^2 - \dfrac{1}{2}m - \dfrac{1}{2} = 0$

$$m = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} = 1, -\frac{1}{2}$$

$y_c = c_1\ e^z + c_2\ e^{-z/2}$

$y_1 = e^z \ ,\ y_2 = e^{-z/2} \quad \Rightarrow \quad w = \begin{vmatrix} e^z & e^{-z/2} \\ e^z & \dfrac{-e^{-z/2}}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{-e^{z/2}}{2} - e^{z/2}$

$$\boxed{w = \frac{-3}{2}e^{z/2}}$$

$$y_p = e^z \int \frac{-e^{-z/2}\,\frac{3}{2}(e^z - 3)^2}{-3/2e^{z/2}}dz + e^{-z/2}\int\frac{e^z\,\frac{3}{2}(e^2 - 3)^2}{-3/2e^{z/2}}dz$$

$$y_p = e^z \int e^{-z}(e^z - 3)^2 - e^{-z/2}\int e^{z/2}(e^z - 3)^2\,dz$$

$$y_p = e^z \int (e^z - 6 + 9e^{-z})dz - e^{-z/2}\int (e^{\frac{5}{2}z} - 6e^{\frac{3z}{2}} + 9e^{\frac{z}{2}})dz$$

$$y_p = e^z\,(e^z - 6z - 9e^{-z}) - e^{-z/2}\left(\frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}z} - 4e^{\frac{3z}{2}} + 18e^{\frac{z}{2}}\right)$$

$$y_p = -6e^z z + \frac{3}{5}e^{2z} + 4e^z - 27$$

La solución general es $y = c_1 e^z + c_2 e^{-z/2} - 6e^z z + \frac{3}{5}e^{2z} + 4e^z - 27$

---

4) $\boxed{(x+2)\quad y'' - y = 4}$

$\boxed{x + 2 = e^z}$ $\Rightarrow$ $x = e^z - 2 \Rightarrow \dfrac{dx}{dz} = e^z \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = e^{-z}$

$$y' = \frac{dy}{dz}\cdot e^{-z},\ y'' = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\cdot e^{-z}\right)\cdot e^{-z} = \frac{d^2y}{dz^2}e^{-2z} - e^{-2z}\frac{dy}{dz}$$

Reemplazando

$\boxed{\dfrac{d^2y}{dz^2} - \dfrac{dy}{dz} - y = 4}$ $\Rightarrow$ $m^2 - m - 1 = 0$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{y_c = C_1 \cdot e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}z} + C_2 \cdot e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}}$$

$y_p = a$

$e_p' = 0$

$e_p'' = 0$

$\therefore$ $-a = 4 \Rightarrow a = -4$

$\boxed{y_p = -4}$

$$\boxed{y = y_c + y_p = C_1 \cdot e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}z} + C_2 \cdot e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}z} - 4 = C_1 \cdot e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}Ln\,|x+2|} + C_2 \cdot e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}Ln\,|x+2|} - 4}$$

$$\boxed{y = C_1 \cdot (x+2)^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + C_2 \cdot (x+2)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} - 4}$$

---

5) $\boxed{y'' + (\operatorname{tg} x)\, y' + (\cos^2 x)\, y = 0}$ sea $\boxed{z = \operatorname{sen} x}$

$$\frac{dz}{dx} = \cos x\,; \quad y' = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\cos x$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\cos x\right) = \frac{d^2y}{dz^2}\cos^2 x - \operatorname{sen}x\,\frac{dy}{dz}$$

Reemplazando en la ecuación dada queda

$$\frac{d^2y}{dz^2}\cos^2 x - \operatorname{sen}x\,\frac{dy}{dz} + \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\frac{dy}{dz}\cos x + \cos^2 x\,y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}\cos^2 x + \cos^2 x\,y = 0 \Rightarrow \cos^2 x\left[\frac{d^2y}{dz^2} + y\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + y = 0 \Rightarrow m^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; m = \pm i \;\Rightarrow\; y = c_1 \operatorname{sen} z + c_2 \cos z$$

$$\therefore \quad \boxed{y = c_1 \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) + c_2 \cos(\operatorname{sen} x)}$$

---

6) Haga $x = z^m$, con m adecuado para resolver la ecuación diferencial

$$\boxed{xy'' - y' - 4x^3y = 0}$$

Respuesta

$$\boxed{x = z^m} \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{dz} = m\,z^{m-1}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \boxed{\frac{z^{1-m}}{m}\frac{dy}{dz}}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{z^{1-m}}{m}\cdot\frac{dy}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{z^{1-m}}{m}\cdot\frac{dy}{dz}\right)\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$y'' = \frac{1}{m^2}\left((1-m)z^{1-2m}\frac{dy}{dz} + z^{2-2m}\frac{d^2y}{dz^2}\right)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial, se tiene:

$$\frac{z^m}{m^2}\left((1-m)z^{1-2m}\frac{dy}{dz} + z^{2-2m}\frac{d^2y}{dz^2}\right) - \frac{z^{1-m}}{m}\frac{dy}{dz} - 4z^{3m}y = 0$$

$$\frac{z^{2-m}}{m^2}\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{(1-m)}{m^2}z^{1-m} - \frac{z^{1-m}m}{m^2}\right)\frac{dy}{dz} - 4z^{3m}y = 0$$

$$\frac{z^{2-m}}{m^2}\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{z^{1-m}(1-2m)}{m^2}\frac{dy}{dz} - 4z^{3m}y = 0 \,/\cdot m^2$$

$$\boxed{z^{2-m}\ \frac{d^2y}{dz^2} + z^{1-m}(1-2m)\frac{dy}{dz} - 4\,z^{3m}\ m^2\,y = 0}$$

$\boxed{\text{sea}\quad m = ½}$

$\therefore\ z^{3/2}\ \frac{d^2y}{dz^2} - z^{3/2}\ y = 0$

$\therefore\ \frac{d^2y}{dz^2} - y = 0$

$\therefore\ m^2 - 1 = 0$

$\therefore\ m^2 = 1$

$\therefore\ m = \pm\ 1$

$\therefore\ \boxed{y = c_1\,e^z + c_2\ e^{-z}}$

$\boxed{x = z^{1/2}}$

$x^2 = z$

$\therefore\quad y = c_1\ e^{x^2} + c_2 e^{-x^2}$

UNIDAD 7: APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES.

I) Vibraciones en sistemas mecánicos

Vibraciones armónicas simples

Consideremos un resorte ordinario de peso despreciable suspendido verticalmente de un soporte fijo, suponga que un peso W se cuelga del resorte.

Cuando el peso está en reposo describimos su posición como la **posición de equilibrio.**
Si el peso se hala hacia abajo una cierta distancia y luego se suelta, estará bajo un **movimiento vibratorio** alrededor de la posición de equilibrio. Para estudiar este movimiento consideraremos las fuerzas que actúan sobre el peso durante el movimiento .

Llamaremos **fuerza restauradora** F_r a la fuerza que tiende a regresar o restaurar un peso desplazado a su posición de equilibrio.

La ley que gobierna esta fuerza es la ley Hooke.
"La fuerza ejercida por un resorte, tendiente a restaurar el peso W a la posición de equilibrio, es proporcional a la distancia de W a la posición de equilibrio. (proporcional al alargamiento).

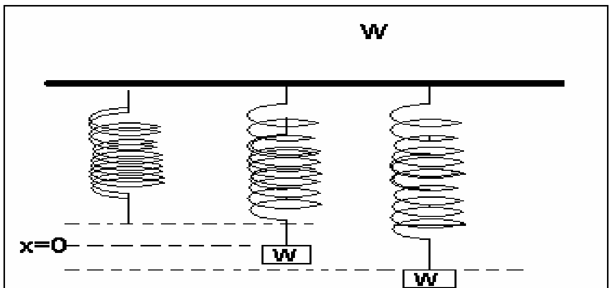


Figura 1

La magnitud de la fuerza restauradora (F_r), es $|F_r| = k\ |x|$, donde $k>0$ es una constante de proporcionalidad que depende de la dureza del resorte y se llama constante del resorte.

$\therefore$ $\boxed{F_r = -kx}$ (dirección positiva $\downarrow$, dirección negativa $\uparrow$)

$$x > 0 \quad F_r < 0$$
$$x < 0 \quad F_r > 0$$

Cuando el peso W se coloca en el resorte, se estira una distancia S, luego la tensión T_1 en el resorte es proporcional al estiramiento. $\boxed{T_1 = k\,s}$

Como resorte y peso están en equilibrio $\boxed{T_1 = k\,s = W}$ (Ley de Hooke)

Cuando el peso se hala más y se suelta, la tensión T_2 en el resorte es

$T_2 = k\ (s + x)$ (Ley de Hooke)

$\therefore$ $\boxed{w - T_2 = W - k\,s - k\,x = -k\,x}$

Por la **2ª ley de Newton** $F_r = M \dfrac{d^2x}{dt^2}$

$\therefore \quad M \dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad$ como $\quad M = \dfrac{W}{g}$

$$\boxed{\frac{W}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -kx}\ , \text{ luego } \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kg}{w} x = 0}$$

Ejemplo 1

Se encontró experimentalmente que un peso de 6 libras estira un resorte 6 pulgadas. Si el peso se hala 4 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se suelta.

a) Establezca una ecuación diferencial y condiciones asociadas que describan el movimiento.

b) Encuentre la posición del peso como una función del tiempo.

c) Determine la posición, velocidad y aceleración del peso, ½ seg. después de haberse soltado.

Respuesta :

6 pulgadas = ½ pie	1 pié = 12 pulgadas
$\lvert f \rvert = k \lvert x \rvert$	1/12 pié = 1 pulgada
$6 = k \cdot \frac{1}{2}$	1/3 pié = 4 pulgadas
$k = 12.$	g = 32 pies/seg^2

$\therefore$ Ec. diferencial del movimiento $\dfrac{6}{32} \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2} = -12x$

$$\therefore a) \ \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0 \qquad t = 0, \quad x = \frac{1}{3} pies, \quad \frac{dx}{dt} = 0}$$

Ecuación auxiliar $m^2 + 64 = 0 \Rightarrow m = \pm 8i \Rightarrow x = c_1 \cos(8t) + c_2 \operatorname{sen}(8t)$

Como $x = \dfrac{1}{3}$ para $t = 0 \Rightarrow c_1 = \dfrac{1}{3}$.

Como $\dfrac{dx}{dt} = 0$ para $t = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

b) $x = \dfrac{1}{3} \cos 8t$ (en pies)

$x = 4 \cos 8t$ (en pulgadas)

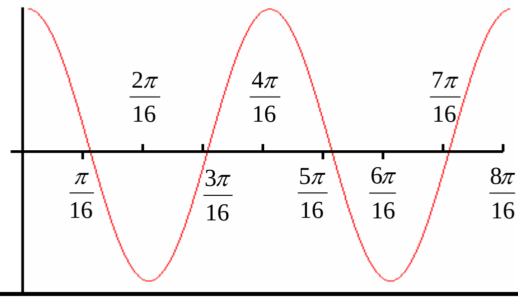
c) $v = \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{8}{3} \operatorname{sen} 8t$

$a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{64}{3} \cos 8t$

para $t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 8t = 4$ radianes y como 4 radianes $= 4 \left(\dfrac{180}{\pi}\right)$ grados = 229 grados

$x = \dfrac{1}{3}(-0{,}65) = -0{,}218$ pies, $\quad v = -\dfrac{8}{3}(-0{,}755) = 2{,}01$ pies/seg, $\quad a = -\dfrac{64}{3}(-0{,}656) = 14$ pies/seg^2

Gráfico del movimiento: $\mathbf{x\,(t) = \frac{1}{3}\cos(8t)}$



En un movimiento como el descrito, distinguimos:

Amplitud = desplazamiento máximo del peso de su posición de equilibrio. (A)

Período = tiempo requerido para un ciclo completo. (T)

Frecuencia = número de ciclos por unidad de tiempo (f) $f = \frac{1}{T}$

En nuestro ejemplo 1 $x = \frac{1}{3}\cos 8t$

$\therefore$ amplitud $A = \frac{1}{3}$ pié

período $T = \frac{\pi}{4}$ seg. por ciclo

frecuencia $f = \frac{4}{\pi}$ ciclos /seg.

Observación

Si la ecuación del movimiento es $\frac{d^2x}{dt^2} + a^2 x = 0$, su solución viene dada por

$x = x_o \cos(at)$, $a = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $m = \frac{w}{g}$

k es la constante del resorte, m es la masa del peso, g es la gravedad

Amplitud $A = x_o$, período $T = \frac{2\pi}{a}$, frecuencia $f = \frac{a}{2\pi}$

Ejemplo 2

En el ejemplo 1 suponga que el peso se hala 4 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y luego se le da una velocidad hacia abajo de 2 pies/seg. en vez de soltarlo. Determine la amplitud, período y frecuencia del movimiento.

Respuesta

Ecuación diferencial: $\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0$. Condiciones iniciales: $x = \frac{1}{3}$, $\frac{dx}{dt} = 2$, para $t = 0$

Solución de la ecuación diferencial

$$x = A \cos 8t + B \text{ sen } 8t$$

$$\frac{dx}{dt} = -8A \text{ sen } 8t + 8B \cos 8t \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3} \quad , \quad B = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad \boxed{x(t) = \frac{1}{3} \cos(8t) + \frac{1}{4} \text{ sen }(8t) \text{ pies}}$$

$\boxed{x(t) = 4 \cos(8t) + 3 \text{ sen }(8t) \text{ pulgadas}}$ si se mide por pulgadas.

Nota:

Como $a \cos(\alpha t) + b \text{ sen}(\alpha t) = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ sen}(\alpha t + \phi)$

$a \cos(\alpha t) + b \text{ sen}(\alpha t) = \sqrt{a^2 + b^2} [\text{sen}(\alpha t) \cos(\phi) + \cos(\alpha t) \text{ sen}(\phi)]$

donde $\text{sen}(\phi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ y $\cos \phi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, ϕ = ángulo de fase

$$\therefore x = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} \text{ sen }(8t + \phi) = \frac{5}{12} \text{ sen }(8t + \phi)$$

donde $\text{sen } \phi = \dfrac{4}{5}$, $\cos \phi = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \phi = 53° 8' = 0{,}9274$ radianes.

$$\therefore \quad x = \frac{5}{12} \text{ sen } (8t + 0{,}9274) \text{ pies}$$

$$x = 5 \text{ sen } (8t + 0{,}9274) \text{ pulgadas.}$$

amplitud $A = 5$ pulgadas $= \dfrac{5}{12}$ pies.

período $= T = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$ seg.

frecuencia $= f = \dfrac{4}{\pi}$ ciclos por segundo.

Nota:

En general, si un movimiento se puede describir como $x = A\text{sen}(\alpha t + \phi)$, entonces

amplitud $= A$, período $= T = \dfrac{2\pi}{\alpha}$, frecuencia $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\alpha}{2\pi}$

Vibraciones amortiguadas, movimiento sobre amortiguado y críticamente amortiguado

Existen fuerzas de fricción y otros tipos de fuerzas (resistencia del aire) que actúan para decrecer la amplitud de las oscilaciones y finalmente traer el sistema al reposo.

Sea F_a la fuerza amortiguadora

$\therefore |F_a| = \beta \left|\frac{dx}{dt}\right|$, donde β es la constante de proporcionalidad llamada la constante de amortiguamiento (mide la resistencia del medio).

$\therefore\ F_a = -\beta \frac{dx}{dt}$, $\quad \frac{dx}{dt} > 0,\ F_a < 0, \quad \frac{dx}{dt} < 0,\ F_a > 0$

$\therefore$ la ecuación diferencial del movimiento es

$$\boxed{\frac{w}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + k\,x = 0} \text{ o bien } \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta g}{w}\frac{dx}{dt} + \frac{kg}{w}x = 0}$$

Ejemplo 3

Asuma que una fuerza amortiguadora, dada en libras por 1,5 veces la velocidad instantánea en pies por segundo, actúa sobre el peso en el ejemplo 1.

a) Establezca la ecuación diferencial y condiciones asociadas.

b) Encuentre la posición x del peso como una función del tiempo t.

Respuesta

$F_a = -1,5 \frac{dx}{dt}$

Ecuación del movimiento: $\frac{6}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -12\,x - 1,5\frac{dx}{dt}$

a) $\therefore\ \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 64x = 0$. Condiciones iniciales: $x = \frac{1}{3}$, $t = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$.

Solución de la ecuación diferencial

$m^2 + 8\,m + 64 = 0 \Rightarrow m = -4 \pm 4\sqrt{3}\ i.$ (<u>Raíces complejas conjugadas</u>)

$\therefore\ x = e^{-4t}\left(A\cos(4\sqrt{3}\ t) + B\ \text{sen}(4\sqrt{3}\ t)\right)$

Determinando A y B sujetar a las condiciones iniciales: $t = 0$, $x = \frac{1}{3}$ pies, $\frac{dx}{dt} = 0$, se tiene

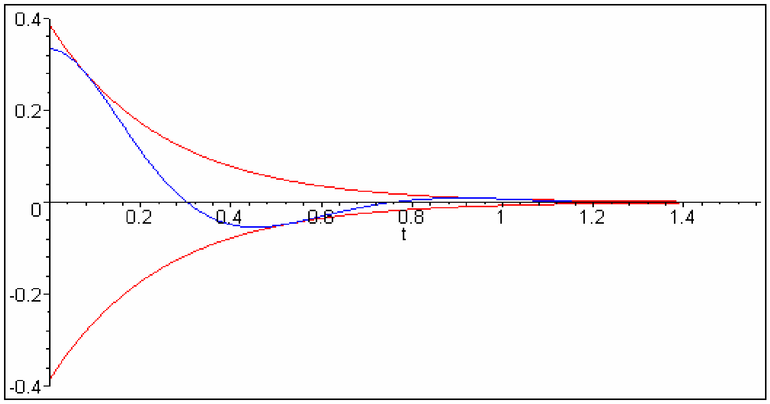
$c_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}$, $c_2 = \frac{3}{9}$, luego

$x = \frac{1}{9}e^{-4t}\left(3\cos(4\sqrt{3}\ t) + \sqrt{3}\,\text{sen}(4\sqrt{3}\ t)\right)$, que se puede escribir como

b) $x = \frac{2\sqrt{3}}{9} e^{-4t} \operatorname{sen}\left(4\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$ y se trata de un movimiento amortiguado.

$x \to 0$ cuando $t \to +\infty$

Gráfico



1

La curva está entre los gráficos de $x = -\frac{2\sqrt{3}}{9} e^{-4t}$ y $x = \frac{2\sqrt{3}}{9} e^{-4t}$

Definición
En el movimiento descrito distinguimos los siguientes elementos.

Cuasi período = la diferencia constante en tiempo entre máximos (o mínimos)

Amplitud tiempo variante = amplitud dependiente del tiempo t

Ejemplo:
En el ejemplo anterior se tiene

Cuasi período $= \frac{2\pi}{4\sqrt{3}}$, **Amplitud tiempo variante** $= \frac{2\sqrt{3}}{9} e^{-4t}$

NOTA

Si el movimiento viene dado por $x(t) = A(t)\operatorname{sen}(\alpha t + \phi)$, entonces

Amplitud de tiempo variante = $A(t)$

Cuasi período = $T = \frac{2\pi}{\alpha}$

Ejemplo 4

En el ejemplo 1, asuma que $\boxed{F_a = -3,75\frac{dx}{dt}}$, encuentre x en función de t.

Respuesta

$$\frac{6}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -12x - 3{,}75\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0$$

$$x = \frac{1}{3}, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad y \quad t = 0 \qquad \text{(cond. iniciales)}$$

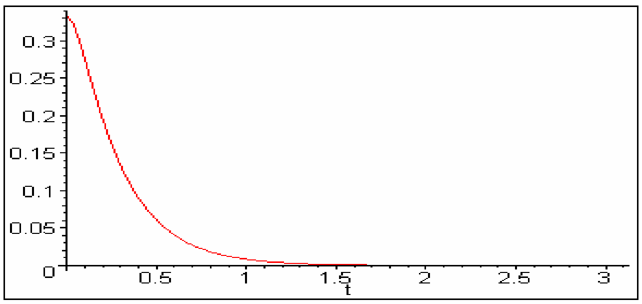
La ecuación auxiliar es $m^2 + 20m + 64 = 0 \Rightarrow m = -4, -16$

$\boxed{x(t) = A\, e^{-4t} + B\, e^{-16t}}$ (raíces reales $\neq$)

aplicando condiciones iniciales : $t = 0, \; x = \frac{1}{3}, \; \frac{dx}{dt} = 0$

$$\boxed{x(t) = \frac{4}{9}e^{-4t} - \frac{1}{9}e^{-16t}}$$

Gráfico



No hay oscilaciones, el peso tiene tanto amortiguamiento que solo retorna gradualmente a la posición del equilibrio sin pasar por esta. Este tipo de movimiento se llama movimiento sobre amortiguado.

Ejemplo 5

En el ejemplo 1, asumir $\boxed{F_a = -3\frac{dx}{dt}}$ y encontrar x.

Respuesta

$$\frac{6}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -12x - 3\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 16\frac{dx}{dt} + 64x = 0$$

Condiciones inicial $x = \frac{1}{3}, \quad t = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0$

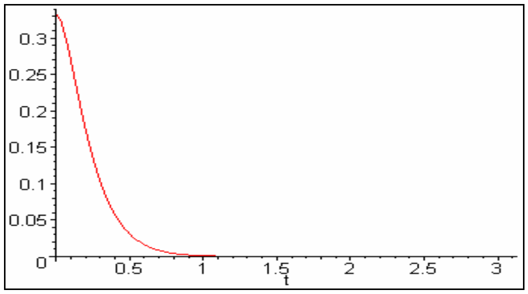
Solución de la ecuación diferencial:

$m^2 + 16m + 64 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -8$ con multiplicidad 2 (raíces reales iguales)

$x = Ae^{-8t} + Bte^{-8t}$

Aplicando condiciones iniciales se tiene $x = \frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{8t}{3}e^{-8t}$, movimiento críticamente amortiguado.

Gráfico



NOTA:

Si la ecuación auxiliar: $m^2 + 2bm + a^2 = 0$, tiene las raíces:

$$m_1,\ m_2 = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4a^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$$. Entonces:

a) $b^2 - a^2 > 0$: dos raíces reales $\neq$, se trata de un movimiento sobre amortiguado
b) $b^2 - a^2 = 0$: dos raíces reales =, se trata de un movimiento críticamente amortiguado
c) $b^2 - a^2 < 0$: dos raíces complejas conjugadas, se trata de un movimiento amortiguado.

Vibraciones forzadas

Las vibraciones analizadas antes se conocen como vibraciones libres, porque sólo actúan las fuerzas internas del sistema. Consideraremos ahora el caso en que actúe una **fuerza externa $F_a = F(t)$**, por ejemplo, las vibraciones de la pared a la que está fijo el resorte o cuando al peso se le da un pequeño empuje.

a) **Con amortiguación**

La ecuación diferencial para el movimiento es:

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = F_r + F_a + F_e}, \quad F_r = -k\,x, \quad F_a = -\beta\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = F(t), \quad \text{pues} \quad m = \frac{W}{g}$$

Ejemplo 6

En el Ejemplo 1 consideremos $F_e = 24\cos(8t)$, $F_a = -1{,}5\frac{dx}{dt}$ y determinar x(t).

Respuesta

La ecuación diferencial es $\frac{6}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -12x - 1{,}5\frac{dx}{dt} + 24\cos 8t$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 64x = 128\cos(8t)}$$

Condiciones iniciales: $x = \frac{1}{3}$, $\frac{dx}{dt} = 0$, en $t = 0$

$x_c = e^{-4t} \cdot (A \cos(4\sqrt{3}\,t) + B \,\text{sen}\,(4\sqrt{3}\,t))$ por ejemplo 3 (método de coeficientes indeterminados)

sea $x_p = a \,\text{sen}\, 8t + b \cos 8t$ con $a = 2$, $b = 0$. (aplicando condiciones iniciales)

$$\therefore\ x = e^{-4t} \underbrace{\left(\frac{1}{3} \cos(4\sqrt{3}\,t) - \frac{11}{3\sqrt{3}} \,\text{sen}\,(4\sqrt{3}\,t)\right)}_{\text{Término transitorio}} + \underbrace{2 \,\text{sen}\,(8t)}_{\text{Término de estado estacionario.}}$$

b) Sin amortiguación

En ausencia de una fuerza de amortiguación, no habrá término transitorio en la solución de un problema. Además, la aplicación de una fuerza periódica de frecuencia cercana o igual a la frecuencia de las oscilaciones libres no amortiguadas puede causar un problema serio en cualquier sistema mecánico oscilatorio.

Ejemplo 7

Consideremos en el ejemplo 1, una fuerza externa $F_e = 24 \,\text{sen}\,(8t)$ y determine x(t).

Respuesta:

$\frac{w}{g}\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_e$, luego $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 64\,x = 128 \,\text{sen}\, 8t}$

$x_c = c_1 \cos 8t + c_2 \,\text{sen}\, 8t$
$x_p = at \,\text{sen}\, 8t + bt \cos 8t$
$x'_p = a \,\text{sen}\, 8t + 8\, at \cos 8t + b \cos 8t - 8\, bt \,\text{sen}\, 8t$
$x''_p = 8a \cos 8t + 8a \cos 8t - 64\, at \,\text{sen}\, 8t - 8b \,\text{sen}\, 8t - 8b \,\text{sen}\, 8t - 64\, bt \cos 8t$
$\therefore x''_p + 64\,x = 64a \cos 8t - 16b \,\text{sen}\, 8t = 128 \,\text{sen}\, 8t$

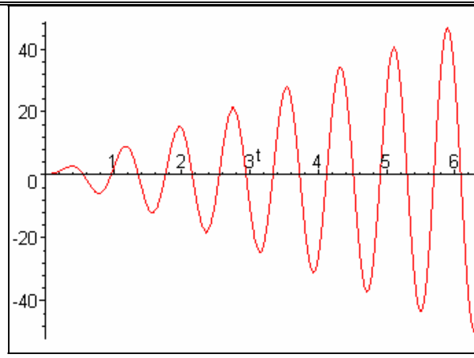
$\therefore \boxed{a = 0}$, $\boxed{b = -\frac{128}{16}}$ $\therefore \boxed{x_p = -\frac{128}{16}\, t \cos 8t} \Rightarrow \boxed{x_p = -8\,t \cos 8t}$

$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \,\text{sen}\, 8t - 8t \cos 8t$
$x'(t) = -8\, c_1 \,\text{sen}\, 8t + 8\, c_2 \cos 8t - 8 \cos 8t + 64\, t \,\text{sen}\, 8t$

reemplazando las condiciones iniciales se tiene: $c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = 1$

Luego $x(t) = \frac{1}{3}\cos(8t) + \text{sen}(8t) - 8t\cos(8t)$

Gráfico:



Efecto de resonancia mecánica

II) Circuitos Eléctricos

La suma de las caídas de tensión a través de los elementos de un circuito cerrado es igual a la fuerza electromotriz total E, en el circuito. La caída de tensión a través de una resistencia de R ohmios es $\boxed{Ri}$, a través de una bobina de L henrios de inductancia es $\boxed{L\frac{di}{dt}}$ y a través de un condensador de ***C*** faradios de capacidad es $\boxed{\frac{q}{c}}$. La corriente i amperios y la carga q culombios están relacionados por $\boxed{i = \frac{dq}{dt}}$**.** Se considerarán R, L y C como constantes.

La ecuación diferencial de un circuito eléctrico que contiene una inductancia L, una resistencia R, un condensador de capacidad C y una fuerza electromotriz E(t) es:

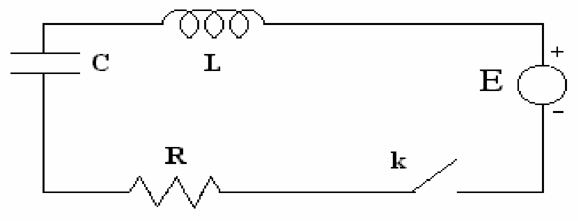
1.- $\boxed{L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{c} = E(t)}$ (Ley de Kirchhoff)

como $\boxed{i = \frac{dq}{dt}}$, $\boxed{\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}}$

2.- $\boxed{L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E(t)}$ que permite hallar q = q(t)

Ejemplo

Un inductor de 0,5 henrios es conectado en serie con una resistencia de 6 ohmios, un condensador de 0,02 faradios, un generador con un voltaje alterno dado por 24 sen10t, $t \geq 0$ y un interruptor k.



a) Establezca una ecuación diferencial para la carga instantánea en el condensador.
b) Encuentre la carga y la corriente al tiempo t si la carga en el condensador es cero cuando el interruptor k se cierra en t = 0.

Respuesta

L = 0,5 R = 6 , C = 0, 02 , E (t) = 24 sen 10 t.

Según Ley de Kirchoff.

$$6i + 0{,}5\frac{di}{dt} + \frac{q}{0{,}02} = 24 \text{ sen } 10t$$

$$6i + 0{,}5\frac{di}{dt} + 50\,q = 24 \text{ sen } 10t. \quad \text{como} \quad \boxed{i = \frac{dq}{dt}}$$

$$\frac{6dq}{dt} + 0{,}5\frac{d^2q}{dt^2} + 50\,q = 24 \text{ sen } 10\,t \;\; / * 2.$$

$$\therefore \boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 12\frac{dq}{dt} + 100\,q = 48 \text{ sen } 10\,t}$$

Condiciones iniciales: q = 0, i = 0, en t = 0

$m^2 + 12m + 100 = 0$ $\qquad m = -\dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 400}}{2} = -6 \pm 8i$

$q_c = e^{-6t}$ (A cos 8t + B sen 8t) Solución complementaria

Sea q_p = a sen 10t + b cos 10 t , luego a = 0 , $b = -\dfrac{2}{5}$;

$q_p = -\dfrac{2}{5}\cos(10\,t)$ es una solución particular

$\therefore\; q = e^{-6t}\,(A\cos 8t + B \text{ sen } 8t) - \dfrac{2}{5}\cos 10\,t,$ es la solución general

Aplicando condiciones iniciales se tiene $A = \dfrac{2}{5}$, $B = \dfrac{3}{10}$

$\therefore \boxed{q(t) = \frac{1}{10} e^{-6t} (4\cos(8t) + 3\text{sen}(8t)) - \frac{2}{5}\cos(10t)}$ carga eléctrica en función del tiempo t

$\boxed{i(t) = -5e^{-6t} sen(8t) + 4sen(10t)}$ intensidad de corriente en función del tiempo t

Término transitorio en q(t): $\boxed{\frac{1}{10} e^{-6t} (4\cos(8t) + 3\text{sen}(8t))}$

Término estacionario en q(t): $\boxed{-\frac{2}{5}\cos(10t)}$

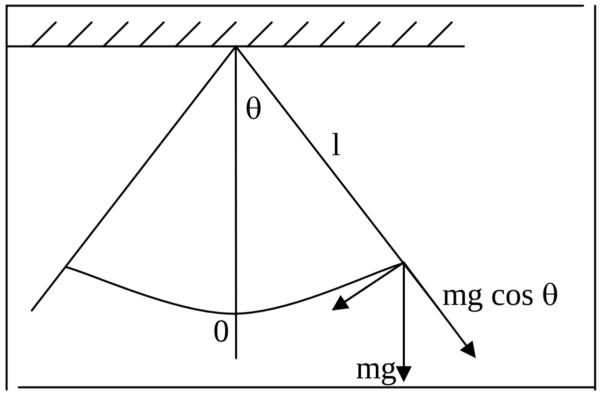
Término transitorio en i(t): $\boxed{-5e^{-6t} sen(8t)}$

Término estacionario en i(t): $\boxed{4sen(10t)}$

III-Oscilaciones de un péndulo

Consideramos un péndulo simple compuesto por una partícula de masa m soportada por una cuerda de largo *l* y de masa despreciable si la cuerda está siempre derecha y el sistema está libre para vibrar en un plano vertical, se trata de encontrar el período de vibración.

Sea θ el ángulo que forma la cuerda con la vertical en el instante t. $\theta > 0$ a la derecha, $\theta < 0$ a la izquierda.



$\therefore$ $F = -mg \text{ sen } \theta$, ($F < 0$ si $\theta > 0$, $F > 0$ si $\theta < 0$)
$ma = -mg \text{ sen } \theta$.

$\frac{d^2S}{dt^2} = -g \text{ sen } \theta$, donde $\boxed{S = l\,\theta}$, l = constante, S = longitud de arco

$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \text{ sen } \theta$, pues $\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$ y $\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(l\frac{d\theta}{dt}\right) = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta$, para θ pequeño $\pm 5°$, pues $\text{sen}(\theta) \approx \theta$

La ecuación diferencial correspondiente a las oscilaciones del péndulo es: $\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g\theta}{l} = 0}$

$m^2 + \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow m^2 = -\frac{g}{l} \Rightarrow m = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}\, i$

$\therefore \boxed{\theta = c_1 \text{ sen} \sqrt{\frac{g}{l}}\, t + c_2 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t.}$ movimiento armónico simple de un péndulo

Amplitud $\boxed{A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$

Período $\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = \frac{2\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g}}}$

Frecuencia $\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{g}}{2\pi\sqrt{l}}}$

Ejercicios resueltos:

1) Las oscilaciones pequeñas de un péndulo simple tienen un período de 2 seg. Determine la longitud del péndulo. Encuentre la longitud correspondiente de un péndulo simple que tiene dos veces este período.

Respuesta

Período = T = $\dfrac{2\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g}}$, luego $\sqrt{l} = \dfrac{\sqrt{gT}}{2\pi} \Rightarrow l = \dfrac{gT^2}{4\pi^2}$

Para T = 2 seg. , $l = \dfrac{32 \cdot 4}{4 \cdot \pi^2} = 3,24$ pies

Para T = 4 seg. , $l = \dfrac{32 \cdot 16}{4\pi^2} = 12{,}96$ pies

---

2) El medallón de un péndulo simple de 2 pies de longitud se desplaza de manera que la cuerda del péndulo forma un ángulo de 5° con la vertical. Si el péndulo se suelta de esta posición:

a) Encuentre el ángulo θ que la cuerda forma con la vertical en cualquier tiempo.

b) Determine la frecuencia de la vibración

c) Calcule la distancia recorrida por el medallón del péndulo durante su período.

d) Estudie la velocidad y aceleración lineal del medallón en el centro de su trayectoria

Nota: $\boxed{\text{velocidad lineal} = v = -\, l\,\dfrac{d\theta}{dt}}$, $\boxed{\text{aceleración lineal} = a = l\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2}$

Respuesta:

a) $\boxed{\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\theta = 0} \Rightarrow \boxed{\theta = c_1 \text{ sen } \sqrt{\dfrac{g}{l}}\, t + c_2 \cos \sqrt{\dfrac{g}{l}}\, t.}$

Para g = 32, l = 2 $\Rightarrow$ $\boxed{\theta(t) = c_1 \text{ sen } 4t + c_2 \cos 4t}$

Para t = 0, θ = 5° = $\dfrac{5\pi}{180} = \dfrac{\pi}{36}$ radianes $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\pi}{36} = c_2}$

$\boxed{\dfrac{d\theta}{dt} = 4 c_1 \cos 4t - 4 c_2 \text{ sen } 4t}$

Para t = 0, $\dfrac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = 4 c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

$\therefore$ $\boxed{\theta(t) = \dfrac{\pi}{36} \cos 4t}$ ángulo que forma la cuerda con la vertical en el instante t.

b) frecuencia = f = $\dfrac{1}{T} = \dfrac{\sqrt{g}}{2\pi\sqrt{l}} = \dfrac{\sqrt{32}}{2\pi\sqrt{2}} = \dfrac{4}{2\pi} = \dfrac{2}{\pi}$ ciclos / seg.

c) Distancia recorrida = longitud de arco = S = l θ

T = $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ seg. por ciclo

si t = 0 , $\theta = \frac{\pi}{36}$ radianes

si t = $\frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{36}\cos\frac{4\pi}{2} = \frac{\pi}{36}$ radianes

$\therefore$ S = $4\, l\, \theta = 4 \cdot 2\ \frac{\pi}{36} = \frac{2\pi}{9}$ pies

d) $\theta = \frac{\pi}{36}$ cos 4t

v = $-\ l\ \frac{d\theta}{dt} = -2\ (-4\ \frac{\pi}{36}$ sen 4t) = $\frac{2\pi}{9}$ sen 4t

a = $l \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\ (-\ 4\ \frac{\pi}{36}$ sen 4t) = $2\ \frac{\pi^2}{81}$ sen^2 4t.

Centro de la trayectoria $\Rightarrow$ t = $\frac{\pi}{8}$

v = $\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2\pi}{9} sen\left(\frac{4\pi}{8}\right) = \frac{2\pi}{9}$ pies / seg.

a = $\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2\pi^2}{81} sen^2\left(4\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2\pi^2}{81}$ pies / seg^2.

---

3) Un péndulo simple vibra en un medio en el cual el amortiguamiento es proporcional a la velocidad instantánea. Si el medallón del péndulo pasa a través de la posición de equilibrio $\theta = 0$ en t = 0 con velocidad v_o, muestre que el ángulo θ que forma la cuerda del péndulo con la vertical es $\theta = \frac{v_o}{wl}\ e^{-\beta t}$ sen wt, donde $w = \sqrt{\frac{g}{l} - \beta^2}$

Respuesta

Sea $F_a = -\ m2\beta\, l\ \frac{d\theta}{dt}$, donde m es la masa del medallón, l es la longitud de la cuerda, $\beta^2 \leq \frac{g}{l}$

$m\, l\ \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta\, m\, l\ \frac{d\theta}{dt} + m\ \frac{g}{l}\ \theta = 0$

$\therefore\ \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta\ \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\ \theta = 0 \quad m^2 + 2\beta m + \frac{g}{l} = 0$

$$\theta = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - \frac{4g}{l}}}{2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \frac{g}{l}}}{1} = -\beta \pm \sqrt{\frac{g}{l} - \beta^2}\, i$$

$$\theta = e^{-\beta t}(c_1 \cos wt + c_2 \operatorname{sen} wt)\ ; \quad w = \sqrt{\frac{g}{l} - \beta^2}\ , \frac{g}{l} \geq \beta^2$$

$$t = 0\ ,\ \theta = 0 \ \Rightarrow\ c_1 = 0$$

$$t = 0\ ,\ l\,\frac{d\theta}{dt} = v_o \ \Rightarrow\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_o}{l} \ \Rightarrow\ c_2 = \frac{v_o}{lw}$$

$$\therefore\ \theta = \frac{v_o}{wl}\, l^{-\beta t} \operatorname{sen} wt$$

IV-Oscilaciones verticales de un cuerpo flotando en un líquido

Principio de Arquímedes

"Un objeto parcial o totalmente sumergido en un fluido es empujado hacia arriba por una fuerza igual al peso del fluido que desplaza, llamada fuerza neta".

Ejemplo

Una caja cúbica de 10 pies de lado, flota en agua quieta. Se observa que la caja oscila hacia arriba y abajo con período $\frac{1}{2}$ seg. ¿Cuál es su peso?

Nota: Densidad de agua quieta = 62,5 libras / pies^3

Respuesta

$$F = -\ F \text{ neta}$$

$$\frac{w}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt} = -\ F \text{ neta}$$

F neta = $x_{\text{pies}} \cdot 10_{\text{pies}} \cdot 10_{\text{pies}} \cdot 62{,}5$ libras / pies^3 (volumen desplazado)

F neta = 6.250 x libras. (Análogo a la fuerza restauradora del resorte vibrante)

$$\therefore\ \frac{w}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -\,6.250\,x$$

$$\therefore\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{6250 \cdot 32}{w}\, x = 0.$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{200.000x}{w} = 0.}$$

$$\boxed{x = c_1 \cos \sqrt{\frac{200.000}{w}} \pm + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{200.000}{w}}\ t.}$$ movimiento armónico simple

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{200.000}{w}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4\pi = \frac{\sqrt{200.000}}{\sqrt{w}} \Rightarrow w = \frac{200.000}{16\pi^2} = 1270 \text{ libras}$$

Observación

Si F neta = F_o x $\therefore \dfrac{w}{g}\dfrac{d^2x}{dt^2} = -F_o x$, $\dfrac{w}{g}\dfrac{d^2x}{dt^2} + F_o x = 0$

$\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{F_o g}{w} x = 0}$ $\boxed{x(t) = c_1 \cos \sqrt{\dfrac{F_o g}{w}}\, t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\dfrac{F_o g}{w}}\, t}$ (movimiento armónico simple)

Amplitud = A = $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

Período = T = $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{F_o g}{w}}} = \dfrac{2\pi\sqrt{w}}{\sqrt{g \cdot F_o}}$

Frecuencia = g = $\dfrac{1}{T} = \dfrac{\sqrt{g \cdot F_o}}{2\pi\sqrt{w}}$

Ejercicios resueltos

1.- Un cubo de 5 pies de lado y 500 libras de peso flota en agua quieta. Se empuja hacia abajo suavemente y se suelta para que ocurran oscilaciones. Encuentre el período y la frecuencia de las vibraciones.

Respuesta

W = 500 libras

F = x · 5 · 5 · 62,5 = 1562, 5 x

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g \cdot F}{w}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{32 \cdot 1562{,}5}{500}}} = \frac{\pi}{5} \text{ seg.}, \quad f = \frac{5}{\pi} \text{ ciclos / seg}$$

2.- Un cilindro de 4 pies de radio y 6 pies de altura, pesando 1000 libras, vibra en agua quieta con su eje vertical. Encuentre la frecuencia y el período de las vibraciones.

Respuesta

W = 1000

F = x pies · 16π pies^2 x 62,5 libras / pies^3

F = 3141,6 x libras

$$\frac{w}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -3141{,}6\, x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{3141{,}6x \cdot 32}{1000}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -100{,}5\, x, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 100{,}5\, x = 0$$

$m^2 + 100{,}5 = 0$, implica $m = \pm\ 10\, i$

x = A cos 10t + B sen 10t

$T = \dfrac{2\pi}{10} = \dfrac{\pi}{5} = 0{,}63$ o bien

$T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g \cdot F}{w}}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{100{,}5}} = \dfrac{2\pi}{10} = \dfrac{\pi}{5}$, luego $f = \dfrac{5}{\pi}$

3.- Un cilindro de radio *r* y de altura *h* y con peso w flota con un eje vertical en un líquido de densidad *P*, si se pone a vibrar, muestre que el período es $T = \dfrac{2}{r}\sqrt{\dfrac{\pi w}{\rho g}}$

Respuesta

$T = \dfrac{2\pi\sqrt{w}}{\sqrt{gF_o}}$ $F = x \cdot \pi r^2 \cdot \rho$

$$T = \frac{2\pi\sqrt{w}}{\sqrt{\pi r^2 \rho g}} = \frac{2\pi\sqrt{w}}{r\sqrt{\pi\rho g}} = \frac{2\pi\sqrt{w}}{r\sqrt{\pi}\sqrt{\rho g}} = \frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{w}}{r\sqrt{\rho g}} = \frac{2}{r}\frac{\sqrt{\pi w}}{\sqrt{\rho g}}$$

4.- Un cilindro vibra con un eje vertical en un líquido, se encuentra que la frecuencia de las vibraciones en el líquido es la mitad de aquella en el agua. Determine la densidad del líquido.

Respuesta

Por ejercicio anterior

$$f = \frac{\sqrt{g \cdot F_o}}{2\pi\sqrt{w}} = \frac{r\sqrt{\rho g}}{2\sqrt{\pi w}}$$

Frecuencia de las vibraciones en el líquido de densidad ρ (libras / pies^3)

$$f = \frac{r\sqrt{62{,}5 \cdot 32}}{2\sqrt{\pi w}} = \frac{r\sqrt{2000}}{2\sqrt{\pi w}}$$

$$\therefore \quad \frac{2r\sqrt{\rho g}}{2\sqrt{\pi w}} = \frac{r\sqrt{2000}}{2\sqrt{\pi w}} \Rightarrow 2\sqrt{\rho g} = \sqrt{2000}$$

$\therefore$ 4 ρg = 2000 $\Rightarrow$ ρg = 500 $\Rightarrow$ $\rho = \dfrac{500}{g} = \dfrac{500}{32}$ = 15,625 libras / pie^3.

UNIDAD 8: LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Definición

Sea f(t) una función definida para $t \geq 0$, entonces la integral

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-st}\ f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\ f(t)\,dt}$$

se llama transformada de Laplace de f, siempre que el límite exista.
Simbólicamente la transformada de Laplace de f se denota por L{f(t)} y como el resultado depende de s, escribiremos.

$$\boxed{L\ \{f(t)\} = F\ (s)}$$

Ejemplo

Calcular L{1}

Respuesta

$$L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\ (1)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\ dt = \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_0^b = \lim_{b\to\infty}\ -\frac{e^{-sb}}{s}+\frac{1}{s} = \frac{1}{s},\ s > 0.$$

Observación:

L es un operador lineal, en efecto:

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\ [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha\int_0^\infty e^{-st}\ f(t)dt + \beta\int_0^\infty e^{-st}\ g(t)dt = \alpha L(f(t)) + \beta L(g(t))$$

$$\therefore\ \boxed{L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha L\{f(t)\} + \beta L\{g(t)\}}$$

Condiciones suficientes para la existencia del L{f(t)}

La integral que define la transformada de Laplace no converge necesariamente.

Ejemplos

$L\left\{\frac{1}{t}\right\}$, $L\left\{e^{t^2}\right\}$ no existen

Las condiciones que garantizan la existencia de L{f(t)} son: que f sea continua, parte por parte, para $t \geq 0$ y que sea de orden exponencial para $t > T$.

f es **continua, parte por parte**, para $t \geq 0$, si en cualquier intervalo $0 \leq a \leq t \leq b$, existe a lo sumo un número finito de puntos t_k, con $k = 1,2,\ldots,n$, $(t_{k-1} < t_k)$, en los que f tiene discontinuidades finitas y es continua en cada intervalo abierto $t_{k-1} < t < t_k$.
f es **de orden exponencial** si existen c, M, T $>$ 0, tales que $|f(t)| \leq Me^{ct}$, para $t > T$

Ejemplos

f(t) = t, f(t) = e^{-t}, f(t) = 2 cos(t) son de orden exponencial para t > 0, pues, $|t| \leq e^t$, $|e^{-t}| \leq e^t$, $|2\cos t| \leq 2e^t$, t > 0

Teorema

Sea f(t) continua parte por parte para t ≥ 0 y de orden exponencial para t > T ; entonces L{f(t)} existe para s > c.

Demostración

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^t e^{-st} f(t)dt + \int_t^\infty e^{-st} f(t)dt = I_1 + I_2$$

I_1 existe, ya que puede escribirse como una suma de integrales sobre intervalos en los cuales f es continua.

I_2 existe ya que: $|I_2| \leq \int_t^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt \leq M\int_t^\infty e^{-st}e^{ct}\,dt = M\int_t^\infty e^{-(s-c)t}\,dt = -M\lim_{b\to\infty} \left.\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c}\right|_t^b =$

$M\dfrac{e^{-(s-c)t}}{s-c}$, s > c.

Nota

Las condiciones del teorema son suficientes pero no necesarios para la existencia de la transformada de Laplace, por ejemplo f(t) = $t^{-1/2}$ no es continua, parte por parte, para t ≥ 0; pero su transformada de Laplace existe.

Ejemplos

1) $L\{1\} = \frac{1}{s}$, s > 0

2) $$L\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}\,t\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\,t\,dt = \lim_{b\to\infty}\left.\left(\frac{e^{-st}}{s^2}(-st-1)\right)\right|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-sb}}{s^2}(-sb-1) - \frac{-(-0-1)}{s^2} = \frac{1}{s^2},\ s > 0$$

3) $$L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s-a)t}\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-(s-a)b}}{s-a} = \frac{1}{s-a}\ \text{ si } s > a.$$

Ejercicios propuestos:

Determinar las siguientes transformadas de Laplace.

1) $L\{e^{-3t}\}$ 2) L{sen 2t}
3) L{3t – 5 sen 2t} 4) $L\{t\,e^{-2t}\}$

5) $L\{t^2\ e^{-2t}\}$ 6) $L\{f(t)\}$, para $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3 \\ 2, & t \ge 3 \end{cases}$

Respuestas

1) Como $L\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$, si $s > a$

$\therefore\ L\{e^{-3t}\} = \dfrac{1}{s+3}$, si $s > -3$

2) $L\{\text{sen } 2t\} = \lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} \text{sen } 2t\, dt = \dfrac{2}{s^2+4}$, $s > 0$

3) $L\{3t - 5 \text{ sen } 2t\} = 3L(t) - 5L(\text{sen } 2t) = 3 \cdot \dfrac{1}{s^2} - 5 \cdot \dfrac{2}{s^2+4} = \dfrac{-7s^2+12}{s^2(s^2+4)}$, $s > 0$

4) $L\{t\, e^{-2t}\} = \lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} \cdot te^{-2t}\, dt = \dfrac{1}{(s+2)^2}$, $s > -2$

5) $L\{t^2\, e^{-2t}\} = \lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} \cdot te^{-2t}\, dt = \dfrac{1}{(s+2)^3}$, $s > -2$

6) $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^3 e^{-st} f(t)dt + \int_3^\infty e^{-st} f(t)dt$

$\lim\limits_{b\to\infty} 2\int_3^b e^{-st}\, dt = \lim\limits_{b\to\infty} \dfrac{2e^{-st}}{-s}\Big|_3^b = \lim\limits_{b\to\infty} \left[\dfrac{2e^{-sb}}{-s} + \dfrac{2e^{-3s}}{s}\right] = \dfrac{2e^{-3s}}{s}$, $s > 0$.

Lista de transformadas de Laplace

N°	f(t)	F (s) = L (f (t))
1	1	$\frac{1}{s}$, s > 0
2	t	$\frac{1}{s^2}$, s > 0
3	t^n , n = 0, 1, 2,….	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, s > 0
4	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, s > a
5	sen (at)	$\frac{a}{s^2+a^2}$, s > 0
6	cos (at)	$\frac{s}{s^2+a^2}$, s > 0
7	sen h (at)	$\frac{a}{s^2-a^2}$, s > | a |
8	cos h (at)	$\frac{s}{s^2-a^2}$, s > | a |
9	e^{at} sen (bt)	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, s > a
10	e^{at} cos (bt)	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, s > a
11	t sen (at)	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$, s > 0
12	t cos (at)	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$, s > 0

Ejercicio:

Calcular: $L\{3-5e^{2t}+4sent-7\cos 3t\}$

La transformada inversa

Si $L\{f(t)\} = F(s)$, entonces $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ es la transformada inversa de Laplace de F(s).

Nota: La transformada inversa de Laplace, de una función F(s) puede no ser única.

Ejemplos de transformadas inversas

1) $1 = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$

2) $t^n = L^{-1}\left\{\frac{n}{s^{n+1}}\right\}$, $n \in IN$

3) $e^{at} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$

4) $sen(at) = L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}$

5) $\cos(at) = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}$

6) $senh(at) = L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2-a^2}\right\}$

7) $\cosh(at) = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\}$

L^{-1} también es un operador lineal

$L^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha L^{-1}\{F(s)\} + \beta L^{-1}\{G(s)\}$

Ejemplos

1) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!} L^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{1}{24} t^4.$

2) $L^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\} = 3L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+7}\right\} + \frac{5}{\sqrt{7}} L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+7}\right\} = 3\cos\sqrt{7}t + \frac{5}{\sqrt{7}} sen\sqrt{7}t$

Nota

El uso de las fracciones parciales es muy importante en la búsqueda de transformadas inversas de Laplace.

Ejercicios

1) $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1/15}{s-1}-\frac{1/6}{s+2}+\frac{1/10}{s+4}\right\}$

$$= \frac{1}{15}\, L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{6}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{1}{10}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} = 15e^{t} - \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{-4t}$$

2) $$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} + \frac{E}{(s+2)^3}\right\} = L^{-1}\left\{-\frac{1/16}{s} + \frac{1/8}{s^2} + \frac{1/16}{(s+2)} - \frac{1/4}{(s+2)^3}\right\}$$

$$= -\frac{1}{16}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{1}{16}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}\right\} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{1}{8}t^2e^{-2t}$$

Nota

$$\boxed{\text{si } f(t) = t^{n-1}e^{-at} \quad , \quad F(s) = \frac{(n-1)!}{(s+a)^n}}$$

3) $$L^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1/8}{s} + \frac{3/4}{s^2} - \frac{1/2}{s^3} + \frac{-1/8 \quad -3/4}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = -\frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{3}{8}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}\cos 2t - \frac{3}{8}sen 2t$$

Observación

Si $f(t)$ es continua parte por parte para $t \geq 0$ y de orden exponencial para $t > T$, entonces

$$\boxed{\lim_{s\to\infty} L\ \{f(t)\} = 0}$$

Ejemplo

$F(s) = s^2$ no es la transformada de Laplace de ninguna función continua parte por parte, de orden exponencial, ya que $F(s) \to \infty$ cuando $s \to \infty$. Luego $L^{-1}\{F(s)\}$ no existe.

Propiedades operacionales de la transformada de Laplace

1) Teorema de traslación 1

si $L\{f\} = F(s)$, cuando $s > s_o$, entonces para cualquier constante $a \in IR$, se tiene:

$$\boxed{L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)\ ,\ s > s_o + a.}$$

Demostración:

$$L\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = F(s-a)$$

Ejemplo

Como L {cosh $\sqrt{8}t\} = \dfrac{s}{s^2-8}$, $\quad s > \sqrt{8}$ entonces

L { e^{-3t} cosh $\sqrt{8}t\} = \dfrac{s+3}{(s+3)^2-8}$, $\quad s > \sqrt{8}-3$

Recíproco del teorema

$\boxed{e^{at} f(t) = L^{-1} \{F(s-a)\}}$

Ejemplo

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+11}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^2+2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+3-3}{(s+3)^2+2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+2} - \frac{3}{(s+3)^2+2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+2}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2+2}\right\} = e^{-3t}\cos\sqrt{2}t - \frac{3}{\sqrt{2}}e^{-3t}sen\sqrt{2}t$$

Definición: La función escalón unitaria o función de Heaviside

(De gran aplicación en ingeniería en fuerzas externas o voltajes a un circuito que pueden desconectarse)

$$\boxed{U(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ 1, & t \ge a \end{cases}}$$

Ejemplos

1) U (t) = U (t – 0) = { 1 , t $\geq$ 0

2) $U(t-2) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2 \\ 1, & t \ge 2 \end{cases}$

3)f (t) = sen t U (t - 2π) , t $\geq$ 0

$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2\pi \\ sent, & t \ge 2\pi \end{cases}$ $\qquad U(t-2\pi) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2\pi \\ 1, & t \ge 2\pi \end{cases}$

4)f (t) = $(t-2)^3$ U(t – 2)

$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2 \\ (t-2)^3, & t \ge 2 \end{cases}$ $\qquad U(t-2) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2 \\ 1, & t \ge 2 \end{cases}$

---

2) Teorema de traslación 2

Si a > 0, entonces

$\boxed{L\{ f(t-a)\, U(t-a)\} = e^{-as}\, L(f\{t\}) = e^{-as}\, F(s)}$

Ejemplos

1) $L\{(t-2)^3\, U(t-2)\} = e^{-2s}\, L(t^3) = e^{-2s}\dfrac{3!}{s^4} = \dfrac{6}{s^4}e^{-2s}$

2) $L\{U(t-5)\} = e^{-5s}\, L(1) = \dfrac{e^{-5s}}{s}$

3) L {f (t)}, f (t) = 2 – 3 U (t – 2) + U (t – 3)

L {f (t)} = L (2) – 3 L (U (t – 2)) + L (U (t – 3)) = $\frac{2}{s} - 3\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}$

4) L {sen t U (t - 2π)} = L {sen (t - 2π) U (t - 2π)}, pues sen es periódica

= $e^{-2\pi s}$ L (sen t) = $\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$

Teorema de traslación 2 recíproco

Si a > 0 y f(t) = L^{-1} (F(s)), entonces $\boxed{f(t-a)\,U(t-a) = L^{-1}(e^{-as}F(s))}$

Ejemplo

$L^{-1}\left(\frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}}{s^2+9}\right)$ $\boxed{a = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad f(x) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+9}\right) = \frac{1}{3}\ \text{sen } 3t}$

$= \frac{1}{3}L^{-1}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)U(t-\pi/2) = \frac{1}{3}\text{sen } 3\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\ U\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}(\cos 3t)\ U\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

Nota

$L\{f(t)U(t-c)\} = e^{-sc}L\{f(t+c)\}$

---

3) Derivada de una transformada

Si L (f (t)) = F(s), entonces $\boxed{L(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s),\ n \in \mathbb{N}}$; $F^{(n)}(s) = \frac{d^nF(s)}{ds^n}$

Demostración **(para n = 1)**

Sea $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

derivando en ambos lados

$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st}\right)f(t)dt = \int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt = -L(t\,f(t))$

Nota: $\frac{d}{ds}\int_a^b G(s,t)dt = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial s}(s,t)dt$ (regla de Leibniz)

Ejemplos

1) $L(t \text{ sen } t) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$; s > 0

2) $L(t^2 \text{ sen } t) = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$, s > 0

3) $L^{-1}\left(\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right) = t \text{ sen } t$

4) $L^{-1}\left(\dfrac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}\right) = t^2$ sen t

Nota:

$\boxed{L^{-1}(F^{(n)}(s)) = (-1)^n \cdot t^n f(t)}$

Convolución

Si dos funciones f y g son continuas, parte por parte, para $t \geq 0$, entonces su convolución, denotada por $f * g$, está definida por:

$$\boxed{f * g = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau}$$

Ejemplo

La convolución de f (t) = e^t y g (t) = sen t es

$$e^t sen(t) = \int_0^t e^\tau sen(t-\tau)d\tau = \left[\frac{e^\tau}{2}\left(sen(t-\tau)+\cos(t-\tau)\right)\right]_0^t = \frac{e^t}{2} - \frac{(sen(t)+\cos(t))}{2} = \frac{1}{2}(-sen(t)-\cos(t)+e^t)$$

Nota:

La convolución, con frecuencia, es útil para resolver ecuaciones integrales donde la función desconocida a ser determinada está bajo el signo de la integral. Por otra parte, la convolución nos entrega un método para determinar transformadas inversas de ciertas funciones.

4) Teorema de la convolución

Sean f(t) y g(t) continuas parte por parte para $t \geq 0$ y de orden exponencial.
Entonces

$$\boxed{L\{f * g\} = L\{f(t)\}\, L\{g(t)\} = F(s)\, G(s)}$$

Ejemplo

$$L\left\{\int_0^t e^\tau sen(t-\tau)d\tau\right\} = L\{e^t\}\, L\{\text{sen } t\} = \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

Observación:

$\boxed{f * g = L^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\}}$

Ejemplo

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{s+4}\right\}$$

$L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-1}\right\} = e^t = f(t)$ $\qquad$ $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+4}\right\} = e^{-4t} = g(t)$

$$\therefore L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\right\} = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t e^\tau e^{-4(t-\tau)}d\tau = e^{-4t}\int_0^t e^{5\tau}d\tau = e^{-4t}\frac{1}{5}e^{5x}\Big|_0^t = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}e^{-4t}$$

(También se puede hacer por fracciones parciales)

5) Transformada de una función periódica

Sea f función periódica, con período T, T > 0 entonces f (t + T) = f (t), $\forall$ t $\geq$ 0

Teorema

Sea f(t) continua parte por parte para t $\geq$ 0 y de orden exponencial. Si f (t) es periódica de período T, entonces: $\boxed{L\,(f\,(t)) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}\,f(t)\,dt}$

Demostración :

Sea a) $f_T(t) = \begin{cases} f(t), \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 < t < T \\ 0, \quad fuera\ \ del\ \ intervalo \end{cases}$

b) $L\{f_T(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f_T(t)dt$

c) $f_T(t) = f_T(t) + f_T(t - T)\, U(t - T) + f_T(t - 2T)\, U(t - 2T) + \ldots\ldots$

$L\{f\} = L\{f_T\} + L\{f_T(t - T)\, U(t - T)\} + \ldots\ldots$

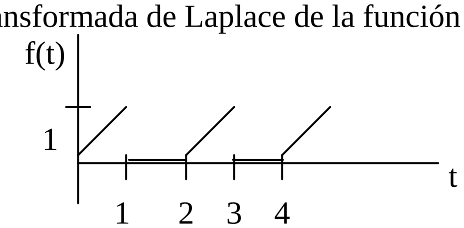
$L\{f\} = L\{f_T\} + L\{f_T\}e^{-sT} + \ldots\ldots$

$L\{f\} = \int_0^T e^{-st} f(t)dt\left[1 + e^{-sT} + e^{-s2T} + \ldots..\right] = \int_0^T e^{-st} f(t)dt \cdot \frac{1}{1-e^{-sT}}$

Serie geométrica con razón $r = e^{-sT}$, con suma (1/1 - r)

Ejemplo

Hallar la transformada de Laplace de la función periódica cuyo gráfico es :



Respuesta

f(t) = $\begin{cases} t & , \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & , \quad 1 \leq t < 2 \end{cases}$, fuera del intervalo f (t + 2) = f (t), T = 2 (período)

$$L\,(f\,(t)) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}\,f(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}tdt + \int_1^2 e^{-st}\cdot odt\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[-\frac{e^{-st}}{s} + \frac{1-e^{-st}}{s^2}\right]_0^1 = \frac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2(1-e^{-2s})}$$

6) Transformada de una derivada

Si f(t), f'(t), ….. , $f^{(n-1)}$ (t) son continuas para t $\geq$ 0 y de orden exponencial y si f^n (t) es continua parte por parte para todo t $\geq$ 0, entonces:

$\boxed{L\ \{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \ldots\ldots f^{(n-1)}(0)}$

en donde F(s) = L {f (t)}

Nota

a) L {f'} = s L (f) – f (0)
b) L {f''} = s^2 L (f) – s f (0) – f '(0)
c) L {f'''} = s^3 L (f) – s^2 f (0) – s f'(0) – f''(0)
d) L {f^{IV}} = s^4 L (f) – s^3 f(0) – s^2 f '(0) – s f''(0) – f '''(0)

Demostración de a):

$$L\{f'\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} e^{-st} f'(t)dt \qquad u = e^{-st} \quad dv = f'(t)dt$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[e^{-st} f'(t)\Big|_0^b + \frac{1}{s}\int_0^b e^{-st} f'(t)dt \right] \qquad du = \frac{e^{-st}}{-s} \quad v = f(t)$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[e^{-sb} f(b) - e^{0} f(0) + sL\{f\}\right]$$, pues $|f(b)| \le Me^{\alpha b}$, $-s + \alpha < 0$, $\alpha < s$

$$= sL\{f\} - f(0)$$

Ejemplo

Sea f (t) = t cos (at)

f' (t) = cos (at) – at sen (at)

f'' (t) = a sen (at) – a sen (at) – a^2t cos (at) = - 2a sen (at) – a^2 t cos (at)

$\therefore$ L{f''} = L { - 2a sen at – a^2 t cos at} = - 2a L { sen at} – a^2 L { t cos at}

$$= 2a \frac{a}{s^2 + a^2} - a^2 \frac{(s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)} = \frac{-a^2(3s^2 + a^2)}{(s^2 + a^2)^2}$$

Por otra parte

L {f''} = s^2 L (f) – sf (0) – f'(0) = s^2 L (t cos at) – s · 0 – 1

$$= s^2 \frac{(s^2 - a^2)}{(s^2 + a^2)^2} - 1 = \frac{-a^2(3s^2 + a^2)}{(s^2 + a^2)^2}$$

Aplicación de la transformada de Laplace a ecuaciones diferenciales

Consideremos las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

$$\boxed{y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \text{---} + a_n y(t) = F(t)}$$

con las condiciones iniciales $y(0) = A_0$, $y'(0) = A_1$, ---, $y^{(n-1)}(0) = A_{n-1}$

Procedimiento

Se aplica la transformación de Laplace a cada lado de la ecuación diferencial y se utilizan las propiedades de la transformada de Laplace y las condiciones iniciales, obteniéndose una ecuación algebraica en "s". Aplicando la transformación inversa se logra la solución de la ecuación diferencial.

$$\boxed{L(f^{n}) = s^n L(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) \ldots\ldots f^{n-1}(0)}$$

Ejercicios propuestos de aplicación de la transformada de Laplace en lasolución de Ec. Dif.

1) Resolver $y''(t) + y'(t) + y(t) = t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

2) Resolver $y'' + y = 16 \cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

3) Resolver $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -7$

4) Resolver $y'' - 3y' + 2y = 12 e^{4t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

5) Determinar la ecuación del movimiento de un resorte con constante $k = 16$, al cual está sujeta una masa de 1 libra y existe una fuerza externa f(t) y con condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

$$f(t) = \begin{cases} \cos 4t & , \quad 0 \le t < \pi \\ 0 & , \quad t \ge \pi \end{cases}$$

Indicación: $f(t) = \cos 4t - \cos 4t \, U(t - \pi)$

6) Resolver $y'' + 2y' + y = f(t)$ donde $f(t) = U(t-1) - 2U(t-2) + U(t-3) \wedge y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

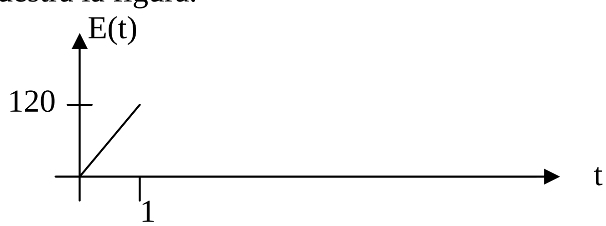
7) Resolver la siguiente ecuación integral.

$$f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(\tau) e^{t-\tau} d\tau$$

8) La corriente en un circuito con una resistencia R, una inductancia L y una capacitancia C, está regida (según las leyes de Kirchoff) por la ecuación integro-diferencial.

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = E(t), \qquad \text{donde E(t) es la tensión suministrada}$$

Determinar la corriente i(t) si $L = 0{,}1H$, $R = 20\ \Omega$, $C = 10^{-3}F$, $i(0) = 0$ y E(t) es la tensión aplicada como se muestra la figura.



Desarrollo de algunos ejercicios propuestos

1) Resolver $y''(t) + y'(t) + y(t) = t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Respuesta

$L(y''(t) + y'(t) + y(t)) = L(t)$

$L(y''(t)) + L(y'(t)) + L(y(t)) = L(t)$

$s^2 L(y) - s\,y(0) - y'(0) + s\,L(y) - y(0) + L(y) = \dfrac{1}{s^2}$

$L(y)\,[s^2 + s + 1] - 1 = \dfrac{1}{s^2}$

$L(y)\,[s^2 + s + 1] = 1 + \dfrac{1}{s^2}$

$L(y)\,[s^2 + s + 1] = \dfrac{s^2+1}{s^2}$

$$L(y) = \frac{s^2+1}{s^2(s^2+s+1)} = \frac{s^2}{s^2(s^2+s+1)} + \frac{1}{s^2(s^2+s+1)}$$

$$L(y) = \frac{1}{s^2+s+1} + \frac{1}{s^2(s^2+s+1)}$$

$$L(y) = \frac{1}{s^2+s+1} + \frac{A^{=-1}}{s} + \frac{B^{=1}}{s^2} + \frac{C^{=1}s + D^{=0}}{s^2+s+1}$$

$$L(y) = \frac{1}{s^2+s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+s+1}$$

$$L(y) = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$L(y) = \frac{1/2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s+1/2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}L^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}/2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{4}}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{s+1/2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{4}}\right)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}sen\frac{\sqrt{3}}{2}t + t - 1 + e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$\boxed{y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}sen\frac{\sqrt{3}}{2}t + \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + t - 1}$$

---

2) Resolver $y'' + y = 16\cos t$ $\qquad y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 0$

Respuesta

$L(y'') + L(y) = 16L(\cos t)$

$s^2 L(y) - s\,y(0) - y'(0) + L(y) = 16\dfrac{s}{s^2+1}$

$L(y)\,[s^2 + 1] = \dfrac{16s}{s^2+1}$

$L(y) = \dfrac{16s}{(s^2+1)^2}$

y = 8 $L^{-1}\left(\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}\right)$

y (t) = 8 t sen t

3) Resolver y" + 2y' + 5y = 0 , y(0) = 3 , y' (0) = - 7

Respuesta

L (y") + 2L(y') + 5 L (y) = 0

s^2 L(y) – s y (0) - y'(0) + 2s L (y) – 2y (0) + 5 L (y) = 0

L (y) [s^2 + 2s + 5] - 3s + 7 – 6 = 0

L(y) [s^2 + 2s + 5] = 3s – 1

$$\boxed{L(y) = \frac{3s-1}{s^2+2s+5}}$$

$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{3s-1}{s^2+2s+5}\right) = L^{-1}\left(\frac{3(s+1)-4}{(s+1)^2+2^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{3(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - \frac{4}{(s+1)^2+2^2}\right)$$

$$= 3\,L^{-1}\left(\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2}\right) - \frac{4}{2}L^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right) = 3\,e^{-t}\cos(2t) - 2\,e^{-t}\,\text{sen}\,(2t)$$

y(t) = e^{-t} (3 cos 2t – 2 sen 2t) = e^{-t} (3 cos 2 t – 2 sen 2t)

4) Resolver y" – 3y' + 2y = 12 e^{4t}, y (0) = 1 , y' (0) = 0

Respuesta

L (y") – 3 L (y') + 2 L (y) = 12 (e^{4t})

s^2 L (y) – s y (0) – y' (0) – 3 s L (y) + 3y (0) + 2 L (y) = 12 L (e^{4t})

L (y) [s^2 – 3s + 2] - s + 3 = 12 $\dfrac{1}{s-4}$

L (y) [s^2 – 3s + 2] = $\dfrac{12}{s-4}$ + s – 3

L (y) [s^2 – 3s + 2] = $\dfrac{12+(s-3)(s-4)}{s-4}$

$$L(y) = \frac{12+s^2-7s+12}{(s-4)(s^2-3s+2)} = \frac{s^2-7s+24}{(s-4)(s-2)(s-1)}$$

$$L(y) = \frac{s^2-7s+24}{(s-1)(s-2)(s-4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-4}$$

s^2 - 7s + 24 = A (s-2) (1-4) + B(s-1) (s-4) + C (s-1) (s-2)

s^2 – 7s + 24 = (A+B+C) s^2 + (- 6A – 5B – 3C) s + (8A + 4B + 2C)

Si s = 1, 1 – 7 + 24 = A · (- 1) (- 3), 18 = 3A, A = 6

Si $s = 2$, $4 - 14 + 24 = B \cdot 1 \cdot (-2)$, $14 = -2B$, $B = -7$

Si $s = 4$, $16 - 28 + 24 = C \cdot 3 \cdot 2$, $12 = 6C$, $C = 2$

$$\therefore \frac{s^2 - 7s + 24}{(s-1)(s-2)(s-4)} = \frac{6}{s-1} - \frac{7}{s-2} + \frac{2}{s-4}$$

$$\therefore \ L(y) = \frac{6}{s-1} - \frac{7}{s-2} + \frac{2}{s-4}$$

$$y(t) = 6L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - 7L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) + 2L^{-1}\left(\frac{1}{s-4}\right)$$

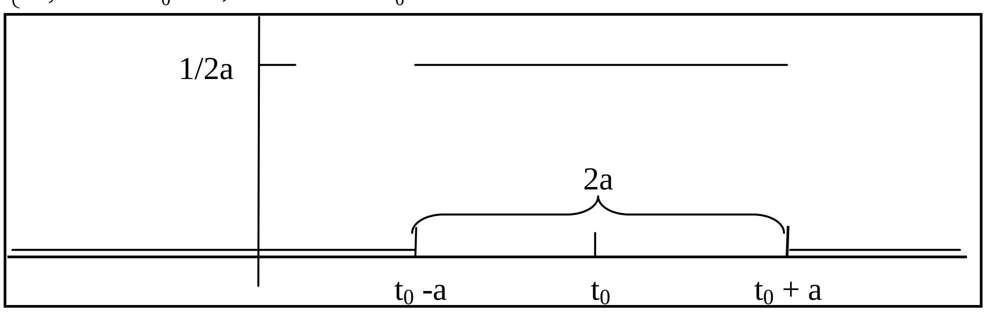
$$\boxed{y(t) = 6e^{t} - 7e^{2t} + 2e^{4t}}$$

La función delta de Dirac

Cuando en un sistema mecánico actúa una fuerza externa, de gran magnitud, pero lo hace durante un tiempo muy corto, tenemos una fuerza de impulso. Por ejemplo, una descarga eléctrica sobre un objeto, un golpe violento a un objeto. Este tipo de fuerza puede ser modelada por la siguiente función:

Función impulso unitario

$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & t_0 - a < t < t_0 + a \\ 0, & t \le t_0 - a, \quad o \quad t \ge t_0 + a \end{cases}$$



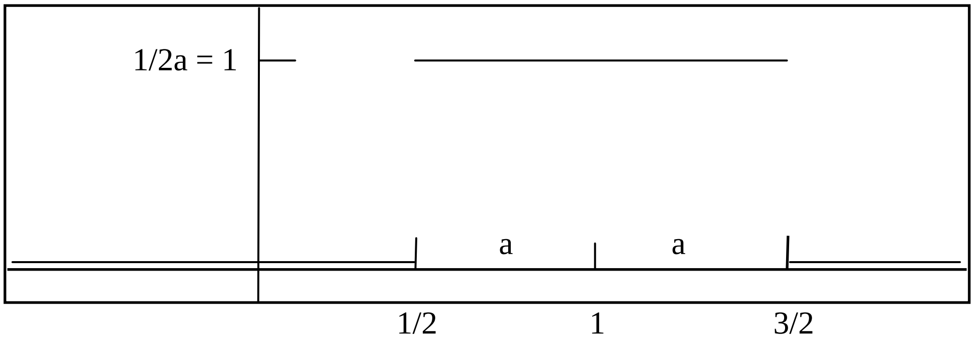
Esta función se llama impulso unitario, pues se cumple que $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t - t_0)\,dt = 1}$

Ejemplos:

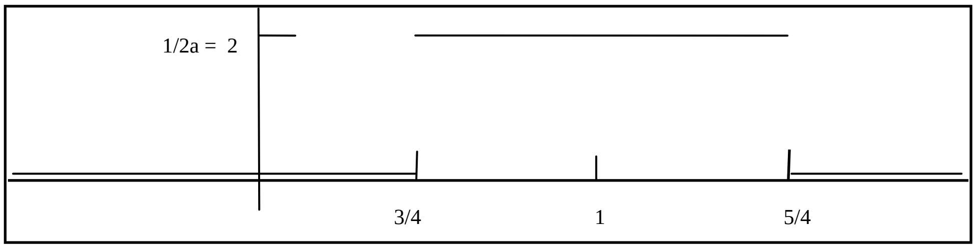
1) Sea:

$$\delta_{1/2}(t-1) = \begin{cases} 1, \dots\dots\dots \quad \dots \quad 1/2 < t < 3/2 \\ 0, \quad t \le 1/2 \vee \quad t \ge 3/2 \end{cases} \qquad a = ½$$

Su gráfica es la siguiente:



2) Sea: $\delta_{1/4}(t-1) = \begin{cases} 2, & 3/4 < t < 5/4 \\ 0, & t \le 3/4 \ \ o \ \ t \ge 5/4 \end{cases}$, a = ¼. Su gráfica es la siguiente:



<u>Definición: Función delta de Dirac</u>

Llamaremos función delta de Dirac a la expresión $\boxed{\delta(t - t_0) = \lim\limits_{a \to 0} \delta_a(t - t_0)}$

Que se puede caracterizar mediante las dos propiedades siguientes:

a) $\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$ b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\,dt = 1$

Transformada de la función impulso unitario:

$$\boxed{L\{\delta_a(t - t_0)\} = e^{-st_0}\left(\frac{e^{sa} - e^{-sa}}{2sa}\right)}$$

<u>Transformada de la función delta de Dirac</u>

$$\boxed{L\{\delta(t - t_0)\} = \lim_{a \to 0} L\{\delta_a(t - t_0)\} = e^{-st_0}}$$

<u>Ejercicio resueltos de la función delta de Dirac:</u>

Resolver la ecuación diferencial y “ + y = δ(t - 2π), sujeto a:

a) y(0) = 1, y’(0) = 0

b) y(0) = 0, y’(0) = 0

<u>Respuesta:</u>

a) Aplicando la transformada a la ecuación se tiene

$s^2\, L\{y\} - s + L\{y\} = e^{-2\pi s}$

L {y}= $\dfrac{s}{s^2+1}+\dfrac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$, luego y(t) = $\begin{cases} \cos(t), & 0 \le t < 2\pi \\ \cos(t)+sen(t), & t \ge 2\pi \end{cases}$

b) L {y}= $\dfrac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$, luego y(t) = sen(t - 2π)U(t-2π) = $\begin{cases} 0, & 0 \le t < 2\pi \\ sen(t), & t \ge 2\pi \end{cases}$

Propiedades de la función delta

1) Si f(t) es una función continua en t = t_0, entonces $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, f(t)dt = f(t_0)}$ (propiedad selectora). En efecto: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, f(t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0)$

2) Si f(t) = e^{-st}, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)e^{-st}dt = e^{-st_0}$ = L{δ(t – t_0)}

3) L{e^{at} δ(t – t_0)}= $e^{(a-s)t_0}$

4) Si t_0 = 0, entonces L{δ(t)} = 1.

5) $\int_{-\infty}^{1} \delta(t-a)dt = \begin{cases} 0 & t<a \\ 1 & t>a \end{cases} = U(t-a) \quad \therefore \delta(t-a) = U'(t-a)$

6) L{t δ(t – 1)} = e^{-s}

7) L{te^{-t} δ(t + 1)} = 0 pues (-1, 0) δ(t + 1) = 0, ∀ $t \ge 0$

Ejemplo 1: Evaluar $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\delta(t-\frac{\pi}{2})dt =$ I.

Como t_0 = π/2, f(t) = e^{-t^2}, luego f(t_0) = f(π/2) = $e^{-\frac{\pi^2}{4}}$, por lo tanto I = $e^{-\frac{\pi^2}{4}}$

Ejemplo 2: Evaluar $\int_{-\infty}^{t} \delta(u-t_0)du =$ I.

Como δ(u – t_0) = 0, si u < t_0, luego I = 0, para t < t_0. Si t > t_0, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u-t_0)du = 1$, luego I = U(t-$t_0$). Por lo tanto U'(t – t_0) = δ(t – t_0).

Ejemplo 3: L{e^{-3t} δ(t – π)}= $e^{-\pi(s+3)}$

Ejemplo 4: L{e^{t} δ(t – 2)}= $e^{-2(s-1)}$

Ejemplo 5: Resolver $y''+y = 4\delta(t-2\pi)$, tal que
a) y (0) = 1, y'(0) = 0
b) y (0) = 0, y'(0) =0

Respuesta

a) $s^2 L\{y\} - s + L\{y\} = 4e^{-2\pi s}$

$$L\{y\} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{4e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1} + \frac{4e^{-2\pi s}}{s^2+1}\right]$$

$$y(t) = \cos t + 4sen(t-2\pi)U(t-2\pi)$$

$$\therefore\ y(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t < 2\pi \\ \cos t + 4sent, & t > 2\pi \end{cases}$$

b) $L\{y\} = \dfrac{4e^{-2\pi s}}{s^2+1}$

$$y(t) = 4sen(t-2\pi)U(t-2\pi)$$

$$\therefore\ y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2\pi \\ 4sent, & t > 2\pi \end{cases}$$

UNIDAD 9: SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Definición

Llamaremos sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias al conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas de dos o más ecuaciones que contienen las derivadas de dos o más funciones incógnitas de una sola variable independiente.

Ejemplos:

Si x, y, z dependen de t, entonces

$$\left.\begin{aligned} 4\frac{d^2x}{dt^2} &= -5x+y \\ 2\frac{d^2y}{dt^2} &= 3x-y \end{aligned}\right| \qquad \text{y} \qquad \left.\begin{aligned} x'-3x+y'+z' &= 5 \\ x'-y'+2z' &= t^2 \\ x'+y'-6z' &= t-1 \end{aligned}\right|$$

son dos sistemas de ecuaciones diferenciales simultáneas.

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de funciones diferenciales x = f(t), y = g(t), z = h(t), etc. que satisfacen cada ecuación del sistema en algún intervalo I.

1) Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales mediante eliminación gaussiana.

1) El sistema se expresa mediante operadores
2) La matriz del sistema se lleva a la forma triangular, mediante operaciones elementales.
3) Se resuelve la última ecuación del sistema escalonado. El resultado se reemplaza en la penúltima ecuación y así hasta llegar a la primera ecuación.
4) El número de constantes arbitrarias presentes en la solución general del sistema, corresponde al grado del polinomio obtenido del determinante de los coeficientes.

Ejemplo 1:

1) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente, mediante eliminación gaussiana.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 2x \\ \frac{dx}{dt} &= 3y \end{aligned}\right|$$

Respuesta

$$\left.\begin{aligned} Dy &= 2x \\ Dx &= 3y \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} 2x - Dy &= 0 \\ Dx - 3y &= 0 \end{aligned}\right|$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -D \\ D & -3 \end{pmatrix} \quad F_2 \to 2F_2 - D\,F_1 \quad \begin{pmatrix} 2 & -D \\ 0 & D^2-6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} 2x - Dy = 0 \\ (D^2 - 6)y = 0 \end{array}\right|$$

$(D^2 - 6)y = 0 \Rightarrow m^2 - 6 = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{6}$

$\therefore \quad \boxed{y(t) = c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t}}$

Reemplazando en la primera ecuación

$$2x - \sqrt{6}c_1 e^{\sqrt{6}t} + \sqrt{6}c_2 e^{\sqrt{6}t} = 0$$

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{6}}{2} c_1 e^{\sqrt{6}t} - \frac{\sqrt{6}}{2} c_2 e^{-\sqrt{6}t}}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} c_1 e^{\sqrt{6}t} & - & \frac{\sqrt{6}}{2} c_2 e^{-\sqrt{6}t} \\ c_1 e^{\sqrt{6}t} & + & c_2 e^{-\sqrt{6}t} \end{pmatrix}$$

Nota

det $\begin{pmatrix} 2 & -D \\ D & -3 \end{pmatrix}$ = -6 + D^2 es un polinomio de grado 2

$\therefore$ Hay dos constantes arbitrarias en la solución general del sistema de ecuaciones.

Ejemplo 2:

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{array}{l} x' - 4x + y'' = t^2 \\ x' + x + y' = 0 \end{array}\right|$$

Respuesta

$$\left.\begin{array}{l} (D - 4)\,x + D^2\,y = t^2 \\ (D + 1)\,x + D\,y = 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{pmatrix} D-4 & D^2 & : & t^2 \\ D+1 & D & : & 0 \end{pmatrix} \quad F_2 \to F_2\,(D + 4) - F_1\,(D + 1)$$

$$\begin{pmatrix} D-4 & D^2 & : & t^2 \\ 0 & D(D-4) - D^2(D+1) & : & -2t - t^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D-4 & D^2 & : & t^2 \\ 0 & -D^3-4D & : & -2t-t^2 \end{pmatrix} \quad F_2 \to F_2$$

$$\begin{pmatrix} D-4 & D^2 & : & t^2 \\ 0 & D^3+4D & : & t^2+2t \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} (D-4)x + D^2 y = t^2 \\ \qquad (D^3+4D)y = t^2+2t \end{array}\right|$$

$\boxed{(D^3 + 4D)y = t^2 + 2t}$ (*)

<u>Solución complementaria:</u> $(D^3 + 4D)y = 0 \Rightarrow m^3 + 4m = 0 \Rightarrow m(m^2 + 4) \Rightarrow m = 0,\ m = \pm 2i$
$\boxed{y_c = c_1 + c_2 \cos 2t + c_3 \operatorname{sen} 2t}$

<u>Solución particular:</u> (coeficiente indeterminado)
$\boxed{y_p = at^3 + bt^2 + ct}$

$y'_p = 3a t^2 + 2bt + c$, $y''_p = 6at + 2b$, $y'''_p = 6a$

Reemplazando en (*) se tiene
$6a + 12at^2 + 8bt + 4c = t^2 + 2t$

$$\left.\begin{array}{r} 12a = 1 \\ 8b = 2 \\ 6a + 4c = 0 \end{array}\right| \Rightarrow a = \frac{1}{12},\ b = \frac{1}{4},\ c = -\frac{1}{8}$$

$$\therefore\ y_p = \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{8}$$

$$\therefore\ y = y_c + y_p = c_1 + c_2 \cos(2t) + c_3 sen(2t) + \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{8}$$

Eliminando y del sistema

$$\left.\begin{array}{l} (D-4)x + D^2 y = t^2 \\ (D+1)x + Dy = 0 \end{array}\right| \quad \cdot/D$$

Se tiene:

$[(D-4) - D(D+1)]x = t^2$

$[\,D - 4 - D^2 - D]x = t^2$

$\boxed{(D^2 + 4)x = -t^2}$ * *

<u>Solución complementaria:</u>
$(D^2 + 4)x = 0 \Rightarrow m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2i \Rightarrow\ x_c = c_4 \cos(2t) + c_5 \operatorname{sen}(2t)$
<u>Solución particular:</u>
$x_p = at^2 + bt + c$, $x'_p = 2at + b$, $x''_p = 2a$

Reemplazando en * *

$2a + 4at^2 + 4bt + 4c = -t^2$

$$\left.\begin{array}{r} 4a = -1 \\ 4b = 0 \\ 2a + 4c = 0 \end{array}\right| \Rightarrow a = -\frac{1}{4},\ b = 0,\quad c = \frac{1}{8}$$

$$x_p = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}$$

$$\boxed{x = x_c + x_p = c_4 \cos(2t) + c_5 \operatorname{sen}(2t) - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{8}}$$

c_4 y c_5 se pueden expresar en términos de c_2 y c_3 sustituyendo x e y en cualquiera de las ecuaciones del sistema

$\boxed{\text{si } x' + x + y' = 0,}$ entonces:

$$-2c_4 \operatorname{sen}(2t) + 2c_5 \cos(2t) - \frac{t}{2} + c_4 \cos(2t) + c_5 \operatorname{sen}(2t) - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{8} - 2c_2 \operatorname{sen}(2t) + 2c_3 \cos(2t)$$
$$+ \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} - \frac{1}{8} = 0$$

Coef de sen(2t) : $-2c_4 + c_5 - 2c_2 = 0$
Coef de cos(2t) : $2c_5 + c_4 + 2c_3 = 0$
Coef de t^2 : $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$
Coef. de t^1 : $0 = 0$
Coef de t^0 : $0 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} -2c_4 + c_5 = 2c_2 \\ c_4 + 2c_5 = -2c_3 \end{array}\right| \begin{array}{l} /\cdot -2 \\ /\cdot 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} -2c_4 + c_5 = 2c_2 \\ 2c_4 + 4c_5 = -4c_3 \end{array}\right|$$

$$5c_5 = -4c_3 + 2c_2 \Rightarrow c_5 = \frac{-4c_3 + 2c_2}{5}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4c_4 - 2c_5 = -4c_2 \\ c_4 + 2c_5 = -2c_3 \end{array}\right|$$

$$5c_4 = -4c_2 - 2c_3$$

$$c_4 = \frac{-4c_2 - 2c_3}{5}$$

$$\therefore \boxed{x(t) = -\frac{1}{5}(4c_2 + 2c_3)\cos(2t) + \frac{1}{5}(2c_2 - 4c_3)\operatorname{sen}(2t) - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{8}}$$

2) Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales usando regla de Cramer

Si L_1, L_2, L_3 y L_4, denotan operadores diferenciales de coeficientes constantes, entonces un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de orden n, en dos variables x e y pueden ser escrito como:

$$\begin{aligned} L_1x + L_2y &= g_1(t) \\ L_3x + L_4y &= g_2(t) \end{aligned}$$

Aplicando la regla de Cramer.

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} g_1 & L_2 \\ g_2 & L_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} L_1 & g_1 \\ L_3 & g_2 \end{vmatrix}$$

Si $\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} \neq 0$ es un operador diferencial de orden n, entonces el sistema puede ser descompuesto en dos ecuaciones diferenciales de orden n en x e y.

Si $\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} = 0$, entonces el sistema puede tener una solución que contiene un número cualquiera de constantes arbitrarias o no tener solución.

Procedimiento

Para aplicar la regla de Cramer se debe proceder de la siguiente manera:

1) Escribir el sistema mediante operadores diferenciales.
2) Ordenar el sistema según las funciones incógnitas involucradas. Los operadores se consideran como coeficientes de las funciones incógnitas.
3) Se aplica la regla de Cramer vista en sistemas de ecuaciones lineales (Álgebra lineal).
4) Se resuelven los determinantes.
5) Se obtienen dos ecuaciones diferenciales de orden n en x e y.
6) Se resuelve cada ecuación con solución complementaria y solución particular.
   La ecuación complementaria y por lo tanto la solución complementaria de cada una de estas ecuaciones diferenciales es la misma.
7) Como *x* e *y* contienen *n* constantes, aparecen en total 2*n* constante.
8) El número total de constantes independientes que deben aparecer en la solución del sistema es n.

Ejemplo 1:

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= 3x - y - 1 \\ y' &= x + y + 4e^t \end{aligned}$$

Respuesta

$$\begin{array}{l} (D-3)x + y = -1 \\ -x + (D-1)y = 4e^t \end{array}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} D-3 & 1 \\ -1 & D-1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4e^t & D-1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} D-3 & 1 \\ -1 & D-1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D-3 & -1 \\ -1 & 4e^t \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{array}{l} (D-2)^2 x = 1 - 4e^t \\ (D-2)^2 y = -1 - 8e^t \end{array}$$

Por métodos usuales

$$x = x_c + x_p = c_1 e^{2t} + c_2 t\, e^{2t} + \frac{1}{4} - 4e^t$$

$$y = Y_c + Y_p = c_3 e^{2t} + c_4 t\, e^{2t} - \frac{1}{4} - 8e^t$$

Reemplazando x e y es la ecuación $y' = x + y + 4e^t$

Se tiene $(c_3 - c_1 + c_4)e^{2t} + (c_4 - c_2)t\, e^{2t} = 0 \Rightarrow c_4 = c_2$ y $c_3 = c_1 - c_4 = c_1 - c_2$

$$\therefore x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 + e^{2t} + \frac{1}{4} - 4e^t$$

$$y(t) = (c_1 - c_2)e^{2t} + c_2\, t\, e^{2t} - \frac{1}{4} - 8e^t$$

Ejemplo 2:

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{array}{r} 2x' + y' - y = t \\ x' + y' = t^2 \end{array} \quad \text{sujeto a } x(0) = 1,\ y(0) = 0$$

Respuesta:

Aplicando operadores se tiene el sistema siguiente

$$\begin{array}{l} 2Dx + (D-1)y = t \\ Dx + Dy = t^2 \end{array}$$

Aplicando regla de Cramer queda:

$$\therefore \begin{vmatrix} 2D & D-1 \\ D & D \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} t & D-1 \\ t^2 & D \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2D & D-1 \\ D & D \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 2D & t \\ D & t^2 \end{vmatrix}$$

Luego, se tiene el sistema

$$1)\begin{vmatrix} 2D & D-1 \\ D & D \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} t & D-1 \\ t^2 & D \end{vmatrix}$$
$$2)\begin{vmatrix} 2D & D-1 \\ D & D \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 2D & t \\ D & t^2 \end{vmatrix}$$

1) $(2D^2 - D^2+D)x = D(t) - (D-1)(t^2)$
2) $(2D^2 - D^2+D)y = 2D(t^2) - D(t)$

1) $(D^2+D)x = 1-2t + t^2$
2) $(D^2+D)y = 4t - 1$

Resolviendo la ecuación 1) $(D^2 + D)x = t^2 - 2t +1$, se tiene:

$\boxed{x'' + x' = t^2 - 2t +1}$

Solución Complementaria:

$m^2 + m = 0 \Rightarrow m(m+1) = 0 \Rightarrow m_1 = 0 \quad m_2 = -1$

$x_c = c_1 + c_2 e^{-t}$

Solución Particular:

Como $F(t) = t^2 - 2t +1$, entonces
$x_p = at^2 + bt + c \quad /\cdot t$
$x_p = at^3 + bt^2 + ct$
$x_p' = 3at^2 + 2bt + c$
$x_p'' = 6at + 2b$

Reemplazamos en la ecuación diferencial $x'' + x' = t^2 - 2t +1$, y se tiene
$6at + 2b + 3at^2 + 2bt + c = t^2 - 2t +1$
$3a = 1 \Rightarrow \boxed{a=1/3}$
$6a + 2b = -2 \Rightarrow 2 + 2b = -2 \Rightarrow \boxed{b = -2}$
$2b + c = 1 \Rightarrow c = 1-2b \Rightarrow \boxed{c = 5}$
$\boxed{x_p = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 5t}$ es la solución particular, luego

Solución General:

$$\boxed{x = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 5t}$$

Ahora consideramos la ecuación diferencial 2) $(D^2 + D)y = 4t - 1$, y se tiene:

$\boxed{y'' + y' = 4t - 1}$

Solución Complementaria:

$m^2 + m = 0 \Rightarrow m(m+1) = 0 \Rightarrow m_1 = 0 \quad m_2 = -1$

$y_c = c_3 + c_4 e^{-t}$

Solución Particular:

Como F(t) = 4t – 1 , entonces

$y_p = at + b \quad /\cdot t$

$y_p = at^2 + bt$

$y_p' = 2at + b$

$y_p'' = 2a$

Reemplazamos en la ecuación diferencial y''+y' = 4t – 1 , y se tiene

$2a + 2at + b = 4t - 1$

$2a = 4 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$2at + b = -1 \Rightarrow b = -1 - 2a \Rightarrow \boxed{b = -5}$

$\boxed{y_p = 2t^2 - 5t}$ es la solución particular, luego

Solución General:

$$\boxed{y = c_3 + c_4 e^{-t} + 2t^2 - 5t}$$

Por lo tanto la solución del sistema queda de la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 5 \\ y(t) = c_3 + c_4 e^{-t} + 2t^2 - 5t \end{array}\right|$$

Reemplazando x(t), y(t) en la ecuación 2x' + y' – y = t , se tiene

$$-2c_2 e^{-t} + 2t^2 - 8t + 10 - c_4 e^{-t} + 4t - 5 - c_3 - c_4 e^{-t} - 2t^2 + 5t = t$$

$$\therefore \left.\begin{array}{r} (-2c_2 - -2c_4)e^{-t} = 0 \\ 5 - c_3 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow c_4 = -c_2 \quad , \quad c_3 = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 5 \\ y(t) = 5 - c_2 e^{-t} + 2t^2 - 5t \end{array}\right|$$

Aplicando condiciones iniciales: x (0) = 1, y (0) = 0

Se tiene

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 1 \\ 5 - c_2 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow c_2 = 5, \quad c_1 = -4$$

$\therefore$ la solución del sistema dado es

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= -4 + 5t - 2t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 5e^{-t} \\ y(t) &= 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t} \end{aligned}}$$

---

3) Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales por el método de la Transformada de Laplace

Cuando en un sistema de ecuación diferencial de coeficientes constantes se especifican condiciones iniciales, se puede aplicar la transformada de Laplace a cada ecuación y se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas.

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} 2x' + y' - y &= t \\ x' + y' &= t^2 \end{aligned} \qquad \text{sujeto a} \quad x(0) = 1, \; y(0) = 0$$

Respuesta

$$\begin{aligned} L(2x' + y' - y) &= L(t) \\ L(x' + y') &= L(t^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2s\,L(x) - 2x(0) + s\,L(y) - y(0) - L(y) &= \frac{1}{s^2} \\ sL(x) - x(0) + s\,L(y) - y(0) &= \frac{2}{s^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(1) \quad 2s\,L(x) + (s-1)\,L(y) = 2 + \frac{1}{s^2} \\ &(2) \quad s\,L(x) + s\,L(y) = 1 + \frac{2}{s^3} \qquad / -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s\,L(x) + (s-1)\,L(y) &= 2 + \frac{1}{s^2} \\ -2s\,L(x) + -2s\,L(y) &= -2 - \frac{4}{s^3} \end{aligned}$$

$$L(y)[s - 1 - 2s] = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3}$$

$$L(y) = \frac{s-4}{s^3(-s-1)} \qquad \boxed{L(y) = \frac{4-s}{s^3(s+1)}}$$

$$\frac{4-s}{s^3(s+1)} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s+1}$$

$$\frac{4-s}{s^3(s+1)} = \frac{5}{s}-\frac{5}{s^2}+\frac{4}{s^3}-\frac{5}{s+1}$$

$$\therefore \quad y(t) = 5\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-5L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+2L^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}-5L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$\boxed{y(t) = 5 - 5t + 2t^2 - 5\,e^{-t}}$$

Aplicando este resultado en la ecuación

2 $\boxed{s\,L(x) + s\,L(y) = 1 + \frac{2}{s^3}}$

$$L(x) + L(y) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^4}$$

$$L(x) = -\,L(y) + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^4} \quad / \; L^{-1}$$

$$\boxed{x(t) = -\,y(t) + L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{2}{s^4}\right\}}$$

$$x(t) = -5 + 5t - 2t^2 + 5e^{-t} + 1 + \frac{2}{3!}\,t^3$$

$$\boxed{x(t) = -4 + 5t - 2t^2 + \frac{1}{3}\,t^3 + 5\,e^{-t}}$$

$\therefore$ la solución del sistema dado es

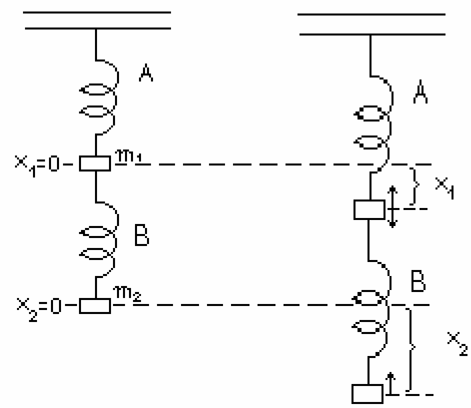
$$x(t) = -4 + 5t - 2t^2 + \frac{1}{3}\,t^3 + 5\,e^{-t}$$

$$y(t) = 5 - 5t + 2t^2 - 5\,e^{-t}$$

APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1) Resortes acoplados:

Supongamos que dos masas m_1 y m_2 están sujetas a dos resortes A y B, de masas insignificantes, cuyas constantes son k_1 y k_2 respectivamente. A su vez, los dos resortes están conectados como se indica en el dibujo:



Donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son los desplazamientos verticales de las masas con respecto a sus posiciones de equilibrio.
Cuando el sistema se encuentra en movimiento, el resorte B está sujeto tanto a un alargamiento como a un acortamiento, luego su alargamiento neto es $x_2 – x_1$.
Por la ley de Hooke, los resortes A y B ejercen sobre m_1 las fuerzas $–k_1x_1$ y $k_2(x_2 – x_1)$ respectivamente. Si no hay fuerza externa ni fuerzas amortiguadoras, entonces
la fuerza neta que actúa sobre m_1 es $F = –k_1x_1 + k_2(x_2 – x_1)$
la fuerza neta que actúa sobre m_2 es $F = –k_2(x_2 – x_1)$

Por lo tanto se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{l} m_1x_1''=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1) \\ m_2x_2''=-k_2(x_2-x_1) \end{array}\right|$$

Ejemplo:

Suponga que dos masas $m_1 = 1$ y $m_2 = 1$ están sujetas a dos resortes A y B, cuyas constantes son $k_1 = 6$ y $k_2 = 4$ respectivamente, conectados como se indica en la figura. Determinar los desplazamientos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de las masas, si $x_1(0) = 0$, $x'_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x'_2(0) = -1$.

Respuesta:

De acuerdo a los datos, se tiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x_1''+10x_1-4x_2=0 \\ -4x_1+x_2''+4x_2=0 \end{array}\right| \qquad \begin{array}{ll} x_1(0)=0 & x_2(0)=0 \\ x_1'(0)=1 & x_2'(0)=-1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} L(x_1'')+10L(x_1)-4L(x_2)=0 \\ L(x_2'')-4L(x_1)+4L(x_2)=0 \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} s^2L(x_1)-sx_1(0)-x_1'(0)+10L(x_1)-4L(x_2)=0 \\ s^2L(x_2)-sx_2(0)-x_2'(0)-4L(x_1)+4L(x_2)=0 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{ll} L(x_1)[s^2+10]-4L(x_2)=1 & /\cdot[s^2+4] \\ L(x_1)[-4]+L(x_2)[s^2+4]=-1 & /\cdot 4 \end{array}$$

$$L(x_1)=\frac{s^2}{(s^2+10)(s^2+4)-16}=\frac{s^2}{(s^4+14s^2+24)}$$

$$L(x_1)=\frac{s^2}{(s^2+2)(s^2+12)}=\frac{-1/5}{(s^2+2)}+\frac{6/5}{(s^2+12)}$$

$$x_1(t)=-\frac{1}{5\sqrt{2}}L^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right)+\frac{6}{5\sqrt{12}}L^{-1}\left(\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}\right)$$

$$\boxed{x_1(t)=-\frac{\sqrt{2}}{10}\left(sen\ \sqrt{2}t\right)+\frac{\sqrt{3}}{5}\left(sen\ 2\sqrt{3}t\right)}$$

Despejando $L(x_2)$ de la ecuación:

$$\boxed{L(x_1)[s^2+10]-4L(x_2)=1}$$

se tiene:

$$L(x_2)=\frac{L(x_1)[s^2+10]-1}{4}$$

$$L(x_2)=\frac{s^2}{(s^2+2)(s^2+12)}\cdot\frac{(s^2+10)}{4}-\frac{1}{4}=\frac{s^2(s^2+10)-(s^2+2)(s^2+12)}{4(s^2+2)(s^2+12)}=\frac{-s^2-6}{(s^2+2)(s^2+12)}$$

$$L(x_2)=-\frac{2/5}{(s^2+2)}-\frac{3/5}{(s^2+12)}$$

$$x_2=L^{-1}\left(\frac{-2/5}{s^2+2}\right)-L^{-1}\left(\frac{3/5}{s^2+12}\right)$$

$$x_2=-\frac{2}{5\sqrt{2}}L^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right)-\frac{3}{5\sqrt{12}}L^{-1}\left(\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}\right)$$

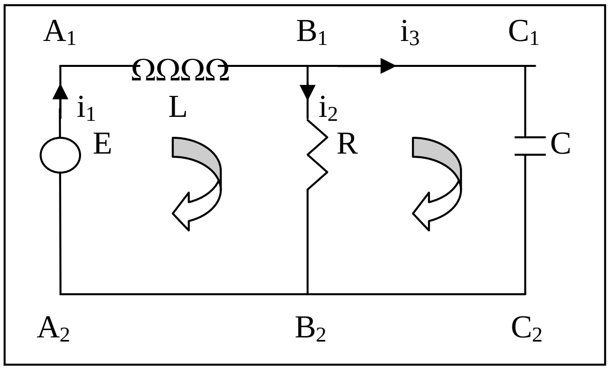
$$\boxed{x_2(t)=-\frac{\sqrt{2}}{5}sen\left(\sqrt{2}t\right)-\frac{\sqrt{3}}{10}sen\left(2\sqrt{3}t\right)}$$

<u>Solución:</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1(t)=-\frac{\sqrt{2}}{10}sen\left(\sqrt{2}t\right)+\frac{\sqrt{3}}{5}sen\left(2\sqrt{3}t\right) \\ x_2(t)=-\frac{\sqrt{2}}{5}sen\left(\sqrt{2}t\right)-\frac{\sqrt{3}}{10}sen\left(2\sqrt{3}t\right) \end{array}}$$

2) Redes eléctricas:
Un sistema eléctrico con más de un circuito simple da origen a un sistema de ecuaciones diferenciales. Aplicando la primera y segunda ley de Kircchoff se puede plantear el sistema de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo:
Dado el siguiente sistema eléctrico (red eléctrica).



Determinar i_1, i_2, i_3 , si E = 60 voltios, L = 1 henrio, R = 50 ohmios, C = 10^{-4} faradios y se dan las condiciones iniciales $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$.

Respuesta:
Del dibujo tenemos las siguientes ecuaciones:

1) $i_1 = i_2 + i_3$, aplicando primera ley de Kircchoff en el nodo B_1.
2) $E(t) = L\, i'_1 + Ri_2$, aplicando segunda ley de Kircchoff en el circuito $A_1B_1B_2A_2A_1$
3) $0 = -Ri_2 + q_3 / C$, aplicando segunda ley de Kircchoff en el circuito $B_1C_1C_2B_2B_1$.

Por lo tanto, planteamos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} L\dfrac{di_1}{dt} + Ri_2 = E(t) \\ RC\dfrac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0 \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{r} i_1' + 50i_2 = 60 \\ 50\cdot 10^{-4} i_2' + i_2 - i_1 = 0 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{r} i_1(0) = 0 \\ i_2(0) = 0 \end{array}\right\} \text{ condiciones iniciales}$$

$$\left.\begin{array}{r} L(i_1') + 50L(i_2) = 60L(1) \\ 50\cdot 10^{-4} L(i_2') + L(i_2) - L(i_1) = 0 \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{r} sL(i_1) - i_1(0) + 50L(i_2) = \dfrac{60}{s} \\ \dfrac{1}{200} sL(i_2) - \dfrac{1}{200} i_2(0) + L(i_2) - L(i_1) = 0 \end{array}\right| \quad /\cdot 200$$

$$\boxed{\begin{array}{r} sL(i_1) + 50L(i_2) = \dfrac{60}{s} \\ -200L(i_1) + (s+200)L(i_2) = 0 \end{array}} \quad \begin{array}{l} /\cdot 200 \\ /\cdot s \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} 200sL(i_1) + 10000L(i_2) &= \frac{12000}{s} \\ -200sL(i_1) + s(s+200)L(i_2) &= 0 \end{aligned}\right|$$

$$L(i_2) = \frac{12000}{s(10000 + s(s+200))} = \frac{12000}{s(s+100)^2}$$

$$L(i_2) = \frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s+100} - \frac{120}{(s+100)^2}$$

$$i_2(t) = \frac{6}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{6}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+100}\right\} - 120L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+100)^2}\right\}$$

$$\boxed{i_2(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t}}$$

Reemplazando en la ecuación

$$\boxed{sL(i_1) + 50L(i_2) = \frac{60}{s}}$$

Se tiene

$$sL(i_1) + 50 \cdot \frac{12000}{s(s+100)^2} = \frac{60}{s}$$

$$L(i_1) = \frac{60s + 12000}{s(s+100)^2} = \frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s+100} - \frac{60}{(s+100)^2}$$

$$i_1(t) = \frac{6}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{6}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+100}\right\} - 60L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+100)^2}\right\}$$

$$\boxed{i_1(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t}}$$

<u>Solución:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t} \\ i_2(t) &= \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t} \\ i_3(t) &= i_1 - i_2 = 60te^{-100t} \end{aligned}}$$

3) Problemas de mezclas:

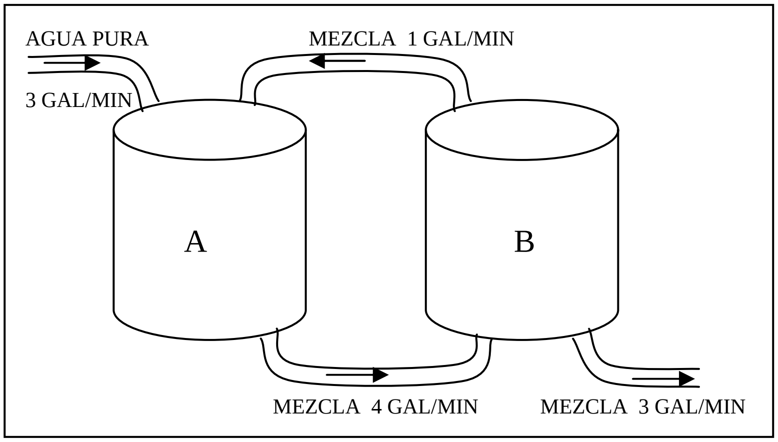
Los problemas de mezclado donde intervienen más de un depósito dan origen a un sistema de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo:

Un tanque A contiene 50 galones (gal.) de agua en los cuales se disuelven 25 libras de sal. Un segundo tanque B contiene 50 gal de agua pura. Se bombea líquido hacia y desde los tanques, en las proporciones indicadas en la figura.

a) Deducir las ecuaciones diferenciales para $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que den las libras de sal que hay en un instante cualquiera en los tanques A y B respectivamente.

b) Resolver el sistema para $x_1(t)$ y $x_2(t)$.



Respuesta:

Planteamos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = \dfrac{x_2}{50} - \dfrac{2}{25}x_1 \\ x_2' = \dfrac{2}{25}x_1 - \dfrac{2}{25}x_2 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{r} x_1(0) = 25 \\ x_2(0) = 0 \end{array}\right\} \text{ condiciones iniciales}$$

$$\begin{array}{l} L(x_1') = \dfrac{1}{50}L(x_2) - \dfrac{2}{25}L(x_1) \\ L(x_2') = \dfrac{2}{25}L(x_1) - \dfrac{2}{25}L(x_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} sL(x_1) - x_1(0) = \dfrac{1}{50}L(x_2) - \dfrac{2}{25}L(x_1) & /\cdot 50 \\ sL(x_2) - x_2(0) = \dfrac{2}{25}L(x_1) - \dfrac{2}{25}L(x_2) & /\cdot 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50sL(x_1) - 1250 = L(x_2) - 4L(x_1) \\ 25sL(x_2) = 2L(x_1) - 2L(x_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} L(x_1)[50s+4] - L(x_2) = 1250 & /\cdot 2 \\ L(x_1)[-2] + L(x_2)[25s+2] = 0 & /\cdot (50s+4) \end{array}$$

$$L(x_2)\left[(25s+2)(50s+4)-2\right]=2500$$

$$L(x_2)=\frac{2500}{1250s^2+200s+6}=\frac{1250}{625s^2+100s+3}$$

$$L(x_2)=\frac{1250}{(25s+2)^2-1}=\frac{1250}{(25s+1)(25s+3)}$$

$$L(x_2)=\frac{625}{(25s+1)}+\frac{-625}{(25s+3)}$$

$$x_2=625\ L^{-1}\left\{\frac{1}{25s+1}\right\}-625\ L^{-1}\left\{\frac{1}{25s+3}\right\}$$

$$x_2(t)=625\ L^{-1}\left\{\frac{1/25}{s+1/25}\right\}-625\ L^{-1}\left\{\frac{1/25}{s+3/25}\right\}$$

$$x_2(t)=625\cdot\frac{1}{25}\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/25}\right\}-625\cdot\frac{1}{25}\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3/25}\right\}$$

$$\boxed{x_2(t)=25e^{\frac{-t}{25}}-25e^{\frac{-3t}{25}}}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$\boxed{-2L(x_1)+L(x_2)\left[25s+2\right]=0}$$

se tiene

$$L(x_1)=\frac{L(x_2)\left[25s+2\right]}{2}$$

$$L(x_1)=\frac{1250\left[25s+2\right]}{2(25s+1)(25s+3)}=\frac{625\left[25s+2\right]}{(25s+1)(25s+3)}$$

$$L(x_1)=\frac{625/2}{25s+1}+\frac{625/2}{25s+3}$$

$$x_1=\frac{625}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{25s+1}\right)+\frac{625}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{25s+3}\right)$$

$$x_1=\frac{625}{2\cdot 25}L^{-1}\left(\frac{1}{s+\frac{1}{25}}\right)+\frac{625}{2\cdot 25}L^{-1}\left(\frac{1}{s+\frac{3}{25}}\right)$$

<u>Solución:</u>

$$\boxed{\begin{aligned}x_1(t)&=\frac{25}{2}e^{-\frac{3}{25}t}+\frac{25}{2}e^{-\frac{1}{25}t}\\ x_2(t)&=25e^{-\frac{1}{25}t}-25e^{-\frac{3}{25}t}\end{aligned}}$$

UNIDAD 10: SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Consideremos el sistema de forma normal o canónica

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)\, x_1 + a_{12}(t)\, x_2 + \ldots + a_{1n}(t)\, x_n + f_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)\, x_1 + a_{22}(t)\, x_2 + \ldots + a_{2n}(t)\, x_n + f_2(t) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)\, x_1 + a_{n2}(t)\, x_2 + \ldots + a_{nn}(t)\, x_n + f_n(t)
\end{aligned}$$

donde a_{ij} y f_i son funciones continuas en un intervalo común I, $\forall$ i, j.
Si $f_i(t) = 0$, $\forall\, i = 1,\ldots, n$, el sistema se llama **homogéneo.**
Si existe $f_k(t) \neq 0$, el sistema se llama **no homogéneo**.

Reducción de una ecuación diferencial lineal de orden n a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales

Dada la ecuación

$$\boxed{\frac{d^n y}{dt^n} = -\frac{a_0}{a_n} y - \frac{a_1}{a_n} y' - \ldots - \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)} + f(t)}$$

y sean $y = x_1$, $y' = x_2$, $y'' = x_3$,.................., $y^{(n-1)} = x_n$

$\therefore$ $y' = x'_1 = x_2$, $y'' = x'_2 = x_3$, ... , $y^{(n-1)}(x) = x'_{n-1} = x_n$ y $y^{(n)} = x'_n$

$$\therefore \quad \begin{aligned}
x'_1 &= x_2 \\
x'_2 &= x_3 \\
x'_3 &= x_4 \\
&\vdots \\
x'_{n-1} &= x_n \\
x'_n &= -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 - \ldots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n + f(t)
\end{aligned}$$

Ejemplo

Reducir la ecuación diferencial $2y''' - 6y'' + 4y' + y = \text{sen } t$ a la forma normal de un sistema de ecuaciones diferenciales.

Respuesta

$$y''' = -\frac{1}{2} y - 2y' + 3y'' + \frac{1}{2} \text{sen } t$$

sea $y = x_1$, $y' = x_2$, $y'' = x_3$

$$\therefore \quad \begin{aligned}
x'_1 &= y' = x_2 \\
x'_2 &= y'' = x_3
\end{aligned}$$

$x'_3 = y'''$

$\therefore$

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_3 \\ x'_3 &= -\frac{1}{2}x_1 - 2x_2 + 3x_3 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \end{aligned}$$

Forma matricial de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

El sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \dots + a_{1n}(t)\,x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \dots + a_{2n}(t)\,x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \dots + a_{nn}(t)\,x_n + f_n(t) \end{aligned}$$

Se puede escribir en la forma matricial

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}}_{F}$$

Luego podemos escribir el sistema $\boxed{\frac{dX}{dt} = A\,X + F(t)}$ o bien $\boxed{X' = A\,X + F}$

Si el sistema es homogéneo, escribiremos $\boxed{\frac{dX}{dt} = A(t)\,X}$ o bien $\boxed{X' = A\,X}$

Ejemplo

El sistema no homogéneo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x + 5y + e^t - 2t \\ \frac{dy}{dt} &= 4x - 3y + 10t \end{aligned}$$

Puede ser escrito como:

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t - 2t \\ 10t \end{pmatrix}$$

O bien $X' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} t$

O bien $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}t$

Vector solución en un intervalo I :

Es cualquier matriz columna $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

Cuyos elementos son funciones diferenciables y tal que satisface el sistema en el intervalo.

Ejemplo

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$ es solución de $X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}X$

En efecto

$X' = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix}$

$\therefore AX = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} = X'$

Problema de valor inicial

Sea $t_o \in I$ y sean

$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix}$ y $X_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ donde u_i = cte $\forall$ i = 1, ..., n

Entonces el problema: Resolver $\dfrac{dX}{dt}$ = A(t) X + F(t), sujeto a: X (t_o) = X_0, es un problema de valor inicial en I.

Observaciones:

1) Si los elementos de A(t) y F(t) son funciones continuas en un intervalo común I, que contiene al punto t_0. Entonces existe una solución única del problema de valor inicial en el intervalo.

2) Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son vectores solución del sistema homogéneo $X' = AX$, entonces $X = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_kX_k$ es también solución $\forall\ c_i$ constante arbitraria.

3) Sean $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$,..., $X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$

n vectores solución del sistema homogéneo $X'=AX$ en un intervalo I.
$X_1, X_2, \ldots, X_n$ son ℓi en I $\Leftrightarrow$ $W(X_1, X_2, \ldots, X_n) \neq 0$. (WRONSKIANO) $\forall\ t \in I$.

$$W(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo

$X_1 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$ son soluciones ℓ. i. $\forall t \in IR$, pues

$W(X_1, X_2) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{vmatrix} = 8\ e^{4t} \neq 0.$ $\forall$ t.

---

4) Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un conjunto de soluciones ℓ.i. del sistema $X' = AX$ en I, entonces la solución general del sistema en I viene dada por :

$\boxed{X = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n}$, donde c_i es constante arbitraria $\forall$i.

Ejemplo

Como $X_1 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$ y $X_2 = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$ son ℓ.i. y son solución de $X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X$,

entonces

$X = c_1X_1 + c_2X_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$ es la solución general del sistema homogéneo.

---

5) Una solución particular X_p en un intervalo I, del sistema no homogéneo $X' = AX + F$, es cualquier vector que no contiene parámetros arbitrarios y tal que sus elementos son funciones que satisfacen el sistema.

Ejemplo

$X_p = \begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema no homogéneo

$X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 12t-11 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\forall t \in IR$

En efecto

$X'_p = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} y, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X_p + \begin{pmatrix} 12t-11 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12t-11 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = X'_p$

Nota.
Se puede aplicar el método de los coeficientes indeterminados si F(t) es una matriz y cuyos elementos son constantes, polinomios, funciones exponenciales, senos y cosenos o bien sumas de ellos. En caso de otras funciones, se puede aplicar variación de parámetros.

Observación:
Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ es un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo $X' = AX$ en I y sea X_p cualquier vector solución del sistema no homogéneo $X' = AX + F$ en I, entonces $\boxed{X = c_1 X_1 + \ldots + c_k X_k + X_p}$ es también solución del sistema no homogéneo en I. $\forall$ c_i constantes arbitrarias.

6) Solución general del sistema **X' = A X + F**
Sea X_p = vector solución particular del sistema no homogéneo en I. (sin constantes arbitrarias).
Sea $X_c = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_n X_n$ la solución general del sistema homogéneo en I. Entonces la solución general del sistema no homogéneo en I se define como

$$\boxed{X = X_c + X_p}$$

solución complementaria   solución particular

Ejemplo

Dado el sistema $\boxed{X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 12t-11 \\ -3 \end{pmatrix}}$

$X_p = \begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix}$ solución particular. $\forall$ t $\in$ I.

$X_c = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$ solución complementaria $\forall$ t $\in$ I..

$X = X_c + X_p = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} + \begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix}$ es la solución general, $\forall$ t $\in$ IR.

7) Matriz fundamental del sistema **X' = AX**

Si $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad, X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$

Es un conjunto de n vectores solución ℓ. i. del sistema homogéneo en I , entonces

$\Phi\ (t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$ es una matriz fundamental del sistema en I.

Ejemplo

Para el ejemplo anterior

$$\Phi\ (t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

Observación

Si Φ (t) es una matriz fundamental del sistema homogéneo X' = AX en I, entonces $\exists\ \Phi^{-1}$ (t), $\forall$ t $\in$ I.

Ejemplo

$$\Phi^{-1}\ (t) = \frac{1}{8e^{4t}} \begin{pmatrix} 5e^{6t} & -3e^{6t} \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

8) La solución general del sistema X' = AX, viene dada por X = Φ (t)C, donde Φ (t) es la matriz fundamental del sistema homogéneo en un intervalo I y C es la matriz columna

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Solución de sistemas lineales homogéneos mediante valores propios

Sea X' = AX un sistema homogéneo en forma matricial, donde A es una matriz de constantes, de orden n x n, tal que tiene:

a) Valores propios reales distintos

Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son n valores propios reales distintos de la matriz A y si $k_1, k_2, ..., k_n$ son los correspondientes vectores propios. Entonces la solución general de sistema X' = AX en IR, está dada por: $\boxed{X = c_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 k_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n k_n e^{\lambda_n t}}$

Ejemplos

1) Resolver el sistema

$$\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{array}$$

Respuesta:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Det(A - λ I) = $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

$\Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \wedge \lambda_2 = 4$ valores propios

Para $\boxed{\lambda_1 = -1}$, $k_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es vector propio si

$(A - \lambda I)\, k_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x + 3y = 0,$

si $y = 1$ $x = 1 \Rightarrow k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vector propio

Para $\boxed{\lambda_2 = 4}$, $k_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es vector propio si

$(A - \lambda I)\, k_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2x + 3y = 0 \Rightarrow$ si $y = 2,\ x = 3$

$\Rightarrow k_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ vector propio

k_1 y k_2 son $\ell.i.$

$\therefore X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$ y $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$ son $\ell.i.$

$\therefore X = c_1 X_1 + c_2 X_2$ es solución general

$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}}$ o bien $\boxed{\begin{array}{l} x = c_1 e^{-t} + c_2 3 e^{4t} \\ y = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{4t} \end{array}}$

2) Resolver el sistema

$$\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -4x + y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = y - 3z \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Respuesta

det $(A - \lambda I) = -(\lambda + 3)(\lambda + 4)(\lambda - 5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -4,\ \lambda_3 = 5$

$\Rightarrow k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore \quad X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

b) Valores propios complejos

Sea $\boxed{X' = AX}$ un sistema homogéneo de ecuación diferencial lineal de primer orden. Sea A la matriz de los coeficientes del sistema (orden n x n). Sea λ_1 un valor propio complejo de A,

$\therefore$ $\boxed{\lambda_1 = \alpha + i\beta}$ y sea k_1 el vector propio correspondiente a λ_1.

Sean $\boxed{B_1 = \frac{1}{2}\left[k_1 + \overline{k_1}\right]}$ y $\boxed{B_2 = \frac{i}{2}\left[k_1 - \overline{k}_1\right]}$ vectores reales

Entonces

$$\boxed{\begin{aligned} X_1 &= (B_1 \cos\beta t + B_2 sen\beta t)e^{\alpha t} \\ X_2 &= (B_2 \cos\beta t - B_1 sen\beta t)e^{\alpha t} \end{aligned}}$$

son soluciones $\ell.i.$ en IR.

Ejemplos

1) Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + 8y \\ \frac{dy}{dt} &= -x - 2y \end{aligned}\right|$$

Respuesta

$$\det (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2i$$

Para $\boxed{\lambda_1 = 2i}$, $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2-2i & 8 \\ -1 & -2-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{-x - 2y - 2iy = 0}$$

$$x = -2y - 2iy$$

si $y = -1$, $x = 2 + 2i$ $\Rightarrow$ $k_1 = \begin{pmatrix} 2+2i \\ -1 \end{pmatrix}$

$$B_1 = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2+2i \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-2i \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = B_1$$

$$B_2 = \frac{i}{2}\left[\begin{pmatrix} 2+2i \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2-2i \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = B_2$$

$$\therefore \; X = c_1\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\cos(2t) + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} sen(2t)\right)e^0 + c_2\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(2t) - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} sen(2t)\right)e^0$$

$$X = c_1\begin{pmatrix} 2\cos 2t - 2sen 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2\cos 2t - 2sen 2t \\ sen 2t \end{pmatrix}$$

---

2) Resolver $X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} X$

Respuesta

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i$$

$$\Rightarrow k_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \; X = c_1\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B_1}\cos t + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B_2} sent\right]e^t + c_2\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B_2}\cos t - \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B_1} sent\right]e^t$$

$$X = c_1\begin{pmatrix} 2\cos t \\ -sent \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} -2sent \\ -\cos t \end{pmatrix}e^t$$

---

c) Valores propios repetidos

Supongamos el sistema homogéneo $X' = AX$ tiene una matriz A de orden $n \times n$ con un valor propio λ con multiplicidad $m \leq n$. Entonces se pueden dar casos:

i) A tiene m vectores propios $\ell.i.$ correspondiente al valor propio λ. En este caso, una solución del sistema contiene la combinación lineal:

$$\boxed{c_1 k_1 e^{\lambda t} + c_2 k_2 e^{\lambda t} + \ldots + c_m k_m e^{\lambda t}}$$

ii) Si al valor propio λ le corresponde solo un vector propio, entonces se pueden encontrar m soluciones l.i. de la forma:

$$\boxed{\begin{aligned} X_1 &= k_1 e^{\lambda_1 t} \\ X_2 &= k_1 t e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_1 t} \\ &\vdots \\ X_m &= k_{1_1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_1 t} + k_2\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_1 t} + \ldots + k_m e^{\lambda_1 t} \end{aligned}}$$

En donde los k_i son vectores columnas. K_1 corresponde al vector propio asociado al valor propio λ, K_2 es un vector columna que se obtiene de la ecuación $(A-\lambda I)K_2 = K_1$, K_3 es un vector columna que se obtiene de la ecuación $(A-\lambda I)K_3 = K_2$, y así sucesivamente.

Ejemplos

1) Resolver el sistema $X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} X$

Respuesta

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)^2 \cdot (\lambda - 5) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \ \wedge \ \lambda_3 = 5$ valores propios

Para $\boxed{\lambda_1 = -1}$, se tiene $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x - y + z = 0 \Rightarrow$ si $y = 1 \wedge z = 0$, $x = 1$

$\therefore k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ si $y = 1$ y $z = 1$, $x = 0$ $\Rightarrow$ $k_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\boxed{\lambda_3 = 5}$ $\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $k_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

2) Resolver el sistema $X' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} X$

Respuesta

$\det(A - \lambda I) = (\lambda + 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -3$ son los valores propios, luego -3 es valor propio con multiplicidad dos.

$(A + 3I)K = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$ es una solución

sea $K = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

$\boxed{(A + 3I)\,P = K} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} 6p_1 - 18p_2 = 3 \\ 2p_1 - 6p_2 = 1 \end{array}\right| \Rightarrow 2p_1 - 6p_2 = 1 \Rightarrow$ si $p_1 = \dfrac{1}{2}$, $p_2 = 0 \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \boxed{X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t\, e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}}$ es otra solución

$\therefore \boxed{X = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}\right]}$ es la solución general.

---

3) Resolver el sistema $X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X$

Respuesta

det $(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$ con multiplicidad tres.

$\boxed{(A - 2I)\,K = 0} \quad \Rightarrow \quad K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{(A - 2I)\,P = k} \quad \Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{(A - 2I)\,Q = P} \quad \Rightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$

$$\therefore X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}\right] + c_3 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} e^{2t}\right]$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneos

Dado el sistema no homogéneo

$$\boxed{\mathbf{X' = AX + F(t).}}$$

La solución general del sistema viene dada por

$$\boxed{X = X_c + X_p}$$

donde $\boxed{X_c}$ es la solución general del sistema homogéneo asociado

$$\boxed{X' = AX}$$

que se puede obtener mediante valores propios
y $\boxed{X_p}$ es una solución particular del sistema no homogéneo

$$\boxed{X' = AX + F(t)}$$

que se puede obtener por uno de los métodos que se indican a continuación.

Método de los coeficientes indeterminados

Se aplica si F(t) es una matriz cuyos elementos son constantes, polinomios, funciones exponenciales, senos y cosenos o bien sumas finitas de estas funciones. Si F(t) tiene términos en X_c entonces se debe agregar el término multiplicado por una mínima potencia de t.

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - 3y + 4 \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 2y - 1 \end{aligned}\right| \qquad \text{en } -\infty < t < \infty$$

Respuesta

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{F(T)}$$

Solución Complementaria

Valores propios de A: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$

Vectores propios de A: $k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x_c = c_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 k_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^0 + c_2 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^0 + c_2 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

Solución Particular

$$F(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} t$, pues $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ está en x_c

$$x'_p = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Reemplazando en el sistema

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+ct \\ b+dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+3ct-3b-3dt \\ 2a+2ct-2b-2dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} c = 3a+3ct-3b-3dt+4 \\ d = 2a+2ct-2b-2dt-1 \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} -4 = 3a+3ct-c-3b-3dt \\ 1 = 2a+2ct-2b-2dt-d \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} -4 = (3a-c-3b)+(3c-3d)t \\ 1 = (2a-2b-d)+(2c-2d)t \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{rl} 3a-c-3b & = -4 \\ 3c-3d & = 0 \\ 2a-2b-d & = 1 \\ 2c-2d & = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} c & = & d \\ 3a-3b-c & = & -4 \\ 2a-2b-c & = & 1 \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\, a-b-c/3 & = -4/3 \\ 2)\, a-b-c/2 & = 1/2 \end{array}\right|$$

Restando 1) – 2)

$$-c/3 + c/2 = -4/3 - 1/2$$

$$-c\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{-8-3}{6}$$

$$c\left(\frac{3-2}{6}\right) = -\frac{11}{6}$$

$$c = -\frac{11}{6}\cdot\frac{6}{1} = -11$$

$$d = -11$$

$$a-b+\frac{11}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a-b = -\frac{11}{2}+\frac{1}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$a-b = -5$$

$$a = b-5$$

Si $b = -10 \quad a = -15$

$$\boxed{x_p = \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \end{pmatrix} t}$$

Solución General

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} t$$

Ejercicios resueltos

1) Resolver el sistema $\boxed{X' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}}$ en $-\infty < t < \infty$

Respuesta

Solución del sistema homogéneo

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm i}$$

$$\lambda = i \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1-i & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$- x + (1 - i)\, y = 0$

$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = +1 - i \quad \Rightarrow \quad k_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{B_1 = \frac{1}{2}\left[k_1 + \overline{k_1}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B_1}$$

$$\boxed{B_2 = \frac{i}{2}\left[k_1 - \overline{k_1}\right] = \frac{i}{2}\left[\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} -2i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B_2}$$

$$\boxed{X_1 = B_1 \cos t + B_2 \operatorname{sen} t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t$$

$$\boxed{X_2 = B_2 \cos t - B_1 \operatorname{sen} t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t$$

$$\boxed{X_c = c_1 \begin{pmatrix} \cos t + \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}}$$

Solución particular

$F(t) = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ es un vector constante

Sea $X_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Reemplazando en el sistema, queda:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -a + 2b - 8 \\ 0 = -a + b + 3 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} a = 14 \\ b = 11 \end{array} \Rightarrow X_p = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$X = X_c + X_p = c_1\begin{pmatrix} \cos t + sent \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t - sent \\ -sent \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

---

2) Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = 6x + y + 6t \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y - 10t + 4 \end{array}\right| , \ t \in IR$$

Respuesta:

Solución del sistema homogéneo

$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)(3 - \lambda) - 4 = 18 - 6\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 4 = (\lambda - 7)(\lambda - 2)$$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 7 \ \wedge \ \lambda_2 = 2$

Para $\boxed{\lambda_1 = 7}$; $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-x + y = 0.$ Si $y = 1,$ $x = 1 \Rightarrow$ $k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\boxed{\lambda_2 = 2}$; $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$4x + y = 0.$ Si $y = 4,$ $x = -1 \Rightarrow$ $k_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\therefore X_c = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{7t} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}e^{2t}$$

Solución particular

$$F(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ -10t+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Sea $X_p = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

Como $X' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 t + a_1 \\ b_2 t + b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t+4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a_2 t + 6a_1 + b_2 t + b_1 + 6t \\ 4a_2 t + 4a_1 + 3b_2 t + 3b_1 - 10t + 4 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 6a_2 + b_2 + 6 \\ a_2 = 6a_1 + b_1 \\ 0 = 4a_2 + 3b_2 - 10 \\ b_2 = 4a_1 + 3b_1 + 4 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} 1)\ 6a_2 + b_2 = -6 \\ 2)\ 6a_1 + b_1 - a_2 = 0 \\ 3)\ 4a_2 + 3b_2 = 10 \\ 4)\ 4a_1 + 3b_1 - b_2 = -4 \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 6a_2 + b_2 = -6 \\ 3)\ 4a_2 + 3b_2 = 10 \end{array}\right| \quad / \ -3 \qquad \left.\begin{array}{l} -18a_2 - 3b_2 = 18 \\ 4a_2 + 3b_2 = 10 \end{array}\right|$$

-

$$14a_2 = 28$$

$a_2 = \dfrac{28}{-14} = -2 \quad \Rightarrow \quad -8 + 3b_2 = 10 \Rightarrow 3b_2 = 18 \Rightarrow \ b_2 = 6$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ 6a_1 + b_1 + 2 = 0 \\ \\ 4)\ 4a_1 + 3b_1 - 6 = -4 \end{array}\right| \Rightarrow \qquad \left.\begin{array}{l} 6a_1 + b_1 = -2 \\ \\ 4a_1 + 3b_1 = 2 \end{array}\right| \qquad /\cdot -3$$

$$\left.\begin{array}{l} -18a_1 - 3b_1 = 6 \\ 4a_1 + 3b_1 = 2 \end{array}\right|$$

$-14a_1 = 8 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{-8}{14} = \dfrac{-4}{7}$

$b_1 = -2 - 6a_1 = -2 + \dfrac{24}{7} = - \dfrac{14+24}{7} = \dfrac{10}{7}$

$\therefore\ X_p = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -4/7 \\ 10/7 \end{pmatrix} \Rightarrow X = X_c + X_p$

$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -4/7 \\ 10/7 \end{pmatrix}$

---

3) Determinar la forma del vector solución particular x_p para:

a) $\frac{dx}{dt} = 5x + 3y - 2e^{-t} + 1$
$\frac{dy}{dt} = -x + y + e^{-t} - 5t + 7$

b) $\frac{dx}{dt} = 5x + 3y - 2e^{2t} + 1$
$\frac{dy}{dt} = -x + y + e^{2t} - 5t + 7$

Respuesta

a) $X_c = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t}$ Solución del sistema homogéneo.

$F(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\therefore\ X_p = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

b) $X_c = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t}$ Solución del sistema homogéneo

$F(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\therefore\ X_p = \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

Método de variación de parámetros

Dado el sistema no homogéneo $\boxed{X' = AX+F}$, su solución general es $X = X_c + X_p$, donde

$$X_c = \phi(t)C = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & .. & .. & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ : \\ C_n \end{pmatrix}$$

Para encontrar una solución particular, X_p, del sistema no homogéneo $\boxed{X' = AX+F}$, se cambian las constantes C_i por funciones $u_i(t)$, tal que

$$X_p = \phi(t)U(t) = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & .. & .. & X_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ : \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$ sea solución particular de $\boxed{X' = AX+F}$

$X_p = \phi(t)\int \phi^{-1}(t)F(t)dt$, donde $\phi(t)$ es la <u>matriz fundamental del sistema</u>, cuyas columnas son los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_n$, soluciones del sistema y C es un vector columna formado por constantes

$$\phi(t) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

<u>Nota 1:</u>
Para calcular la integral indefinida de la matriz columna $\phi^{-1}(t)F(t)$, se integra cada uno de sus elementos.

<u>Nota 2:</u>
La solución general de $\boxed{X' = AX + F(t)}$ es $\boxed{X = \phi(t)C + \phi(t)\int_0 \phi^{-1}(t)F(t)dt}$

<u>Nota 3:</u>
La solución del problema de valor inicial $\boxed{X' = AX + F(t)}$, $x(t_0) = x_0$ viene dada por

$$\boxed{X = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0 + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)F(s)ds}$$

<u>Ejemplo 1:</u>
<u>Hallar la solución general del sistema no homogéneo.</u>

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - 3y + 4 \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 2y - 1 \end{aligned}}$$

<u>Respuesta</u>
Del ejemplo del método de los coeficientes indeterminados se tiene que:

$$X_c = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}e^t, \text{ luego } \phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2}e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix} \text{ y } \phi^{-1}(t) = -\frac{2}{e^t}\begin{pmatrix} e^t & -\frac{3}{2}e^t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2e^{-t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$x_p = \phi(t)\int \phi^{-1}(t)F(t)dt$$

$$x_p = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2}e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix}\int\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2e^{-t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}dt$$

$$x_p = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2}e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -11 \\ 10e^{-t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2}e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11t \\ -10e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$x_p = \begin{pmatrix} -11t-15 \\ -11t-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} t$$

$$\therefore \boxed{X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} t}$$

Ejemplo 2:
Resolver el problema de valor inicial

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - 3y + 4 \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 2y - 1 \end{aligned}\right| \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Respuesta:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2\, 3/2 - 15 \\ 0 &= C_1 + C_2 - 10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 \quad + C_2 &= 10 \\ C_1 + 3/2\, C_2 &= 15 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 10 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -11t-15 \\ -11t-10 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 15e^t - 11t - 15 \\ 10e^t - 11t - 10 \end{matrix}$$

Otra forma de resolver :

$$\boxed{X = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0 + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)F(s)ds}$$

Para $t_0 = 0$, $X_0 = X(t_0) = X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore \ \phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2}e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix}$$

$$\therefore \ \phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2e^{-t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}, \ \phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{X(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0 + \phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)F(s)ds}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2}e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2}e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2e^{-s} & -2e^{-s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}ds$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2}e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} -11 \\ 10e^{-s} \end{pmatrix}ds = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2}e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11 \\ -10e^{-s} \end{pmatrix}\Bigg|_0^t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2}e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11t \\ -10e^{-t}+10 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -11t - 15 + 15e^t \\ 10e^t - 10 - 11t \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3 :

Hallar la solución del problema de valor inicial

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}X + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Respuesta

La solución general es

$$X = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix},$$ aplicando las condiciones iniciales, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{27}{50} + \frac{1}{4} \\ -\frac{21}{50} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$0 = c_1 + c_2 + -\frac{27}{50} + \frac{1}{4} \Rightarrow c_1 + c_2 = \frac{27}{50} - \frac{1}{4} = \frac{54-25}{100} = \frac{29}{100}$$

$$0 = c_1 - 2c_2 - \frac{21}{50} + \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 - c_2 = \frac{21}{50} - \frac{1}{2} = \frac{21-25}{50} = -\frac{4}{50}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = \dfrac{29}{100} \\ c_1 - 2c_2 = -\dfrac{8}{100} \end{array}\right|$$

$$c_2 + 2c_2 = \frac{29}{100} + \frac{8}{100} = \frac{37}{100}$$

$$c_2 = \frac{37}{300}, \quad c_1 = \frac{29}{100} - \frac{37}{300} = \frac{50}{300} = \frac{1}{6}$$

Solución particular

$$X = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/6 \\ 37/300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = \frac{e^{-2t}}{6} + \frac{e^{-5t}\cdot 37}{300} + \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t}$$

$$x_2(t) = \frac{e^{-2t}}{6} - \frac{2\cdot 37}{300}e^{-5t} + \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \phi(t)\int_0^t \phi^{-1}(s)F(s)ds$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \phi(t)\int_0^t \phi^{-1}(s)F(s) = \phi(t)\int_0^t \phi^{-1}(s)F(s)ds$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2s} & \frac{1}{3}e^{2s} \\ \frac{1}{3}e^{5s} & -\frac{1}{3}e^{5s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3s \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{25} - \frac{1}{12} \end{pmatrix}\right]$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} + \frac{37}{300} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{5}t - \frac{1}{25} - \frac{1}{12}e^{-t} + \frac{37}{300}e^{-5t} \\ t - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{2}{5}t + \frac{2}{25} + \frac{2}{12}e^{-t} - \frac{37}{150}e^{-5t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{-2t}}{6} + \frac{37}{300}e^{-5t} + \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{e^{-2t}}{6} - \frac{37}{150}e^{-5t} + \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales por el método de la matriz exponencial

Sabemos que la ecuación escalar $x' = kx$ tiene como solución $x(t) = x_0 e^{kt}$.

El sistema lineal $X' = AX$, cuya matriz de coeficiente $\boldsymbol{A}$ tiene valor propio λ, con el vector propio **v**, tiene como solución al vector solución $X(t) = ve^{\lambda t}$.

Definiremos las exponenciales de las matrices en tal forma que $X(t) = e^{At}$ es una solución matricial de la ecuación diferencial matricial $X' = AX$, donde A es una matrix de coeficientes de *n x n*.

Definición:

La exponencial e^z de número complejo z se puede definir por medio de la serie exponencial

$$\boxed{e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots.}$$

Similarmente, si $\boldsymbol{A}$ es una matriz *n x n*, entonces la **matriz exponencial** e^A es la matriz *n x n* definida por la serie

$$\boxed{e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots.}$$

en donde **I** es la matriz identidad, $A^0 = I$, $A^2 = AA$, $A^3 = AA^2$, $A^{n+1} = AA^n$, si $n \geq 0$.

Ejemplo:

Considere la matriz diagonal 2 x 2, $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, entonces $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$, $n \geq 1$.

Luego:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^2/2! & 0 \\ 0 & b^2/2! \end{bmatrix} + \ldots = \begin{bmatrix} 1 + a + a^2/2! + \ldots & 0 \\ 0 & 1 + b + b^2/2! + \ldots \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $e^A = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix}$

de modo que el exponencial de la matriz diagonal 2x2, ***A,*** se obtuvo simplemente por exponenciación de cada elemento de la diagonal de ***A.***

Nota: La exponencial de la matriz diagonal *n x n*

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

es la matriz diagonal *n x n* $$e^D = \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_n} \end{bmatrix}$$

obtenida por exponencialidad de cada elemento en la diagonal de ***D.***

Propiedades:

1) $e^0 = I$.
2) Si $AB = BA$, entonces $e^{A+B} = e^A e^B$.
3) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
4) $e^{At} = I + At + A^2\dfrac{t^2}{2!} + \ldots + A^n\dfrac{t^n}{n!} + \ldots$.
5) $\dfrac{d}{dt}(e^{At}) = A + A^2t + A^3\dfrac{t^2}{2!} + \ldots = A\left(I + At + A^2\dfrac{t^2}{2!} + \ldots\right) \Rightarrow \dfrac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$,
6) $X(t) = e^{At}$ satisface la ecuación diferencial matricial $X' = AX$, luego cada vector columna de e^{At} es un vector solución para el sistema lineal X' = AX
7) Los n vectores columna de e^{At} automáticamente son linealmente independientes, luego la matriz $\phi(t) = e^{At}$, es una *matriz fundamental* para el sistema lineal.
8) Sea A, matriz nxn y sea $X = e^{At}$=[X_1,....,X_i,....,X_n]. Entonces X_i es solución del problema de valor inicial

X'=AX, X(0)=e_i , donde e_i es la columna i de la matriz identidad I_n.

Teorema 1: Soluciones con la matriz exponencial
Si A es una matriz *n x n,* entonces la solución [única] del problema con condición inicial
$X' = AX$, $X(0) = X_0$ viene dada por $X(t) = e^{At}X_0$

Nota: Es fácil determinar e^{At}, si A es diagonal

Ejemplo:

Resolver el sistema $\begin{array}{r} x'(t) = x \\ y'(t) = -y \end{array}$

Respuesta:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, luego $e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. Por lo tanto la solución general es

$X = e^{At}C = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^t \\ c_2e^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x(t) = c_1e^t \\ y(t) = c_2e^{-t} \end{array}$, como para t = 0, $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= e^t \\ y(t) &= 2e^{-t} \end{aligned}$$

Nota:

Se obtiene el mismo resultado si hacemos $X = e^{At}X_0 = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$

Observación:
Si la matriz **A,** *n x n*, no es diagonal, entonces el cálculo de e^{At} se puede realizar de la siguiente manera.

1) Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *n* vectores propios linealmente independientes de A, correspondientes (en orden) a los *n* valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ no necesariamente distintos).
2) Sea P la matriz cuyas columnas son los vectores propios de A y sea D la matriz diagonal de los valores propios de A, es decir

$$P = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

donde $\boxed{A = PDP^{-1}.}$

3) La solución de X' = AX es X = e^{At}C, donde $\boxed{e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}.}$ y

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

En efecto:

$$e^{At} = e^{(PDP^{-1})t} = e^{P(Dt)P^{-1}} \quad = I + P(Dt)P^{-1} + \frac{1}{2!}P(Dt)P^{-1}\cdot P(Dt)P^{-1} + \ldots \quad = I + P(Dt)P^{-1} + \frac{1}{2!}P(Dt)^2P^{-1} + \ldots$$

$$= P\left[I + (Dt) + \frac{1}{2!}(Dt)^2 + \ldots\right]P^{-1}.$$

Luego se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2: Cálculo de $\underline{e^{At}}$

Supóngase que la matriz **A,** *n x n,* tiene *n* vectores propios linealmente independientes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ correspondientes (en orden) a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Si la matriz de vectores propios **P** y la matriz diagonal **D**, son tales que $A = PDP^{-1}$, entonces $\boxed{e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}.}$

Ejemplo:
Resolver el sistema

$$\begin{array}{l|} x_1' = 4x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 - x_2 \\ \hline \end{array}$$

Solución:

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ tiene valores propios $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 5$ con vectores propios asociados $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto

$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, luego

$$\phi(t) = e^{At} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t} & -2e^{-2t} \\ 3e^{5t} & e^{5t} \end{bmatrix}.$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix}$$

Los vectores columna $X_1(t)$ y $X_2(t)$ de la matriz fundamental $\phi(t)$ satisfacen las condiciones iniciales

$$X_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La solución general $X(t) = \phi(t)C = c_1X_1 + c_2X_2$ es

$$X(t) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} (c_1 - 2c_2)e^{-2t} + (6c_1 + 2c_2)e^{5t} \\ (-3c_1 + 6c_2)e^{-2t} + (3c_1 + c_2)e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Observaciones:

1) La solución general de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneo $X' = AX + F(t)$, donde A es la matriz de los coeficientes, de orden *n x n*, viene dada por

$$\boxed{X(t) = e^{At}C + e^{At}\int e^{-At}F(t)dt}$$

usando el método de variación de parámetros .

2) La solución del problema de valor inicial $X' = AX + F(t)$, $X(t_0) = X_0$, viene dada por

$$\boxed{X(t) = e^{A(t)}e^{-At_0}X_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}F(s)ds}$$

3) Si A es una matriz n x n y $\phi(t) = \{ X_1, ..., X_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema X' = AX, entonces $e^{At} = \phi(t)\,\phi^{-1}(0)$.

Ejemplo:
Resolver el sistema no homogéneo siguiente con la condición inicial X(0) = 0.

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2 + 3e^{2t} \\ x_2' &= \quad\;\; 2x_2 + 4e^{2t} \end{aligned}$$

Solución:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes del sistema homogéneo asociado, cuyos valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 2$, y los vectores l.i son $K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, luego

$X_1 = K_1 e^{2t}$ y $X_2 = K_1 te^{2t} + K_2 e^{2t}$.

Por lo tanto $\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} + e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$, $\phi^{-1}(t) = \dfrac{1}{e^{4t}}\begin{pmatrix} e^{2t} & -te^{2t} - e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$ y $\phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$e^{At} = \phi(t)\cdot\phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} + e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad e^{-At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix},$$

Para C=0, se tiene la solución particular

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\int\begin{bmatrix} e^{-2t} & -te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{bmatrix}dt = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\int\begin{bmatrix} 3-4t \\ 4 \end{bmatrix}dt = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3t - 2t^2 \\ 4t \end{bmatrix}$$

Por consiguiente $X(t) = \begin{bmatrix} (3t + 2t^2)e^{2t} \\ 4te^{2t} \end{bmatrix}$.

Así, una solución particular en forma escalar es $x_1(t) = (3t + 2t^2)e^{2t}$, $\quad x_2(t) = 4te^{2t}$.

Otra forma de determinar e^{At} para el ejemplo anterior:

Como $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$ con un vector propio l.i. $K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Luego, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2I + B$

Por lo tanto $e^{At} = e^{2It+Bt} = e^{2It}e^{Bt}$, donde $e^{Bt} = I + Bt + \frac{B^2t^2}{2!} + \frac{B^3t^3}{3!} + ...$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3=0$, $B^4=0$,.........

$\therefore\ e^{Bt} = I + Bt$

$\therefore\ e^{At} = e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}t\right]} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

UNIDAD 11: Análisis Cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales

Definición: Sistema Autónomo general de dos ecuaciones de primer orden
Son del tipo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = F(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x,y) \end{array}\right|$$

la variable independiente *t* no aparece explícitamente en ellas. Estudiaremos este tipo de sistemas.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}y \end{array}\right|$$

es un sistema autónomo de primer orden

Observación:
Los sistemas autónomos tienen soluciones que no se alteran en el corrimiento en el tiempo, es decir si x(t) e y(t) resuelven el sistema, también lo hacen x(t + c) e y(t + c), $\forall$c.

Definición: Plano Fase
Supongamos que las funciones F y G son continuamente diferenciables en alguna región R del plano *xy* , al que llamaremos **plano fase** del sistema. Entonces, de acuerdo con el teorema de existencia y unicidad, dado t_0 y un punto cualquiera (x_0, y_0) de R, existe una solución *única* $x = x(t)$, $y = y(t)$ que satisface las condiciones iniciales

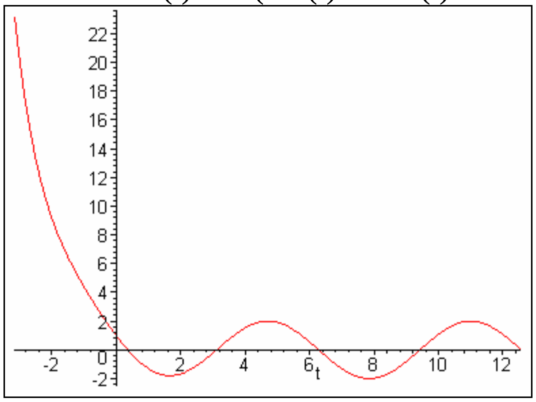
$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0$$

La ecuación del plano fase viene dada por $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{G(x,y}{F(x,y)})}$ y permite determinar al campo de direcciones del sistema.

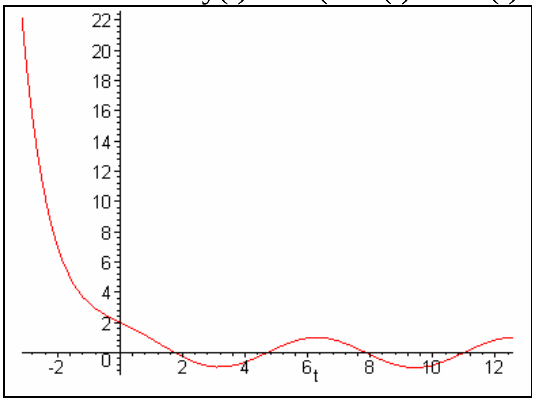
Definición: Trayectorias de un sistema
Las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$ describen una curva solución parametrizada en el plano fase. Una curva solución como ésta se llama **trayectoria** del sistema, y por cada punto de la región R pasa precisamente una trayectoria.

Ejemplo:
La solución del sistema anterior para x(0) = 0 e y(0) = 0, es x(t) = e^{-t}(cos(t) – 2sen(t)), y(t) = e^{-t}(-sen(t) + cos(t)) .

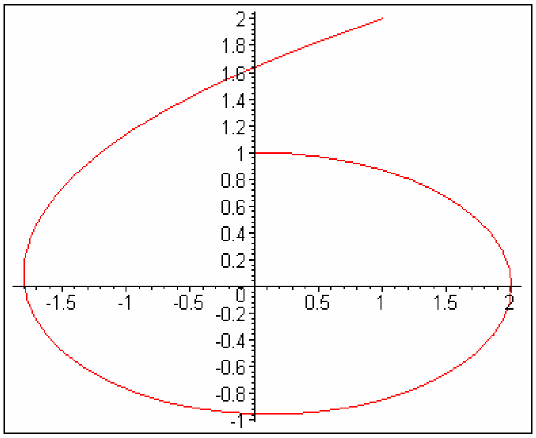
Gráfica de $x(t) = e^{-t}(\cos(t) - 2\text{sen}(t)$



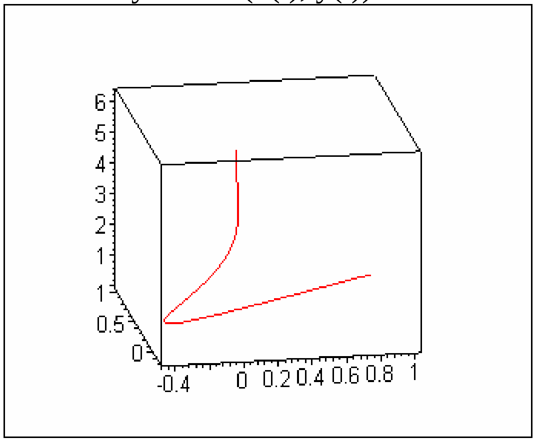
Gráfica de $y(t) = e^{-t}(-\text{sen}(t) + \cos(t)$



Gráfica de la trayectoria (x(t), y(t))



Gráfica de trayectoria (x(t), y(t)) en 3 Dimensiones



<u>Definición: Punto Crítico</u>

Un **punto crítico** del sistema autónomo, es un punto (x^*, y^*), tal que se cumple que $F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$

<u>Definición: Solución de equilibrio</u>

Si (x^*, y^*) es un punto crítico del sistema, entonces las funciones constantes

$$x(t) = x^*, \qquad y(t) = y^*$$

satisface las ecuaciones del sistema. A esta solución se le llama **solución de equilibrio** del sistema.

<u>Ejemplo 1</u>: Encuentre los puntos críticos del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 60x - 3x^2 - 4xy, \\ \frac{dy}{dt} &= 42y - 3y^2 - 2xy, \end{aligned}$$

<u>Solución:</u>

$$60x - 3x^2 - 4xy = x(60 - 3x - 4y) = 0,$$

$$42y - 3y^2 - 2xy = y(42 - 3y - 2x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 60 - 3x - 4y = 0$$

$$y = 0 \quad \text{o} \quad 42 - 3y - 2x = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 60 \\ 2x + 3y = 42 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{x = 12}\,, \ \boxed{y = 6}$$

Si x = 0, en la ecuación $42 - 3y - 2x = 0$, se tiene y = 14
Si y = 0, en la ecuación $60 - 3x - 4y = 0$, se tiene x = 20

Así el sistema tiene los cuatro puntos críticos: (0,0), (0,14), (20,0) y (12,6).

Definición: Retrato de fase de un sistema de ecuaciones diferenciales
Corresponde a una imagen en el plano fase de sus puntos críticos y trayectorias próximas a los puntos críticos aislados.

Ejemplo 2:

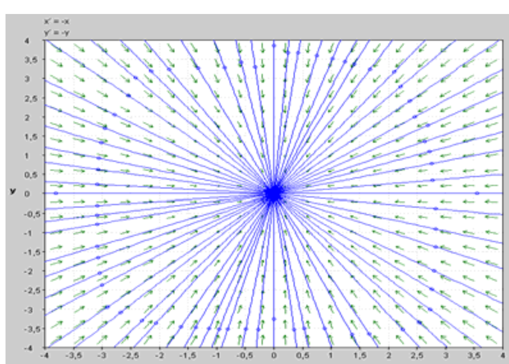
Considérese el sistema lineal autónomo $\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = -ky \end{array}\right|$ (k constante)

cuyo único punto crítico es el origen (0,0). La solución con el punto inicial (x_0, y_0) es

$$x(t) = x_0 e^{-t}, \qquad y(t) = y_0 e^{-kt}.$$

Si $x_0 \neq 0$, podemos escribir $y = y_0 e^{-kt} = \dfrac{y_0}{x_0^k}(x_0 e^{-t})^k = bx^k$, siendo $b = y_0 / x_0{}^k$.

Si $k = 1$, entonces toda curva de la ecuación es una línea recta que pasa por el origen. Cada trayectoria es un rayo a lo largo del cual el punto $(x(t), y(t)) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^{-t})$ se aproxima al origen cuando $t \to +\infty$.



Definición: Estabilidad

Dado el sistema autónomo $\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x, y)\end{array}\right|$

Un punto critico $\vec{X}* = (x*, y*)$ de este sistema autónomo es **estable** si para un punto inicial $\vec{X}_0 = (x_0, y_0)$ suficientemente cercano a $\vec{X}* = (x*, y*)$, implica que $\vec{X}(t) = (x(t), y(t))$ permanece cerca de $(x*, y*)$ para toda $t > 0$. Así, el punto crítico $\vec{X}* = (x*, y*)$ es **estable** si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\left|\vec{X}_0 - \vec{X}*\right| < \delta$ significa que $\left|\vec{X}(t) - \vec{X}*\right| < \varepsilon$, para toda t>0. El punto crítico $\vec{X}* = (x*, y*)$ se llama **inestable** si no es estable.

Definición: Estabilidad asintótica

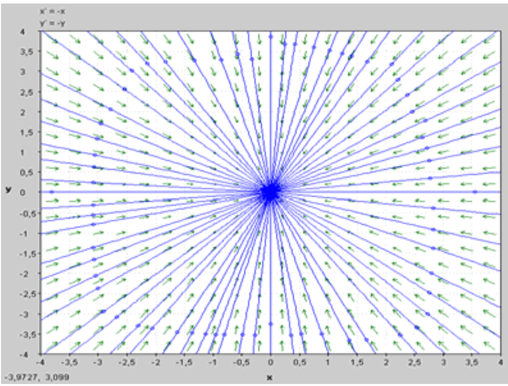
El punto crítico $\vec{X}* = (x*, y*)$ se llama **asintóticamente estable** sí, además de ser estable, cada trayectoria que comienza suficientemente cercana a $\vec{X}* = (x*, y*)$ también se aproxima a él cuando $t \to +\infty$. Es decir, existe $\delta > 0$ tal que $\left|\vec{X}_0 - \vec{X}*\right| < \delta$ implica que $\lim\limits_{t\to\infty} \vec{X}(t) = \vec{X}*$,

Nota: Se deduce que $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x*$, y $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = y*$,

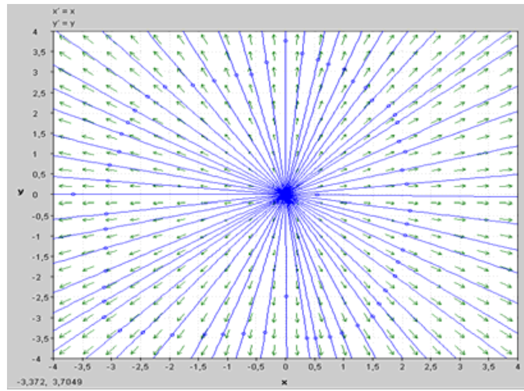
Tipos de puntos críticos

Definición: Nodo

En general, un punto crítico (x_0, y_0) de un sistema autónomo se llama **nodo** si toda trayectoria se acerca a (x_0, y_0) cuando $t \to +\infty$ o bien toda trayectoria se aleja de ese punto cuando $t \to +\infty$, y además, toda trayectoria es tangente en que (x_0, y_0) a alguna línea recta que pase por el punto crítico. Si las trayectorias de acercan al punto crítico, hablaremos de un nodo propio, o sumidero; y si las trayectorias se alejan del punto crítico, hablaremos de un nodo impropio o fuente.



Nodo Propio o Sumidero (Asintóticamente Estable)



Nodo Impropio o Fuente (Inestable)

Definición: Punto Silla

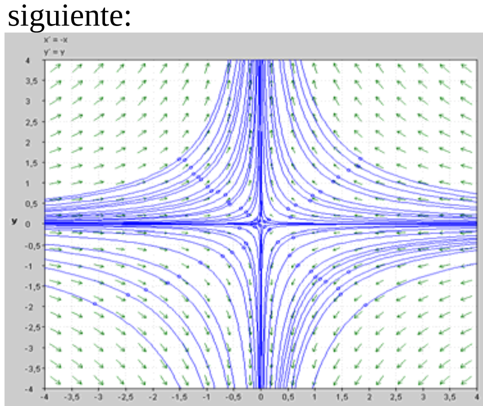
Sí hay trayectorias que se aproximan a un punto crítico y otras se alejan y no permanecen acotadas cuando $t \to +\infty$., se tiene un **punto silla.**

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x \\ \frac{dy}{dt} &= y \end{aligned}$$

Este sistema tiene un único punto crítico (0,0). La solución del sistema es $x(t) = x_0 e^{-t}$, $y(t) = y_0 e^{t}$, donde el par (x_0, y_0) es punto inicial de la trayectoria.

El campo de direcciones es el siguiente:



Punto Silla (Inestable)

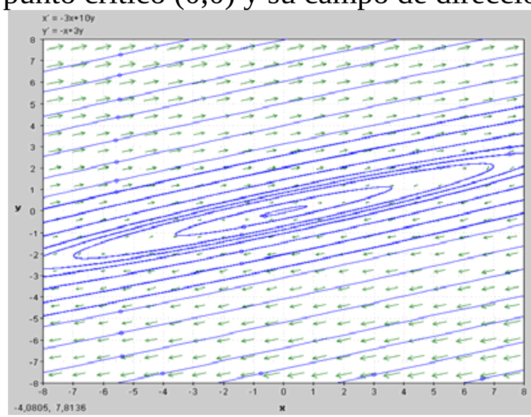
Definición: Centro

Un punto crítico rodeado por trayectorias cerradas simples que representan soluciones periódicas se llama **centro.**

Ejemplo:

$$\frac{dx}{dt} = -3x + 10y$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + 3y$$

Este sistema tiene un único punto crítico (0,0) y su campo de direcciones es el siguiente:



Centro (Estable)

Definición: Punto Espiral

Si $x(t)$ e $y(t)$ oscilan entre valores positivos y negativos y que en cada caso se aproximan a cero cuando $t \to +\infty$, se produce una trayectoria típica en espiral. Si el punto crítico es asintóticamente estable, entonces se llamará **punto espiral asintóticamente estable**.

Ejemplo:

Considere el sistema estándar

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2),$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2).$$

(0, 0) es el único punto crítico. Este sistema se puede resolver explícitamente introduciendo coordenadas polares $x = r\cos\theta,\ y = rsen\theta$, como sigue. Primero note que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}$$

Entonces, sustituyendo las expresiones dadas en el sistema para x' y y' se tiene

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt}=1} \Rightarrow \theta=\int dt+\theta_0$$

de donde sigue que

$$\theta(t)=t+\theta_0, \text{ entonces } \theta_0=\theta(0).$$

Entonces, la diferenciación de $r^2=x^2+y^2$ produce

$$2r\frac{dr}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}$$
$$=2(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)=2r^2(1-r^2),$$

así $r=r(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\boxed{\frac{dr}{dt}=r(1-r^2).}$$

Luego
$$r(t)=\frac{r_0}{\sqrt{r_0^2+(1-r_0^2)e^{-2t}}},$$

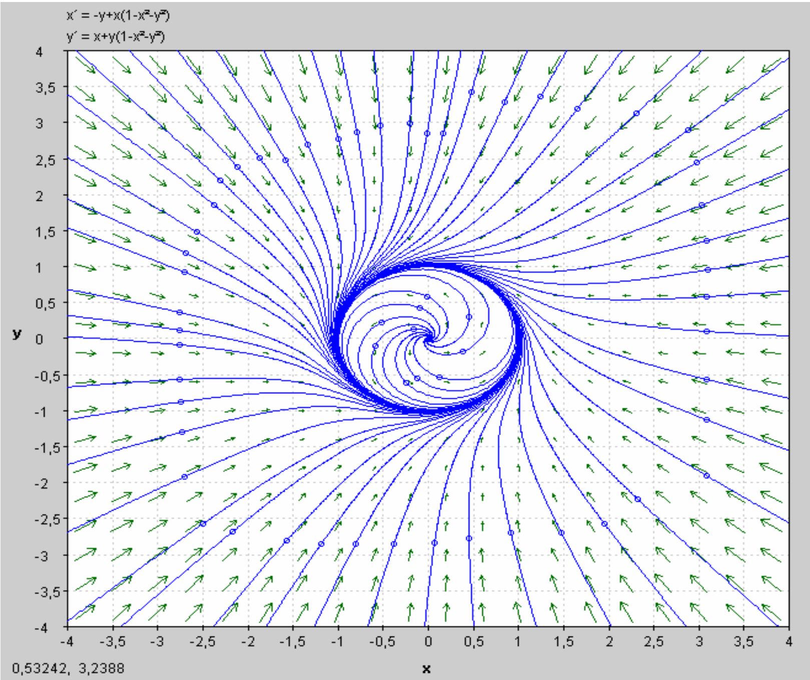
en donde $r_0=r(0)$. Así, la solución típica del sistema se puede expresar en la forma

$$\boxed{x(t)=r(t)\cos(t+\theta_0),} \qquad \boxed{y(t)=r(t)sen(t+\theta_0)}$$

Si $r_0=1$, entonces $r(t)=1$ (el círculo unitario).

Si $r_0>1$, entonces $r(t)\to 1$ cuando $t\to+\infty$, y la trayectoria definida gira en espiral hacia el círculo unitario

Si $0 < r_0 < 1$, entonces $r(t)\to 1$ cuando $t\to+\infty$, y la trayectoria definida gira en espiral hacia el círculo unitario.



Observación:
Bajo hipótesis generales se puede demostrar que hay cuatro posibilidades para una trayectoria no degenerada del sistema autónomo

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = G(x,y).$$

Las cuatro posibilidades son éstas:

1. $(x(t), y(t))$ se aproxima a un punto crítico cuando $t \to +\infty$
2. $(x(t), y(t))$ no está acotada cuando t crece.
3. $(x(t), y(t))$ es una solución periódica con una trayectoria cerrada.
4. $(x(t), y(t))$ gira en espiral hacia una trayectoria cerrada a medida que $t \to +\infty$.

Ejercicio 1:

Dado el sistema $\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y \end{array}\right|$

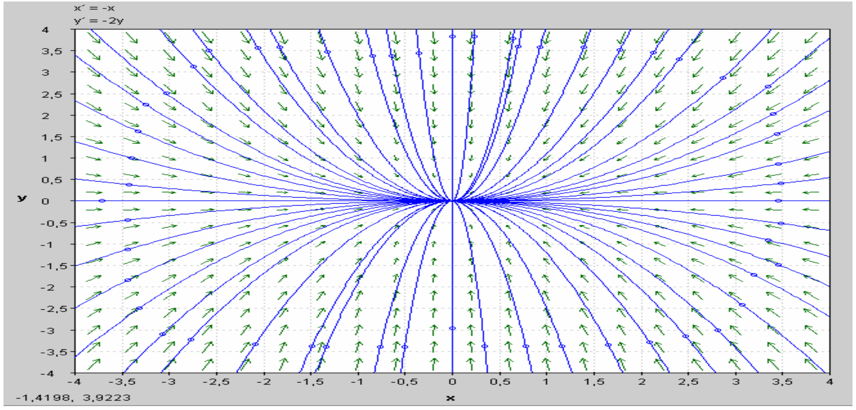
Bosquejar el campo de direcciones en el campo fase e indentificar su punto crítico.

Respuesta:

f (x, y) = -x $\Rightarrow$ f (x, y) = 0 si x = 0
g (x, y) = -2y $\Rightarrow$ g(x, y) = 0 si y = 0
$\therefore$ (0,0) es el único punto crítico

El campo de direcciones se obtiene de la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2y}{-x} = \dfrac{2y}{x}$ cuya solución es $y = cx^2$ y corresponde a una familia de parábolas. La dirección del flujo se determina de la siguiente manera:

Si x > 0, entonces $\dfrac{dx}{dt} = -x < 0$, luego x decrece y el flujo se mueve hacia la izquierda.
Si x < 0, entonces $\dfrac{dx}{dt} = -x > 0$, luego x crece y el flujo se mueve hacia la derecha.



Las soluciones fluyen hacia el punto crítico (0,0) asintóticamente estable.

Ejercicio 2:

Dado el sistema $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x\\ \frac{dy}{dt} &= 2y\end{aligned}\right|$

Bosquejar el campo de direcciones en el plano fase y discutir el comportamiento de las soluciones cerca del punto crítico (0,0).

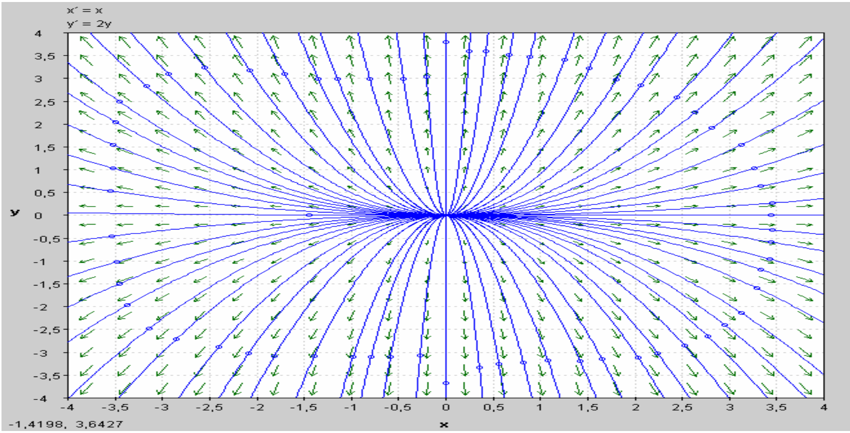
Respuesta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

El campo de direcciones se obtiene de la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ cuya solución es y = cx^2 y corresponde a una familia de parábolas. La dirección del flujo se determina de la siguiente manera:

Si x > 0, entonces $\frac{dx}{dt} = x > 0$, luego x crece y el flujo se mueve hacia la derecha.
Si x < 0, entonces $\frac{dx}{dt} = x < 0$, luego x decrece y el flujo se mueve hacia la izquierda.

El campo de direcciones es similar al anterior pero con las flechas hacia fuera.



Las soluciones se alejan del punto crítico (0,0). El equilibrio es inestable.

Ejercicio 3

Dado el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y - 2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y - 1 \end{cases}$$

Determinar los puntos críticos, bosquejar el cam po de direcciones en el plano fase y predecir la naturaleza asintótica, es decir el comportamiento cuando $t \to +\infty$, de la solución que parte de x = 2, y = 0, cuando t = 0.

Respuesta:

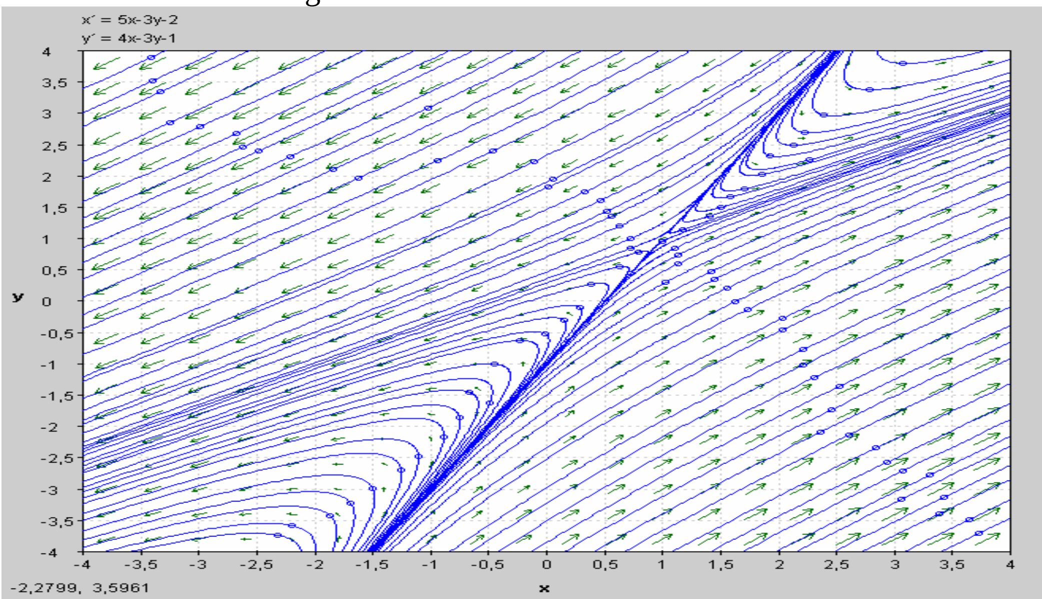
$$\begin{cases} 5x - 3y - 2 = 0 \\ 4x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ x = 1, y = 1. Luego (1,1) es el único punto crítico.

La dirección del flujo se determina de la siguiente manera:

Si 5x – 3y - 2 > 0, entonces $\dfrac{dx}{dt} > 0$, luego x crece y el flujo se mueve hacia la derecha.

Si 5x – 3y - 2 < 0, entonces $\dfrac{dx}{dt} < 0$, luego x decrece y el flujo se mueve hacia la izquierda

El campo de direcciones es el siguiente:

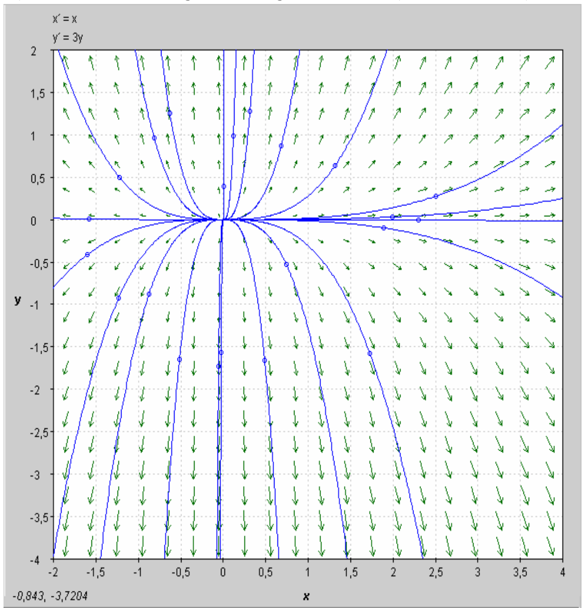


La curva integral que pasa por (2, 0) se extiende hasta el infinito. El punto crítico (1,1) es inestable, pues hay soluciones que se acercan a (1,1) y otras se alejan de (1,1). Este punto de equilibrio es un punto silla.

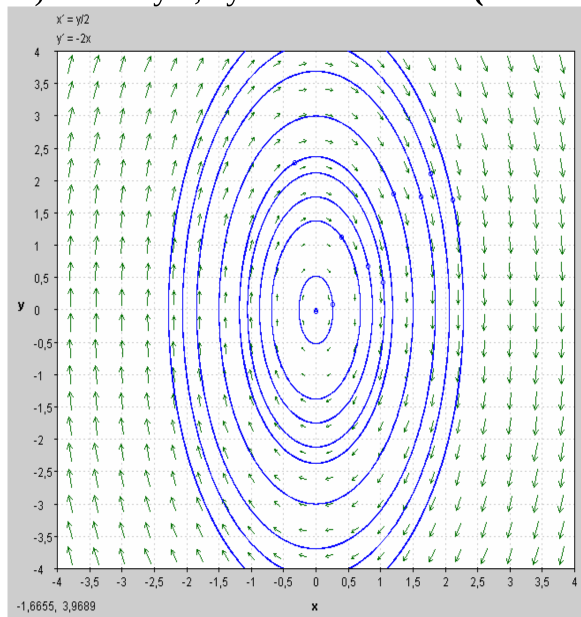
Configuraciones típicas de trayectorias en torno de puntos críticos

Estos diagramas de plano fase corresponden a los siguientes sistemas de ecuaciones:

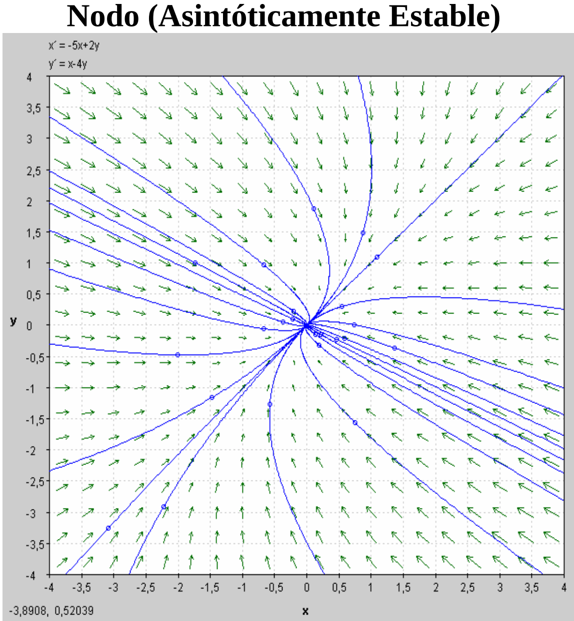
a) dx/dt = x, dy/dt =3y **Nodo (Inestable)**



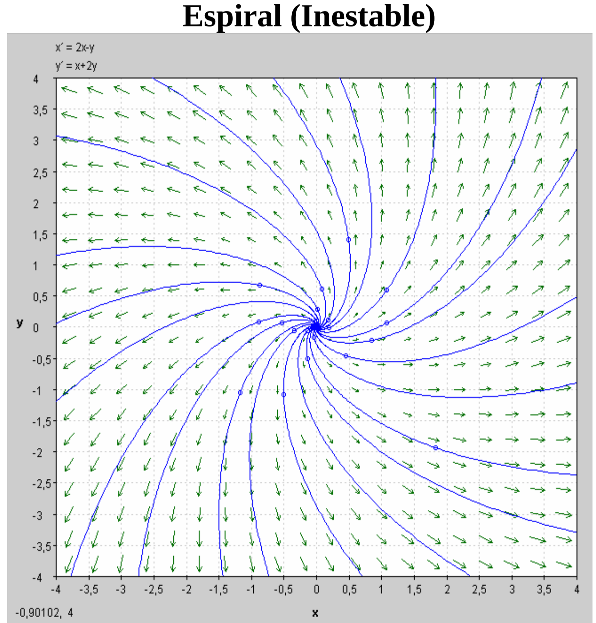
b) dx/dt = y/2, dy/dt = -2x **Centro (Estable)**



c) dx/dt = -5x +2y, dy/dt = x – 4y
Nodo (Asintóticamente Estable)

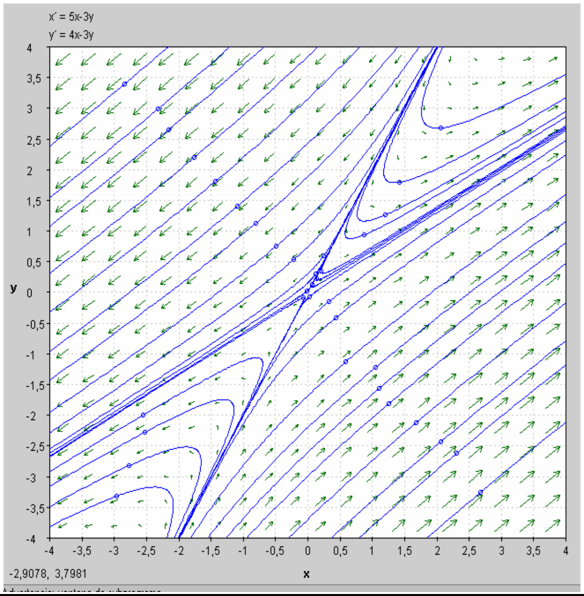


d) dx/dt = 2x-y, dy/dt = x +2y
Espiral (Inestable)



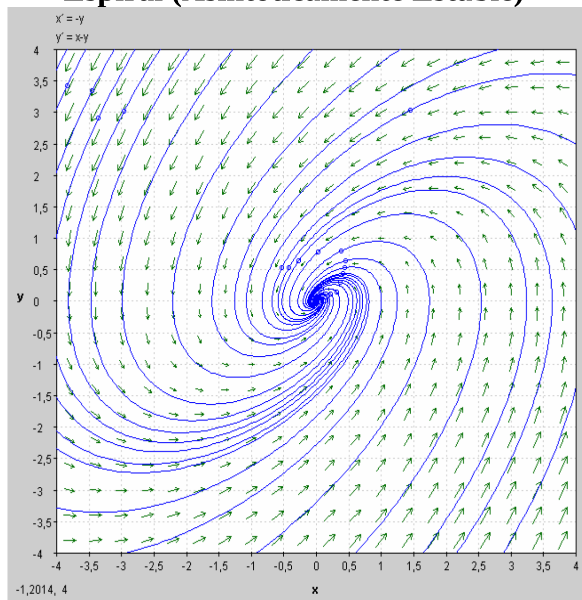
e) $dx/dt = 5x - 3y$, $dy/dt = 4x - 3y$

Silla (Inestable)



f) $dx/dt = -y$, $dy/dt = x - y$

Espiral (Asintóticamente Estable)



<u>Ejercicio propuesto:</u>

Usando el software Maple versión V o superior, realice para cada sistema anterior

1) El diagrama
2) El campo de direcciones
3) Los puntos críticos y clasifíquelos
4) Resuelva el sistema

Análisis Cualitativo de las Ecuaciones Diferenciales de 2º Orden

En general, dada cualquier ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$y'' = f(t, y, y')$$

la convertimos en un sistema de primer orden introduciendo v = y' y escribiendo

$$\begin{cases} y' = v \\ v' = f(t, y, v) \end{cases}$$

En el plano yv , las trayectorias (y(t), v(t)) fluyen hacia la derecha en el semiplano superior (donde v > 0), y hacia la izquierda en el semiplano inferior.

Ejemplo:
Bosquejar el campo de direcciones en el plano fase para el sistema de primer orden correspondiente al oscilador masa-resorte no forzado, no amortiguado descrito por
0.1875y'' = -12y. Bosqueje varias trayectorias e interprételas físicamente.

Respuesta:
Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} y' = v \\ v' = -64y \end{cases}$$

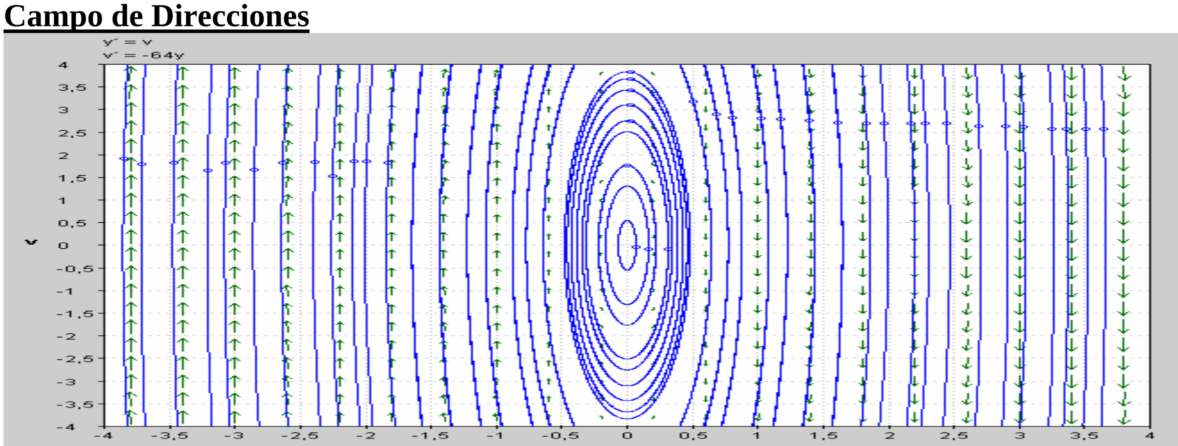
El punto crítico esta en el origen y = v = 0. El campo de direcciones se obtiene de la ecuación $\frac{dv}{dy} = -\frac{64y}{v}$.

La solución de esta ecuación es $v^2 + 64y^2 = c$ que corresponde a una familia de elipses.
Las soluciones del sistema deben circular en forma continua en torno de las elipses, pues no hay puntos críticos que las detengan. Esto confirma que todas las soluciones son periódicas.
La dirección del flujo es la siguiente:

Si v > 0, entonces $\frac{dy}{dt} > 0$, luego y crece y el flujo se mueve hacia la derecha.

Si v < 0, entonces $\frac{dy}{dt} < 0$, luego y decrece y el flujo se mueve hacia la izquierda

Campo de Direcciones



Observaciones:

1) Si una solución de un sistema autónomo pasa por un punto en el plano fase dos veces, y si se comporta lo bastante bien como para satisfacer un teorema de unicidad, entonces el segundo "recorrido" satisface las mismas condiciones iniciales que el primer recorrido, y por lo tanto debe reproducirlo.
2) Las trayectorias cerradas que no contienen puntos críticos corresponden a soluciones periódicas.
3) El estudio del plano fase permite anticipar algunas de las caracterísitcas (ser acotada, periódica, etc.) de las soluciones de los sistemas autónomos sin resolverlos de manera explícita. Gran parte de esta información se puede predecir simplemente a partir de los puntos críticos y el campo de direcciones (orientado por puntas de flechas), que se pueden obtener mediante paquetes estándar de software.

Ejercicio:

Determinar los puntos críticos y resolver la ecuación del plano fase para

$$\frac{dx}{dt} = -y(y-2)$$
$$\frac{dy}{dt} = (x-2)(y-2).$$

¿Cuál es el comportamiento asintótico de las soluciones que parten de (3,0), (5,0) y (2,3)?

Respuesta:

Para hallar los puntos críticos, resolvemos el sistema

-y (y - 2) = 0,   (x - 2) (y - 2) = 0

Una familia de soluciones de este sistema está dada por y = 2, x arbitrario; es decir, la recta y = 2. Si y ≠ 2, entonces el sistema se simplifica a -y = 0, x – 2 = 0, que tiene como solución x = 2, y = 0.

Por lo tanto el conjunto de puntos críticos consta del punto aislado (2,0) y la recta horizontal y = 2.

Las soluciones de equilibrio correspondientes son x(t) = 2, y(t) = 0 y la familia x(t) = c, y(t) = 2, donde c es una constante arbitraria.

Las trayectorias del plano fase satisfacen la ecuación $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-2}{y}$

Al resolver separando variables, la solución es

$$y^2 + (x-2)^2 = C$$

$\therefore$ Las trayectorias estan en círculos concéntricos con centro en (2, 0).

Análisis del flujo a lo largo de cada trayectoria.

$$\frac{dx}{dt} = -y(y-2)$$

Si $y > 2$, $\dfrac{dx}{dt} < 0$, x decrece, y el flujo va de derecha a izquierda a lo largo del círculo que esta sobre la recta $y = 2$

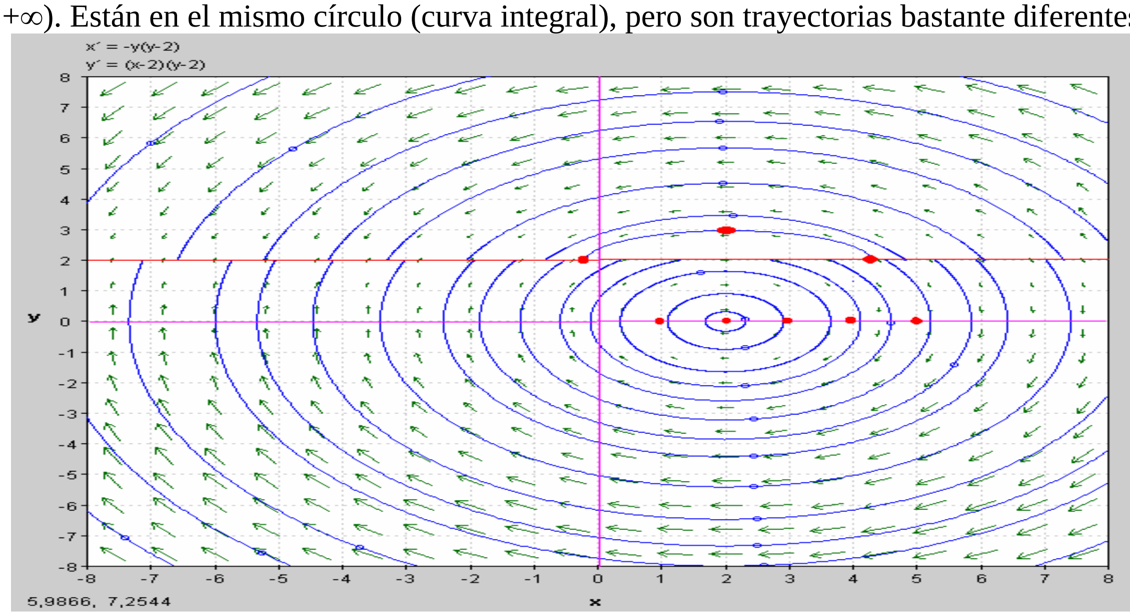
Si $0 < y < 2$, $\dfrac{dx}{dt} > 0$, x crece y el flujo va de izquierda a derecha.

Si $y < 0$, $\dfrac{dx}{dt} < 0$, x decrece y el flujo va de derecha a izquierda.

Hay cuatro tipos de trayectorias asociadas al sistema:

(a) las que comienzan arriba de la recta $y = 2$ y siguen el arco de un círculo en sentido contrario al de las manecillas del reloj de regreso hasta esa recta
(b) las que comienzan debajo de la recta $y = 2$ y siguen el arco de un círculo en el sentido de las manecillas del reloj hasta regresar a esa recta
(c) las que se mueven de manera continua en el sentido de las manecillas del reloj en torno de un círculo con centro en (2, 0) con radio menor que 2 (es decir, no cortan a la recta $y = 2$)
(d) los puntos críticos (2, 0) y $y = 2$ con x arbitrario.

La solución que comienza en (3, 0) está en un círculo que no tiene puntos críticos; por lo tanto, es una solución periódica y el punto crítico (2, 0) es un centro. Pero el círculo que contiene las soluciones que comienzan en (5, 0) y en (2, 3) tiene puntos críticos en $(2 - \sqrt{5}, 2)$ y $(2 + \sqrt{5}, 2)$. Las flechas indican que ambas soluciones tienden a $(2 - \sqrt{5}, 2)$ en forma asintótica (cuando $t \to +\infty$). Están en el mismo círculo (curva integral), pero son trayectorias bastante diferentes.



Análisis Cualitativo de Sistemas Lineales de 1ºer Orden mediante Valores Propios

Definición:
Dado el sistema de primer orden autónomo

$$\left.\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned}\right| \quad \text{donde a, b, c, d son constantes.}$$

Este se puede llevar a la forma matricial

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Las soluciones distintas de cero del sistema se pueden obtener a partir de los valores propios λ_1, λ_2 de la matriz A y que satisfacen la ecuación característica.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Un equilibrio del sistema es una solución constante $x(t) = r$, $y(t) = s$ y se obtiene al resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}\right|$$

Nota:
si $x = y = 0$, entonces el único punto de equilibrio es el origen.
Si v es un vector propio asociado al valor propio λ, entonces $e^{\lambda t}v$ es un rayo que sale del origen paralelo a v.

Ejemplo:
Dado el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x \\ \frac{dy}{dt} &= -2y \end{aligned}\right|$$

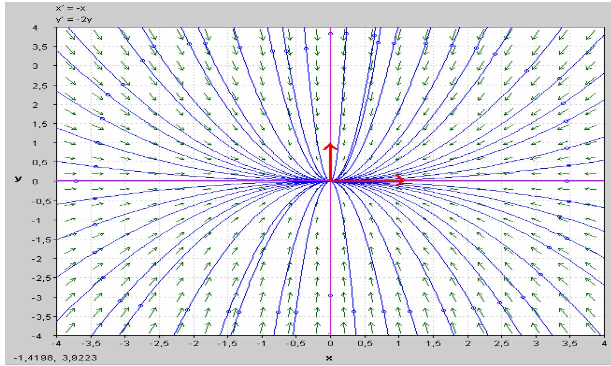
Respuesta:
Punto crítico: (0,0)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Valores Propios: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$
Vectores Propios: Para $\lambda_1 = -1$, $v_1 = (1, 0)$, para $\lambda_2 = -2$, $v_2 = (0,1)$

Solución del Sistema: $x(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2$

Su campo de dirección es el siguiente:



Casos según el tipo de los valores propios:

Caso 1: Valores Propios Positivos

Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, las soluciones incluyen $e^{\lambda 1 t}$, $e^{\lambda 2 t}$ y todas, excepto el equilibrio, tienden a infinito cuando $t \to \infty$. El origen es un equilibrio inestable o repelente, pues todas las demás trayectorias se alejan de él.

Las dos trayectorias rectas tienen la misma dirección que los vectores propios.

Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, entonces las trayectorias distintas de cero van a infinito pero pueden tomar una ruta distinta.

Ejemplo:

Dibuje una representación de fase para el sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 3y$$

Respuesta:

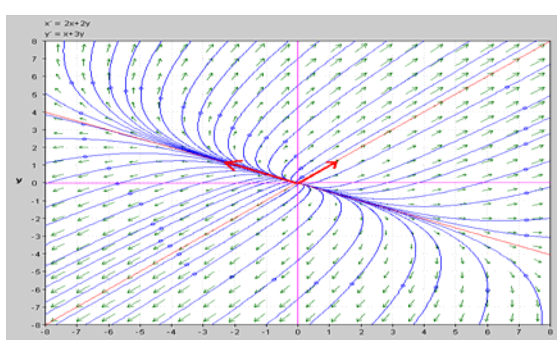
Punto crítico: (0,0)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Valores Propios: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$. Vectores Propios: Para $\lambda_1 = 4$, $v_1 = (1, 1)$, para $\lambda_2 = 1$, $v_2 = (-2,1)$

Solución del Sistema: $X(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 + e^{t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} c_2$

Campo de direcciones



Caso 2: Valores Propios negativos

Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, las soluciones incluyen $e^{\lambda 1t}$, $e^{\lambda 2t}$ que tienden a cero cuando $t \to \infty$.
Todas las soluciones tienden al equilibrio (equilibrio asintóticamente estable o atrayente).
Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, las curvas pueden tomar trayectorias distintas, pero se acerca al origen.

Ejemplo:

Dibuje una representación de fase para el sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = -x$$
$$\frac{dy}{dt} = -4y$$

Respuesta:

Punto crítico: (0,0)

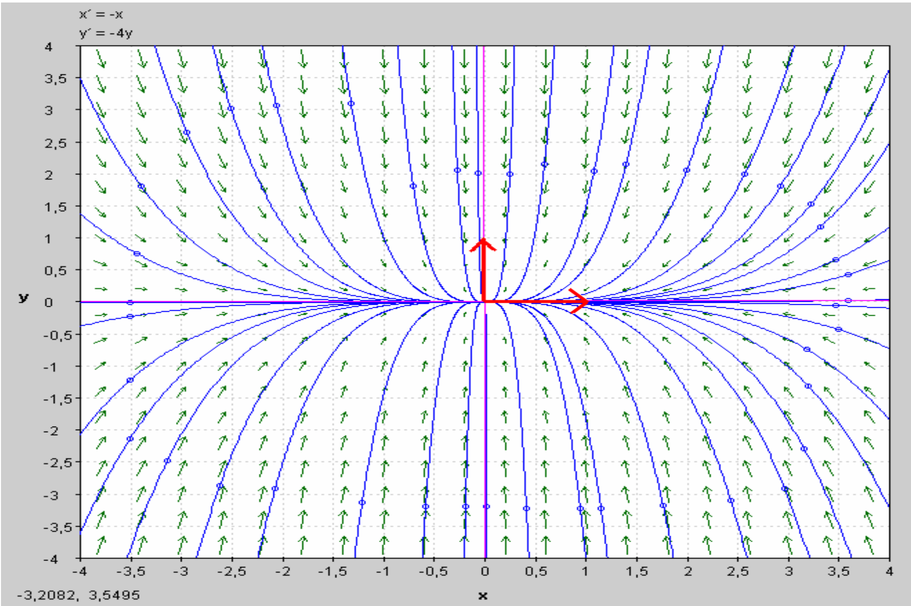
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Valores Propios: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$

Vectores Propios: Para $\lambda_1 = -1$, $v_1 = (1, 0)$, para $\lambda_2 = -4$, $v_2 = (0, 1)$

Solución del Sistema: $x(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + e^{-4t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2$

Campo de direcciones



Caso 3: Un Valor Propio positivo y uno negativo.
Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, el equilibrio es un punto silla.

Ejemplo:
Dibuje una representación de fase para el sistema lineal
$x' = -7x + 6y$
$y' = 6x + 2y$

Respuesta:
$-7x + 6y = 0$
$6x + 2y = 0$ punto crítico: $x = y = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad p(\lambda) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 6 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-7 - \lambda)(2 - \lambda) - 36$$

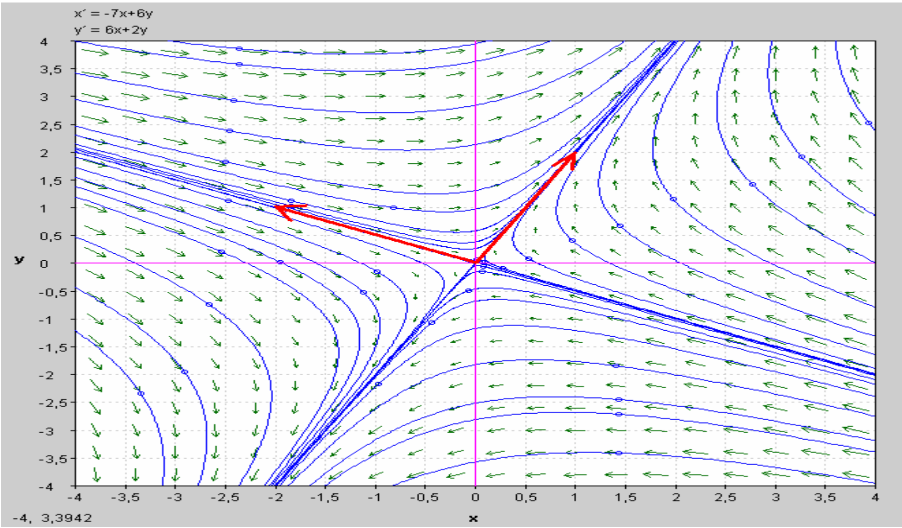
$p(\lambda) = -14 + 7\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 36 = \lambda^2 + 5\lambda - 50 = (\lambda + 10)(\lambda - 5)$

Valores Propios: $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = 5$, como $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, el equilibrio es un punto silla.

Vectores Propios: Si $\lambda_1 = -10$ $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, Si $\lambda_2 = 5$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución del Sistema: $x(t) = e^{-10t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 + e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} c_2$

Campo de direcciones



Caso 4: Valores Propios Complejos (parte real igual a cero)

Si $\lambda_1 = \beta i$, $\lambda_2 = -\beta i$, $\beta \in IR$, $\beta \neq 0$. Las soluciones involucran sen βt, cos βt y son elipses sesgadas. El movimiento es periódico y el equilibrio es estable, ya que las soluciones cercanas no se mueven muy lejos, sin embargo, como las soluciones no se acercan al equilibrio, el equilibrio no es asintóticamente estable.

Ejemplo:

Dibuje una representación de fase para el sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = -3x + 10y$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + 3y$$

Respuesta:

Punto crítico: (0,0)

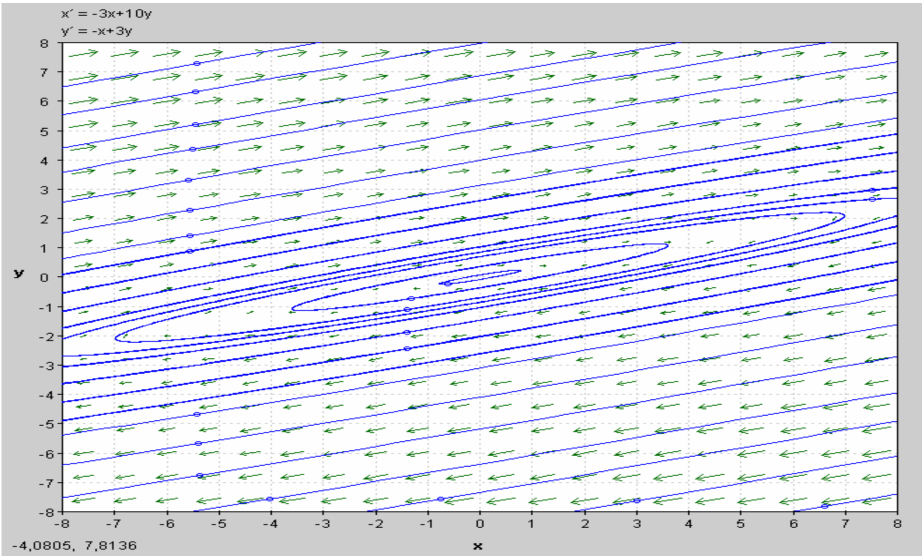
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Valores Propios: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$

Vectores Propios: Para $\lambda_1 = i$, $v_1 = (3-i, 1)$, para $\lambda_2 = -i$, $v_2 = (3+i, 1)$ $B_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solución del Sistema: $x(t) = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\text{sen}(t)\right)c_1 + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(t) - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\text{sen}(t)\right)c_2$

Campo de direcciones



Caso 5: Valores Propios Complejos (parte real distinta de cero)

Sean $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$.

Las soluciones incluyen $e^{at}\cos \beta t$, $e^{at}\text{sen } \beta t$ y coresponden a una espiral centrada en el origen.

La solución se mueve fuera del origen si $\alpha > 0$ y hacia el origen si $\alpha < 0$. (sentido reloj o antireloj)

Si $\alpha > 0$, el equilibrio es inestable o un repulsor.

Si $\alpha < 0$, el equilibrio es asintóticamente estable o un atractor.

Ejemplo:

Determine la representación de fase para:

$$\left.\begin{array}{l} x' = 2x + y \\ y' = -x + 2y \end{array}\right|$$

Solución:

Punto crítico: (0,0)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 + 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 + 1$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$$

Valores propios: $\lambda = 2 + i$, $\lambda = 2 - i$

Como $\alpha = 2 > 0$, se tiene una espiral hacia fuera inestable.

Sea $(x_0, y_0) = (1, 0) \neq (0, 0)$

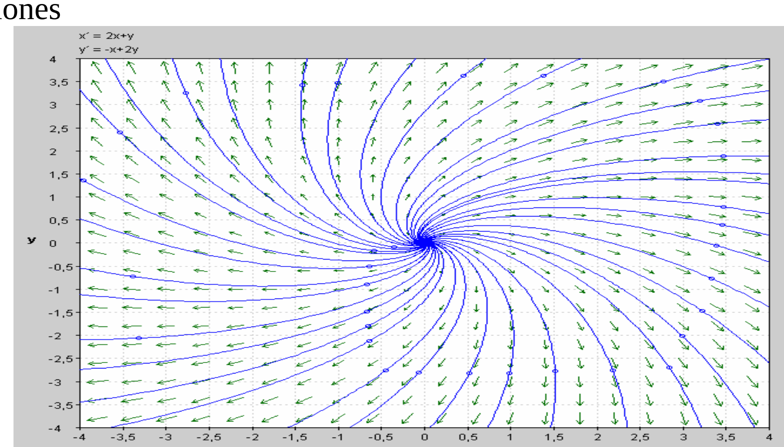
$x' = 2$

$y' = -1$

$\therefore$ El vector tangente $(x', y') = (2, -1)$ señala hacia abajo y a la derecha de $(1, 0)$

$\therefore$ La espiral se mueve en sentido reloj

Campo de direcciones



UNIDAD 12: Solución de ecuaciones diferenciales mediante series

Introducción:
La aproximación polinomial de Taylor

El polinomio de Taylor de grado n, con centro en x_0, para aproximar una función f(x), que posee n derivadas en x_0 es:

$$\boxed{p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$$

$$\therefore \boxed{p_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j}$$

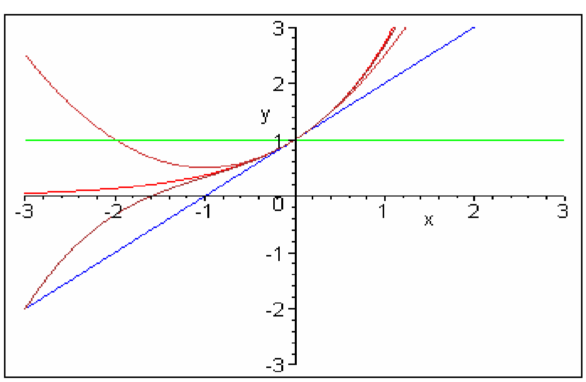
y se cumple que:

1) $p_n(x_0) = f(x_0)$
   $p'_n(x_0) = f'(x_0)$
   $p''_n(x_0) = f''(x_0)$
   .
   .
   $p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

2) $p_n(x_0) = p_{n-1}(x) + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

Ejemplo:
Sea $f(x) = e^x$ y $x_0 = 0$
Determinar los polinomios $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, polinomios de Taylor.
Respuesta:
$f(x) = e^x$ y $f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall\ n \in IN$
$\therefore\ p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 1 + x$, $p_2(x) = 1 + x + (x^2/2)$, $p_3(x) = 1 + x + (x^2/2) + (x^3/6)$

Gráfico:



Serie de Taylor

Si f es infinitamente diferenciable en x_0, entonces $p_n(x)$ es la (n + 1)-ésima suma parcial de la serie y $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$ se llama Serie de Taylor de f(x) en x

Ejemplos de series de Taylor

$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall$ x $\in$ IR

$\ln(1 + x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$, $-1 < x \leq 1$

$\text{sen}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\forall$ x $\in$ IR

$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!}$, $\forall$ x $\in$ IR.

Solución de ecuaciones mediante la serie de Taylor.

Este método usa los valores de las derivadas evaluadas en un punto, los cuales se obtienen de la ecuación diferencial por diferenciación sucesiva y luego se aplica la expansión en serie de Taylor.

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{y'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!} + \ldots.$$

dando la solución requerida.

Ejemplo 1:

Resolver $y' = x + y + 1$

Respuesta:

$y' = x + y + 1$, $y'' = 1 + y'$, $y''' = y''$, $y^{(4)} = y'''$

Supongamos que $y(0) = c$

$\therefore y'(0) = c + 1$, $y''(0) = c + 2$, $y'''(0) = c + 2$

$$\therefore y(x) = y(0) + y'(0)(x) + \frac{y''(0)(x)^2}{2!} + \frac{y'''(0)(x)^3}{3!} + \ldots.$$

$$= c + (c + 1)(x) + \frac{(c+2)x^2}{2!} + \frac{(c+2)x^3}{3!} + \ldots..$$

$$= c + (c + 1)(x) + (c + 2)\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)$$

$$= c + (c + 1)(x) + (c + 2)(e^x - 1 - x)$$

$$y(x) = c + cx + x + (c + 2)e^x - c - 2 - cx - 2x$$

$$\boxed{y(x) = (c + 2)e^x - x - 2}$$

Ejemplo 2:

Resolver $y'' = 3y' + x^{7/3}y, \quad y(0) = 10, \; y'(0) = 5$

Respuesta:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)(x)^2}{2!} + \frac{y'''(0)(x)^3}{3!} + \dots + \frac{y^{(n)}(0)(x)^n}{n!} + \dots$$

$y(0) = 10$
$y'(0) = 5$
$y''(0) = 3y'(0) + 0^{7/3}y(0) = 15$
$y''= 3y' + x^{7/3}y$, se cumple en una vecindad de $x_0 = 0$
$y'''= 3y'' + (7/3)x^{4/3}y + x^{7/3}y'$
$y^{(4)}= 3y''' + (28/9)x^{1/3}y + (14/3)x^{4/3}y' + x^{7/3}y''$
$y^{(5)}= 3y^{(4)} + (28/27)x^{-2/3}y + (28/9)x^{1/3}y' + (56/9)x^{1/3}y' + (14/3)x^{4/3}y'' + (7/3)x^{4/3}y'' + x^{7/3}y'''$

Haciendo $x = 0$, queda
$y'''(0)= 3*15 + (7/3)*0^{4/3}*10 + 0^{7/3}*5 = 45$
$y^{(4)}(0) = 3*45 + (28/9)*0^{1/3}*10 + (14/3)*0^{4/3}*5 + 0^{7/3}*15 = 135$
$y^{(5)}(0) = 3*135 + (28/27)*0^{-2/3}*10 + \dots$ no existe
$\therefore$ Sólo se puede construir hasta el polinomio de Taylor de grado 4.
$\therefore y(x) \approx p_4(x) = 10 + 5x + (15/2)x^2 + (45/6)x^3 + (135/24)x^4$

Ejemplo 3:

Resolver $xy'' - y = 0, \quad y(2) = 0, \; y'(2) = 3$

Respuesta:

$$y(x) = y(2) + y'(2)(x - 2) + \frac{y''(2)(x-2)^2}{2!} + \frac{y'''(2)(x-2)^3}{3!} + \dots$$

$y(2) = 0$
$y'(2) = 3$
$y''(2) = y(2)/2 = 0$
$y'''(2) = ?$
Derivamos $xy'' - y = 0$, con respecto a x

$$\therefore \boxed{1y'' + xy''' - y' = 0} \Rightarrow y''' = \frac{y'-y''}{x}$$

$$y'''(2) = \frac{y'(2) - y''(2)}{2} = \frac{3}{2}$$

$y^{(4)}(2) = ?$

Derivamos $y'' + xy''' - y' = 0$, con respecto a x

$$\therefore \boxed{2y''' + xy^{(4)} - y'' = 0} \Rightarrow y^{(4)} = \frac{y''-2y'''}{x}$$

$$y^{(4)}(2) = \frac{y''(2) - 2y'''(2)}{2} = \frac{0-3}{2} = \frac{-3}{2}$$

$y^{(5)}(2) = ?$

Derivamos $2y''' + xy^{(4)} - y'' = 0$, con respecto a x

$\therefore \boxed{3y^{(4)} + xy^{(5)} - y''' = 0} \Rightarrow y^{(5)} = \dfrac{y''' - 3y^{(4)}}{x}$

$$y^{(5)}(2) = \frac{y'''(2) - 3y^{(4)}(2)}{2} = \frac{\frac{3}{2} - 3\left(\frac{-3}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{9}{2}}{2} = 3$$

$$y(x) = 0 + 3(x-2) + 0 + \frac{3}{2}\frac{(x-2)^3}{3!} - \frac{3}{2}\frac{(x-2)^4}{4!} + 3\frac{(x-2)^5}{5!} \ ....$$

$y(x) \approx p_5(x) = 3(x-2) + (1/4)(x-2)^3 - (1/16)(x-2)^4 + (1/40)(x-2)^5$

Solución de ecuaciones diferenciales mediante series de potencias

Consiste en reemplazar la incógnita y por una serie de potencia en la ecuación diferencial.

Si $\boxed{y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k ,}$ $\boxed{y' = \sum_{k=1}^{\infty} k\, c_k (x-a)^{k-1} ,}$ $\boxed{y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, c_k (x-a)^{k-2}}$

Ejercicio 1

Resolver la ecuación diferencial $y' = y$, $y(0)=1$ usando series de potencias.

Respuesta

Sea $y = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ----$

$\therefore \quad y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$\therefore \quad y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ---- = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k x^{k-1}$

como $y' = y$

$\therefore \quad a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + --- = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ----$

$\therefore \quad a_1 = a_o \ , \ 2a_2 = a_1 \ , \ 3a_3 = a_2 \ , \ ------ , \ 3a_k = a_{k-1}$

$\therefore \quad a_1 = a_o \ , \ a_2 = \dfrac{a_1}{2} = \dfrac{a_o}{2}, a_3 = \dfrac{a_2}{3} = \dfrac{a_o}{3!} \Rightarrow \boxed{a_n = \dfrac{a_o}{n!}}$

$\therefore \quad y = a_o \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + --- \right) = \sum_{n=o}^{\infty} \dfrac{a_o x^n}{n!}$

si $y = 1$ cuando $x = 0 \Rightarrow a_o = 1$

$\therefore \quad \boxed{y = 1 + x \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ----} = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!}$

$\therefore \quad \boxed{y = e^x}$ converge $\forall x \in IR$,

Nota

1) La solución en serie es tan buena como $y = e^x$ y de hecho para muchos propósitos es mejor. Por ejemplo, si se desea determinar el valor de y para x = 0, 6, se pueden tomar los suficientes términos de la serie para tener una buena aproximación, mejor que el valor de $e^{0,6}$.

2) Al comparar las series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ se tiene $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

se igualan las potencias de x y queda $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \Rightarrow \boxed{a_{k-1} = k a_k}$, k=1, ----.

Consideraremos, ahora, ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, de la forma:

$$\boxed{p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \quad (*)}$$

donde p(x), q(x) y r(x) son polinomios, pues son las que más se utilizan en problemas prácticos.

Despejando y”, se tiene $\boxed{y'' = \dfrac{-(q(x)y' + r(x)y)}{p(x)}}$

Definición:

Un valor de x, tal que p(x) = 0 se llama **punto singular** o singularidad de la ecuación diferencial (*).
Cualquier otro valor de x se llama entonces un **punto ordinario o punto no singular**.

Ejemplo 1:

La ecuación diferencial $x(1 - x)y'' - (2x + 1)y' + 3y = 0$, tiene x = 0 y x = 1 como puntos singulares, los demás puntos son ordinarios.

Ejemplo 2:

La ecuación diferencial $xy'' + y' + xy = 0$, tiene x = 0 como punto singular, los demás puntos son ordinarios.

Ejemplo 3:

La ecuación diferencial $(x^2 + 1)y'' - 2y' + xy = 0$, tiene x = i y x = -i como puntos singulares, los demás puntos son ordinarios.

Teorema :

Sea $\boxed{p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0}$ una ecuación diferencial donde p(x), q(x) y r(x) son polinomios. Sea a un punto ordinario, es decir $p(a) \neq 0$. Entonces:

1) La solución general de la ec. dif. se puede obtener al sustituir la serie de potencias (o serie de Taylor) alrededor de x = a, dada por:

$$y = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \ldots\ldots = \sum a_j (x - a)^j$$

en la ecuación dada. De esta manera se obtiene la solución general de la forma $y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$, donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son soluciones linealmente independientes en forma de series de potencias.

2) Las soluciones obtenidas en 1) convergen para todos los valores de x, tales que $|x - a| < R$, donde R es la distancia del punto ***a*** a la singularidad más próxima, llamado radio de convergencia. Las series pueden o no converger para $|x - a| = R$, pero definitivamente divergen para $|x - a| > R$.

Ejercicio 2

Resolver $y'' + y = 0$ usando series

Respuesta

No hay puntos singulares, 0 es punto regular.

Sea $y = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$\therefore \quad y' = a_1 + 2a_2 x + 3 a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + 5 a_5 x^4 + --- = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k x^{k-1}$

$y'' = 2 a_2 + 6 a_3 x + 12 a_4 x^2 + 20 a_5 x^3 + --- = \sum_{k=2}^{\infty} k (k-1) a_k x^{k-2}$

$$\therefore \quad y'' + y = \sum_{k=2}^{\infty} k (k-1) a_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k (k-1) a_k x^{k-2} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-2}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1) a_k + a_{k-2}] x^{k-2} = 0$$

$\therefore k (k-1) a_k + a_{k-2} = 0 \quad , \quad k = 2, ----$

$\therefore 2 a_2 + a_o = 0$

$6 a_3 + a_1 = 0$

$12 a_4 + a_2 = 0$

$20 a_5 + a_3 = 0$

luego, $\boxed{a_k = -\dfrac{a_{k-2}}{(k)(k-1)} \quad k = 2, ----}$ **fórmula de recurrencia**

$a_2 = -\dfrac{a_o}{2}, a_3 = -\dfrac{a_1}{6} = -\dfrac{a_1}{3!} \qquad a_4 = -\dfrac{a_2}{12} = \dfrac{a_o}{4!}$

$a_5 = -\dfrac{a_3}{20} = \dfrac{a_1}{5!}$

$\therefore \qquad y = a_o + a_1 x - \dfrac{a_o}{2} x^2 - \dfrac{a_1}{3!} x^3 + \dfrac{a_o}{4!} + x^4 + \dfrac{a_1}{5!} x^5 + ---$

$$\boxed{y = a_o \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - - -\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - - -\right)}$$

$\boxed{y = a_o \ \cos x + a_1 \ \text{sen } x}$, converge $\forall$ x $\in$ IR, R = + ∞

Nota

$a_k = -\dfrac{a_{k-2}}{k(k-1)}$ k = 2 , ----

se llama fórmula de recurrencia, porque nos permite encontrar tantos términos de la serie como deseemos.

Por ejemplo

$$a_7 = -\frac{a_5}{7\cdot 6} = \frac{a_3}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4} = -\frac{a_1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = -\frac{a_1}{7!}$$

Ejercicio 3

Resolver $\boxed{y'' + 2xy' - y = 0}$, sujeto a las condiciones y(0) = 0 , y'(0) = 1, usando una serie y $= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, indicando fórmula de recurrencia y 5 términos en el desarrollo de y.

Respuesta

No tiene puntos singulares

$\therefore$ 0 es punto ordinario.

Sea $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\, a_k\, x^{k-2}$$

$$\therefore \quad y'' + 2xy' - y = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\, a_k\, x^{k-2} + 2x \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$$

$$\therefore \quad 0 = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\, a_k\, x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2k\, a_k\, x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\,(k+1)\, a_{k+2}\, x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 2k\, a_k\, x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$$

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)\,(k+1)\, a_{k+2} + 2ka_k - a_k]\ x^k + (2a_2 - a_0)$$

$\therefore$ (k + 2) (k + 1) a_{k+2} + (2k – 1) a_k = 0 $\wedge$ $\boxed{a_2 = (a_0/2)}$

$\therefore \quad \boxed{a_{k+2} = -\dfrac{(2k-1)a_k}{(k+2)(k+1)}} \quad , \quad k = 1, ----$

(fórmula de recurrencia)

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$

$y(0) = 0$

$\boxed{0 = a_0}$

$y' = a_1 + 2a_2 + ...$

$\boxed{1 = a_1}$

$\boxed{a_2 = 0}$ porque $a_2 = (a_0/2)$

$k = 1 \quad \therefore \; a_3 = -\dfrac{a_1}{3\cdot 2} = \dfrac{1}{3\cdot 2}$

$k = 2 \quad \therefore \; a_4 = -\dfrac{3a_2}{4\cdot 3} = 0$

$k = 3 \quad \therefore \; a_5 = \dfrac{-5a_3}{5\cdot 4} = \dfrac{5}{5!}a_1, \quad a_6 = \dfrac{-7a_4}{6\cdot 5} = \dfrac{3\cdot 7}{6!}a_o,$

$k = 5 \quad \therefore \; a_7 = -\dfrac{9}{7\cdot 6}a_5 = -\dfrac{5\cdot 9}{7!}a_1$

$\therefore \; y = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + ---$

$$y = a_o\left(1+\frac{x^2}{2!}-\frac{3x^4}{4!}+\frac{3\cdot 7\cdot 11x^8}{8!}+\cdots\right) + a_1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{5x^5}{5!}-\frac{5\cdot 9}{7!}x^7+\frac{5\cdot 9\cdot 13}{9!}x^9-\cdots\right)$$

De $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$, se tiene $a_o = 0$, $a_1 = 1$

$\therefore \boxed{y = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{5x^5}{5!}-\dfrac{5\cdot 9x^7}{7!}+\dfrac{5\cdot 9\cdot 13x^9}{9!}+\cdots}$, converge $\forall$ x $\in$ IR, R = $+\infty$ pues no hay puntos singulares.

Nota

Al sumar series es conveniente que contengan la misma potencia de x en su término general. Para ello se utilizan las propiedades de sumatoria.

Ejercicio 4

Resolver la ecuación diferencial $\boxed{xy'' - y = 0 \;, \quad y(2) = 0 \;, \quad y'(2) = 3}$

Respuesta

El punto **x = 0 es una singularidad** de la ecuación diferencial en x = 2 , usamos la serie de potencia alrededor de a = 2 (punto ordinario), pues las coordenadas iniciales están dadas para x = 2.

$$\boxed{y = \sum a_k (x-2)^k.}$$

Hacemos por conveniencia la transformación $\boxed{v = x - 2}$ $\Rightarrow$ v = 0 cuando x = 2

$\therefore$ $\boxed{x = v + 2}$ $\boxed{dv = dx}$

$\therefore$ se tiene la ecuación

$$\boxed{(v+2)\frac{d^2y}{dv^2} - y = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dv} = 3, \text{ en } v = 0}$$

sea $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k \Rightarrow y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k v^{k-1} \Rightarrow y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k v^{k-2}$

$$\therefore (v+2)\frac{d^2y}{dv^2} - y = (v+2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k v^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k = 0$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k v^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} 2k(k-1) a_k v^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k = 0$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(k) a_{k+1} v^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+2)(k+1) a_{k+2} v^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k = 0$$

$$(4a_2 - a_o) + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)k a_{k+1} + 2(k+2)(k+1) a_{k+2} - a_k] v^k = 0$$

$$4a_2 - a_0 = 0 \quad \wedge \quad (k+1)k a_{k+1} + 2(k+2)(k+1) a_{k+2} - a_k = 0$$

$$\boxed{a_2 = \frac{a_o}{4}} \quad \wedge \quad \boxed{a_{k-2} = \frac{a_k - (k+1)k a_{k+1}}{2(k+2)(k+1)}}, \quad k = 1, \ldots.$$

como $y = 0$ en $v = 0$, $a_o = 0$ en $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k$

como $y' = 3$ en $v = 0$, $a_1 = 3$ en $y'' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k v^{k-1}$

$\therefore$ $a_o = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = -\frac{1}{16}$, $a_5 = \frac{1}{40}$, $a_6 = \frac{-3}{320}$

$$\therefore \boxed{y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k = 3v + \frac{v^3}{4} - \frac{v^4}{16} + \frac{v^5}{40} - \frac{3v^6}{320} + \ldots}$$

$$\boxed{y = 3(x-2) + \frac{(x-2)^3}{4} - \frac{(x-2)^4}{16} + \frac{(x-2)^5}{40} - \frac{3(x-2)^6}{320} + \ldots}$$

La serie converge para $|x - 2| < 2 \Rightarrow 0 < x < 4$.
La convergencia en $x = 0$ y en $x = 4$ se determina analizando las series que se obtienen al cambiar x por cada uno de esos valores.

Ejercicios propuestos

1) Determine si las soluciones con serie de potencias alrededor de $x = x_o$, para los valores indicados de x_o, existen para cada una de las ecuaciones diferenciales y prediga el conjunto de valores para los cuales se garantiza la convergencia de cada serie.

a) $y'' + y = 0$, $x_o = 0$

b) $xy'' + y' + xy = 0$, $x_o = 2$, $x_o = 0$

c) $(x^2 + 1)\, y'' - 2y' + 5xy = 0$, $x_o = 0$ $x_o = 1$.

2) Resolver $(x^2 + 1)\, y'' – 6\, y = 0$ usando series

3) Resolver el problema de valores iniciales $(x – 3)\, y'' + x^2\, y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$

4) Resolver $3y'' – xy' + x^2\, y = e^x$

5) Resolver el problema de valor inicial $y'' – e^x\, y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$

6) Encontrar los primeros cinco términos no nulos de la solución en serie del problema de valor inicial $y''+ xy' – 2y = e^x$, $y(0) = y'(0) = 0$

7) Resolver usando series $(1 – x^2)\, y'' – 2\, xy' = 0$

Solución de ecuaciones diferenciales con coeficientes analíticos. Método de Frobenius

Consideraremos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, de la forma:
$\boxed{a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (*)}$ donde $a_2(x)$, $a_1(x)$ y $a_0(x)$ no necesariamente son polinomios.
Esta ecuación se puede llevar a la **forma canónica** siguiente:

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0}, \quad \text{donde } p(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ y } q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

Definición: función analítica
Una función f es analítica en x_0, si en un intervalo abierto en torno de x_0, esta función es la suma de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ con un radio de convergencia positivo.

Nota:

- Una función polinomial $b_0 + b_1x + ... + b_nx^n$ es analítica para cada x_0, pues siempre podemos escribirla en la forma $a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n$.
- Una función racional P(x)/Q(x), donde P(x) y Q(x) son polinomios sin factores comunes, es una función analítica excepto en los puntos x_0 para los que $Q(x_0) = 0$.
- Las funciones elementales e^x, sen(x) y cos(x) son analíticas para todo x real, mientras que ln(x) es analítica para x > 0.

Definición: puntos ordinarios y singulares

Dada la ecuación diferencial $\boxed{a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0}$, un punto x_0 es un **punto ordinario** de la ecuación canónica $\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0}$, si $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ y $q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ son analíticas en x_0. Si x_0 no es un punto ordinario, se dice que es un **punto singular** de la ecuación.

Ejemplo:
Determinar todos los puntos singulares de $xy'' + x(1 - x)^{-1}y' + (\text{sen } x)y = 0$
Solución:
Al dividir la ecuación por x vemos que:

$$\boxed{p(x) = \frac{x}{x(1-x)}, \qquad q(x) = \frac{\text{sen}x}{x}}$$

Los puntos singulares son aquellos donde p(x) o q(x) dejan de ser analíticas. Observe que p(x) y q(x) son cocientes de funciones que son analíticas en todo punto. Por tanto, p(x) y q(x) son analíticas excepto, tal vez, cuando sus denominadores se anulan. Para p(x), esto ocurre en x = 0 y x = 1. Pero como podemos cancelar una x en el numerador y el denominador de p(x), es decir,

$$\boxed{p(x) = \frac{x}{x(1-x)} = \frac{1}{1-x}}$$

Vemos que en realidad p(x) **es analítica en x = 0**. Por lo tanto, **p(x) es analítica excepto en x = 1**. Para q(x), el denominador se anula en x = 0. Como en el caso de p(x), este cero es removible, pues q(x) tiene el desarrollo en serie de potencias

$$\boxed{q(x) = \frac{senx}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ....}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - .....}$$

Así, q(x) es analítica en todo punto. En consecuencia, el único punto singular de la ecuación dada es $\boxed{x = 1}$

Teorema:

Suponga que x_0 es un punto ordinario para la ecuación diferencial $\boxed{y'' + p(x)y' + f(x)y = 0}$. Entonces tiene dos soluciones analíticas linealmente independientes de la forma:

$$\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}$$

Además, el radio de convergencia de cualquier solución en serie de potencias de la forma dada, es R, donde R es la distancia de x_0 al punto singular más cercano (con valores reales o complejos) de la ecuación.

Ejemplo

Determinar un desarrollo en serie de potencia para la solución de

$$\boxed{y''(x) + e^x y'(x) + (1+x^2)y(x) = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0}$$

Respuesta:

En este caso, $p(x) = e^x$ y $q(x) = 1 + x^2$ y ambas son analíticas para toda x. Así, por el teorema, el problema con valores iniciales tiene una solución en serie de potencias.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

que converge para toda x ($R = \infty$). Para determinar los primeros términos de esta serie, primero desarrollamos $p(x) = e^x$ en su serie de Maclaurin:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ...$$

Al sustituir los desarrollos de y(x), y'(x), y''(x) y e^x obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + ...\right)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (1 + x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Debido a las dificultades de los cálculos por el hecho de que aparece el producto de la serie de potencias de e^x y y'(x), nos concentraremos en los términos hasta de orden 4. Desarrollamos y nos fijamos en tales términos:

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + 1\sum na_nx^{n-1} + x\sum na_nx^{n-1} + \frac{x^2}{2}\sum na_nx^{n-1} + \frac{x^3}{6}\sum na_nx^{n-1}$$
$$+\frac{x^4}{24}\sum na_nx^{n-1} + 1\sum na_nx^n + x^2\sum na_nx^n = 0$$

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + ...) +$$
$$(a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + 4a_4x^4 + 5a_5x^5 + ...) + \left(\frac{1}{2}a_2x^2 + a_2x^3 + \frac{3}{2}a_3x^4 + ...\right) + \left(\frac{1}{6}a_1x^3 + \frac{1}{3}a_2x^4 + ...\right)$$
$$+\left(\frac{1}{24}a_1x^4 + ...\right) + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ...) + (a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + ...) = 0$$

Al agrupar las potencias semejantes de x en la ecuación y luego igualar los coeficientes a cero, llegamos al sistema de ecuaciones

$2a_2 + a_1 + a_0 = 0$	(término x^0),
$6a_3 + 2a_2 + 2a_1 = 0$	(término x^1),
$12a_4 + 3a_3 + 3a_2 + (1/2)a_1 + a_0 = 0$	(término x^2),
$20a_5 + 4a_4 + 4a_3 + a_2 + (7/6)a_1 = 0$	(término x^3),
$30a_6 + 5a_5 + 5a_4 + (3/2)a_3 + (4/3)a_2 + (1/24)a_1 = 0$	(término x^4).

Las condiciones iniciales implican que $y(0) = a_0 = 1$ e $y'(0) = a_1 = 0$. Usamos estos valores de a_0 y a_1 para hallar a_2, luego a_3, y así sucesivamente:

$2a_2 + 0 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = -1/2}$,
$6a_3 - 1 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = 1/6}$,
$12a_4 + 1/2 – 3/2 + 0 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_4 = 0}$,
$20a_5 + 0 + 2/3 – 1/2 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_5 = -1/120}$,
$30a_6 – 1/24 + 0 + ¼ - 2/3 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_6 = 11/720}$,
Así la solución del problema con valores iniciales es

$$\boxed{y(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \frac{11}{720}x^7 + ...},$$

que converge $\forall\ x \in$ IR pues no hay puntos singulares.

<u>Revisión de las ecuaciones de Cauchy – Euler</u>

Hemos considerado métodos para obtener soluciones en serie de potencias en torno de un punto ordinario para una ecuación lineal de segundo orden. Sin embargo, en ciertos casos quisiéramos obtener un desarrollo en serie en torno de un punto singular de la ecuación. Para motivar un procedimiento para hallar tales desarrollos, regresemos a las ecuaciones de Cauchy-Euler. Anteriormente resolvimos estas ecuaciones haciendo el cambio de variable $x = e^t$, que transforma una ecuación de Cauchy-Euler en una ecuación con coeficientes constantes. Sin embargo, es más instructivo para nuestro estudio de los desarrollos en serie en torno de puntos singulares trabajar directamente con la variable x.

Recuerde que una ecuación de Cauchy-Euler homogénea de segundo orden tiene la forma

$$\boxed{ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0}, \quad x > 0, \quad (1)$$

donde a ($\neq$0), b y c son constantes (reales).

Como en este caso $p(x) = b/(ax)$ y $q(x) = c/(ax^2)$, tenemos que **x = 0 es un punto singular** de (1).

La ecuación tiene soluciones de la forma $\boxed{y = x^r}$. Para determinar los valores de r, reemplazamos y por x^r en la ecuación diferencial y se tiene

$$\boxed{ar^2 + (b - a)r + c = 0}.$$

Llamada **ecuación indicial.**

Cuando la ecuación indicial tiene dos raíces distintas, tenemos $\boxed{a(r - r_1)(r - r_2)x^r = 0}$,
Lo cual implica que la ecuación tiene las dos soluciones:

$$y_1(x) = x^{r1}, \quad x > 0,$$
$$y_2(x) = x^{r2}, \quad x > 0,$$

que son linealmente independientes.

Definición de punto singular regular:
x_0 es un punto singular regular de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, si $(x - x_0)p(x)$ y $(x - x_0)^2q(x)$ son analíticas en x_0. En caso contrario hablaremos de puntos singulares irregulares.

Nota:
a) Centraremos nuestra atención en puntos singulares regulares.
b) Si p(x) no es analítica en x_0, significa que es singular en x_0.

Ejemplo 1

La ecuación de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1) = 0$, $p \in IR$
Se puede escribir en la forma canónica

$$\boxed{y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2}y = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \; q(x) = \frac{p(p+1)}{1-x^2}}$$

Los puntos singulares son 1 y –1 y son también regulares, pues

Si $\boxed{x = 1}$, $(x - 1)p(x) = \dfrac{2x}{x+1}$, que es analítica en 1.

$$(x-1)^2q(x) = -\frac{p(p+1)(x-1)}{x+1}, \text{ que es analítica en 1.}$$

Si $\boxed{x = -1}$, $(x + 1)p(x) = \dfrac{2x}{x-1}$, que es analítica en -1.

$(x + 1)^2 q(x) = -\dfrac{p(p+1)(x+1)}{x-1}$, que es analítica en -1.

Ejemplo 2

La ecuación de Bessel de orden p, $p \in IR^*$, $\boxed{x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y=0}$

Se puede escribir en la forma canónica

$\boxed{y'' + \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{x^2 - p^2}{x^2}y = 0}$, donde $p(x) = \dfrac{1}{x}$, $q(x) = \dfrac{x^2 - 1^2}{x^2}$ tienen un punto singular regular $\boxed{x = 0}$, pues $x\dfrac{1}{x} = 1$, analítica en 0 y $x^2\dfrac{x^2 - p^2}{x^2} = x^2 - p^2$, analítica en 0.

Serie de Fröbenius

Volviendo a la ecuación $\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0}$; $\boxed{x > 0}$

Estudiaremos ecuaciones de este tipo que tengan al cero como punto singular regular.

Fröbenius escribió esta ecuación de la siguiente forma

$$\boxed{y'' + \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x_n}{x} y' + \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x_n}{x^2} y = 0}$$

Y propuso como solución de esta ecuación diferencial

$$\boxed{y(x) = x^r \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad r \in IR}$$

La cual se puede escribir de la forma siguiente

$$\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r}, \qquad r \in IR, \qquad a_0 \neq 0}$$

Llamada serie de Fröbenius

Al reemplazar esta solución en la ecuación queda lo siguiente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^{n}(r+k)a_k p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right)x^n = 0, \quad \text{luego}$$

$$(n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^{n}(r+k)a_k p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k} = 0$$

Si n=0, queda $r(r-1)a_0 + a_0 p_0 r + a_0 q_0 = 0$, luego $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$

Por lo tanto, si existe una solución según Fröbenius, r debe verificar la ecuación

$$\boxed{r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0}$$

Definición de ecuación indicial:

Si x_0 es un punto singular regular de y” + py’ + qy = 0, entonces la ecuación indicial para este punto es $\boxed{r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0}$ donde $\boxed{p_0 = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x),}$ $\boxed{q_0 = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2 q(x)}$

Las raíces de la ecuación indicial son los **exponentes (índices) de la singularidad x_0.**

Ejemplo:

Hallar la ecuación indicial y los exponentes en la singularidad x = -1 de la ecuación diferencial
$\mathbf{(x^2 - 1)^2 y''(x) + (x + 1)y'(x) - y(x) = 0}$

Respuesta:

$$y'' + \frac{(x+1}{(x^2-1)^2}y' - \frac{1}{(x^2-1)^2}y = 0$$

$$y'' + \frac{(x+1)}{(x-1)^2(x+1)^2}y' - \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}y = 0 \Rightarrow p(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}, \quad q(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$p(x) = (x + 1)^{-1} * (x - 1)^{-2}$
$q(x) = -(x + 1)^{-2} * (x - 1)^{-2}$

$$p_0 = \lim_{x\to -1}(x+1)p(x) = \lim_{x\to -1}(x-1)^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$q_0 = \lim_{x\to -1}(x+1)^2 q(x) = \lim_{x\to -1} -(x-1)^{-2} = -\frac{1}{4}$$

Por lo tanto la ecuación indicial es: r(r – 1) + (¼) r – (¼) = 0
Los exponentes en la singularidad son r = 1, r = -(¼).

Observaciones:

1) Las soluciones de la ecuación indicial se llaman exponentes de la singularidad.
2) Si r_1 y r_2 son las raíces; considerar r_1 la mayor, entonces se dan tres casos.
   $r_1 - r_2 \notin Z$
   $r_1 - r_2 = 0$
   $r_1 - r_2 \in Z^*$
   y las soluciones son de la forma:
   $$\boxed{y(x) = x^r \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \; ; \; r \in IR}$$

Ejercicio:

Encontrar las soluciones de tipo Fröbenius para la ecuación diferencial
$\boxed{(x+2)x^2y'' - xy' + (1 + x)y = 0, \; x > 0}$ *

p(x) = $\dfrac{-1}{x(x+2)}$ xp(x) = $\dfrac{-1}{x+2}$ analítica en 0

q(x) = $\dfrac{x+1}{x^2(x+2)}$ x^2q(x) = $\dfrac{x+1}{(x+2)}$ analítica en 0

$\therefore$ x = 0 es un punto singular regular.

$\lim\limits_{x\to 0} p(x) = \dfrac{-1}{2}$ $\lim\limits_{x\to 0} q(x) = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ Ecuación Indicial

$\boxed{r(r-1) - (1/2)\, r + (1/2) = 0}$

$r^2 - r - (1/2)\, r + (1/2) = 0$

$\boxed{\text{raíces: } r = 1, \quad r = 1/2 \text{ exponentes de la singularidad}}$

Para r = ½

$\therefore$ y(x) = $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}}$ es solución

y'(x) = $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right) a_n x^{n-\frac{1}{2}}$

y''(x) = $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right) a_n x^{n-\frac{3}{2}}$

Reemplazando en la ecuación * queda.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right) a_n x^{n+\frac{3}{2}} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right) a_n x^{n+\frac{1}{2}} -$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right) a_n x^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\frac{3}{2}} = 0$$

Ordenando queda:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right) a_{n-1} x^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right) a_n x^{n+\frac{1}{2}} -$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right) a_n x^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

Comparando coeficientes, se tiene

$$-\tfrac{1}{2} a_0 x^{1/2} - \tfrac{1}{2} a_0 x^{1/2} + a_0 x^{1/2} + x^{1/2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)+1\right] a_{n-1} + \left[2\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right)+1\right] a_n \right\} x^n = 0$$

$$\boxed{a_n = -\frac{n^2 - 2n + 7/4}{2n^2 - n}\, a_{n-1}, \quad \forall\, n \geq 1}$$

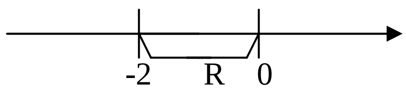
$\therefore a_1 = -(3/4)\, a_0$

$a_2 = -(7/24)\, a_1 = (7/32)\, a_0$
$a_3 = -(19/60)\, a_2 = -(19 * 7/32 * 60)\, a_0 = -(133/1920)\, a_0$

$\therefore \boxed{y_1(x) = x^{1/2} - (3/4)\, x^{3/2} + (7/32)\, x^{5/2} - (133/1920)\, x^{7/2} + \ldots\ldots}$

Análogamente se obtiene:
$\therefore \boxed{y_2(x) = x - (1/3)\, x^2 + (1/10)\, x^3 - (1/30)\, x^4 + \ldots\ldots}$

El radio de convergencia se obtiene en forma similar a lo dicho anteriormente



Puntos singulares: -2 y 0,   R = 2

Teorema de Fröbenius

Sea x_0 un punto singular regular de la ecuación

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,\ x > 0}$$

Entonces, existe, al menos una solución de la forma

$$\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^{n+r} \ ,\ a_0 \neq 0.}$$

Siendo r la raíz de la ecuación indicial asociada al punto x_0.
Además la serie converge en el intervalo centrado en x_0 y el radio es menor o igual que la distancia de x_0 al punto singular real o complejo más próximo.

Obtención de una segunda solución L.I.

Teorema: Sea x_0 un punto singular regular

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0}$$

y sea r_1, r_2 las raíces de la ecuación indicial se dan tres casos:

a) $r_1 - r_2 \notin Z \Rightarrow$ la ecuación tiene dos soluciones l.i. de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^{n+r_1} \ ,\ a_0 \neq 0 \qquad y_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2} \ ,\ b_0 \neq 0$$

b) $r_1 = r_2 \Rightarrow$ la ecuación tiene dos soluciones l.i. de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^{n+r_1} \ ,\ a_0 \neq 0 \qquad y_2(x) = y_1(x)\ln(x - x_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_1}$$

c) $r_1 - r_2 \in Z^* \Rightarrow$ la ecuación tiene dos soluciones l.i. de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^{n+r_1} \ ,\ a_0 \neq 0 \qquad y_2(x) = cy_1(x)\ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2} \ ,\ b_0 \neq 0$$

La serie converge en un intervalo centrado en x_0 y el radio de convergencia es menor o igual que la distancia de x_0 al punto singular real o complejo más próximo.

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial $x^2y'' - xy' + (1 - x)y = 0$

Respuesta:

$p(x) = \dfrac{-1}{x} \Rightarrow x\,p(x) = -1$ analítica en 0

$q(x) = \dfrac{1-x}{x^2} \Rightarrow x^2\,q(x) = 1 - x$ analítica en 0

$xp(x)$ cuando $x \to 0 \quad \to -1$
$x^2q(x)$ cuando $x \to 0 \quad \to 1$

Por lo tanto la ecuación indicial es:

$$r(r-1) - r + 1 = 0$$
$$r^2 - 2r + 1 = 0$$
$$\boxed{r = 1}\text{, raíz doble}$$

$\therefore$ Estamos en el caso b)
$\therefore$ La ecuación tiene dos soluciones l.i. de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x)^{n+1}, \ a_0 \neq 0$$

$$y_2(x) = \left(\sum_{x=0}^{+\infty} a_n (x)^{n+1}\right)\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (x)^{n+1}$$

Calculamos $y_1(x)$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x)^{n+1}, \ a_0 \neq 0$$

$$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_n (x)^{n}$$

$$y_1''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_n (x)^{n-1}$$

Reemplazaremos en la ecuación

$$x^2y'' - xy' + (1 - x)y = 0$$

Queda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_n(x)^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n(x)^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)^{n+2} = 0$$

pero $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)^{n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}(x)^{n+1}$

Luego

$$-a_0x + a_0x + \sum_{n=1}^{+\infty}\{[n(n+1) - (n+1) + 1]a_n - a_{n-1}\}x^n = 0$$

$a_n = \frac{1}{n^2} a_{n-1} \quad \forall\, n \geq 1$

$a_1 = \frac{1}{1^2} a_0,\ a_2 = \frac{1}{2^2} a_1 = \frac{1}{1^2 2^2} a_0,\ a_3 = \frac{1}{3^2} a_2 = \frac{1}{1^2 2^2 3^2} a_0,\ \therefore\ \boxed{a_n = \frac{1}{n^2} a_{n-1} \quad \forall\, n \geq 1}$

$\therefore\ \boxed{y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} (x)^{n+1}},$

Hacemos lo mismo para determinar y_2

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^{n+1}, \quad y_2'(x) = y_1'(x)\ln(x) + y_1 \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) b_n x^n$$

$$y_2''(x) = y_1''(x)\ln(x) + 2y_1'\frac{1}{x} - y_1 \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) b_n x^{n-1}$$

Reemplazando en la ecuación $x^2y'' - xy' + (1-x)y = 0$, se tiene

$$x^2 y_1''(x)\ln(x) + 2xy_1' - y_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) b_n x^{n+1} -$$

$$x\, y_1'(x)\ln(x) - y_1 - \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) b_n x^{n+1} + y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^{n+1} - x\, y_1(x)\ln(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^{n+2} = 0$$

queda:

$$2xy_1' - 2y_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) b_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) b_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^{n+2} = 0$$

Como

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} (x)^{n+1}, \quad y_1'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(n!)^2} (x)^n, \quad y_1''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{(n!)^2} (x)^{n-1}$$

Entonces

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(n+1)}{(n!)^2} (x)^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n!)^2} (x)^{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) b_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) b_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^{n+2} = 0$$

$$2x + 4x^2 - 2x - 2x^2 + 2b_1x^2 - 2b_1x^2 + b_1x^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{2(n+1)}{(n!)^2} - \frac{2}{(n!)^2} + \left[n(n+1) - (n+1) + 1 \right] b_n - b_{n-1} \right\} x^{n+1} = 0$$

$$\therefore 2 + b_1 = 0 \ \Rightarrow b_1 = -2,\ \ b_n = \frac{b_{n-1} - \frac{2n}{(n!)^2}}{n^2} \quad \forall\, n \geq 2$$

$$\therefore b_1 = -2, \quad b_2 = -(3/4), \quad b_3 = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{6}{6^2}}{9} = -\frac{11}{108} 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \boxed{y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \left(-2x^2 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{11}{108}x^4 + \ldots\ldots \right)}$$

$$\therefore \boxed{y(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} x^{n+1} \right) \left(c_1 + c_2 \ln(x) \right) + c_2 \left(2x^2 - \frac{3}{4}x^3 - \ldots\ldots \right)} \quad \forall\, c_1, c_2 \in IR.$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Spiegel, Murray R. (1985), Ecuaciones Diferenciales Aplicadas, Prentice-Hall Hispanoamericana, 3era Edición.
2. Zill, Dennis G. (1988), Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones, Grupo Editorial Iberoamérica, 2da Edición.
3. Blanchard, Paul Devaney, Robert L. y Hall, Glen R. (1999), Ecuaciones Diferenciales, International Thompson Editores, 1era Edición.
4. Nagle, R. Kent Saff, Edgard B. y Snider, Arthur David (2001), Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera, Pearson Educación, 3era Edición.
5. Acero, Ignacio y López, Mariló (1999), Ecuaciones Diferenciales Teoría y problemas, Alfaomega, 1era Edición.
6. Edwards Jr. C. H. y Penney, David E. (1994), Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera, Prentice Hall, 3era Edición
7. Campbell, Stephen L. y Haberman, Richard (1998), Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con problemas de valor de frontera, 1era Edición.
8. Zill, Dennis G. (1997), Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, International Thompson Editores, 6ta Edición.

FORMULARIO 1: INTEGRALES

1) $\int u^n\,dx = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$

2) $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c$

3) $\int e^u\,dx = e^u + c$

4) $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln(a)} + c$, $a > 0,\ a \neq 1$

5) $\int sen(u)\,dx = -\cos(u) + c$

6) $\int \cos(u)\,dx = sen(u) + c$

7) $\int tg(u)\,du = -\ln|\cos(u)| + c$

8) $\int \cot g(u)\,du = \ln|sen(u)| + c$

9) $\int \sec^2(u)\,du = tg(u) + c$

10) $\int \sec(u)\,du = \ln|\sec(u) + tg(u)|$

11) $\int \csc(u)\,du = \ln|\csc(u) - ctg(u)|$

12) $\int \csc^2(u)\,du = -ctg(u) + c$

13) $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsen\,\dfrac{u}{a} + c$

14) $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\,arctg\,\dfrac{u}{a} + c$

15) $\int \ln u\,du = u\ln u - u + c$

16) $\int ue^{au}\,du = \dfrac{e^{au}}{a^2}(au - 1) + c$

17) $\int u^n e^{au}\,du = \dfrac{u^n e^{au}}{a} - \dfrac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$

Identidades trigonométricas

1) $\text{sen}^2x + \cos^2 x = 1$

2) $1 + \text{tg}^2x = \sec^2x$

3) $1 + \text{ctg}^2x = \text{cosec}^2x$

4) $\text{sen}^2x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

5) $\cos^2x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

6) $\text{sen}(2x) = 2\,\text{sen}x \cos x$

7) $\cos(2x) = 2\cos^2x - 1$

$= 1 - 2\text{sen}^2x = \cos^2x - \text{sen}^2x$

8) $sen\,\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$

9) $\cos\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$

10) $tg\,\dfrac{x}{2} = \dfrac{senx}{1 + \cos x}$

11) $\text{tg}(2x) = \dfrac{2tgx}{1 - tg^2x}$

12) $\text{ctg}(2x) = \dfrac{2ctgx}{tg^2x - 1}$

13) $\text{sen}(3x) = 3\text{sen}x - 4\text{sen}^3x$

14) $\cos(3x) = 4\cos^3x - 3\cos x$

15) $\text{tg}(3x) = \dfrac{3tgx - tg^3x}{1 - 3tg^2x}$

Para integrales que:

contienen la expresión		hacer el cambio	se obtiene
a) $\sqrt{a^2 - b^2u^2}$,	$a^2 - b^2u^2$	$u = \dfrac{a}{b}$ sen z	$a\sqrt{1 - sen^2 z} = a \cos z$
b) $\sqrt{a^2 + b^2u^2}$,	$a^2 - b^2u^2$	$u = \dfrac{a}{b}$ tg z	$a\sqrt{1 - tg^2 z} = a \sec z$
c) $\sqrt{b^2u^2 - a^2}$		$u = \dfrac{a}{b}$ sec z	$a\sqrt{\sec^2 z - 1} = a\ \text{tg}\ z$

En la integración de funciones racionales de seno a coseno. Usar el cambio de variable

$u = \text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $x = 2\text{arctg}(u)$, $dx = \dfrac{2}{1+u^2}du$, $\text{sen}(x) = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$

FORMULARIO 2 : DERIVADAS

1) $\dfrac{dc}{dx} = 0$

2) $\dfrac{dx}{dx} = 1$

3) $\dfrac{d}{dx}(u + v - w) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx} - \dfrac{dw}{dx}$

4) $\dfrac{d}{dx}(cv) = c\dfrac{dv}{dx}$

5) $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

6) $\dfrac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\dfrac{dv}{dx}$

7) $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

8) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

9) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{c}\right) = \dfrac{\dfrac{du}{dx}}{c}$

10) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dv}\dfrac{dv}{dx}, \quad y \text{ función de } v$

11) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}, \quad y \text{ función de } x$

12) $\dfrac{d}{dx}(\ln v) = \dfrac{\dfrac{dv}{dx}}{v} = \dfrac{1}{v}\dfrac{dv}{dx}$

13) $\dfrac{d}{dx}(\log v) = \dfrac{\log e}{v}\dfrac{dv}{dx}$

14) $\dfrac{d}{dx}(a^v) = a^v \ln a \dfrac{dv}{dx}$

15) $\dfrac{d}{dx}(e^v) = e^v\dfrac{dv}{dx}$

16) $\dfrac{d}{dx}(e^{-v}) = -e^{-v}\dfrac{dv}{dx}$

17) $\dfrac{d}{dx}(cu^n) = cnu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

18) $\dfrac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\dfrac{du}{dx} + \ln u \cdot u^v\dfrac{dv}{dx}$

19) $\dfrac{d}{dx}(senv) = \cos v\dfrac{dv}{dx}$

20) $\dfrac{d}{dx}(\cos v) = -senv\dfrac{dv}{dx}$

21) $\dfrac{d}{dx}(tg\ \ v) = \sec^2 v\dfrac{dv}{dx}$

22) $\dfrac{d}{dx}(ctg\ \ v) = -\csc^2 v\dfrac{dv}{dx}$

23) $\dfrac{d}{dx}(\sec v) = \sec v\ \ tg\ \ v\dfrac{dv}{dx}$

24) $\dfrac{d}{dx}(\csc v) = -\csc v\ \ ctg\ \ v\dfrac{dv}{dx}$

25) $\dfrac{d}{dx}(arc\ \ sen\ \ v) = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}\dfrac{dv}{dx}$

26) $\dfrac{d}{dx}(arc\ \ \cos\ \ v) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}\dfrac{dv}{dx}$

27) $\dfrac{d}{dx}(arc\ \ tg\ \ v) = \dfrac{1}{1+v^2}\dfrac{dv}{dx}$

28) $\dfrac{d}{dx}(arc\ \ ctg\ \ v) = -\dfrac{1}{1+v^2}\dfrac{dv}{dx}$

29) $\dfrac{d}{dx}(arc\ \ \sec\ \ v) = \dfrac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\dfrac{dv}{dx}$

30) $\dfrac{d}{dx}(arc\ \ \csc\ \ v) = -\dfrac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\dfrac{dv}{dx}$

FORMULARIO 3: ÁLGEBRA LINEAL

Matrices iguales: $A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{ij})_{mxn}$, entonces $A = B$ si y sólo si, $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$

Suma de Matrices: $A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{ij})_{mxn}$, entonces $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{mxn}$.

Multiplicación por escalar : $A = (a_{ij})_{mxn}$, $\alpha \varepsilon IR$, entonces $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{mxn}$

Multiplicación de matrices : $A = (a_{ij})_{mxp} \wedge B = (b_{ij})_{pxn}$, entonces

$$A \cdot B = (c_{ij})_{m\times n} \text{ donde } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{i_k} b_{k_j}$$

Traspuesta de una matriz: $A = (a_{ij})_{mxn}$, entonces $A^T = (a_{ji})_{nxm}$

Matriz Simétrica: $A = A^T$

Matriz Antisimétrica : $A^T = -A$

Matriz Inversa : $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Determinante de una matriz: Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces det (A) = a d – b c

Si $A = (a_{ij})_{n\times n}$, entonces

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}), \text{ i fijo}$$

Matriz Adjunta: Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$, entonces

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \text{ donde } A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

Inversa de una matriz mediante determinantes:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A).$$

Sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché:

Sea AX = B un sistema con m ecuaciones lineales y n incógnitas. Entonces:

a) A x B tiene solución, si y sólo si , rang (A) = $\text{rang}(A \vdots B)$

b) rang (A) = $\text{rang}(A \vdots B)$ = n $\Rightarrow$ solución única.

c) rang (A) = $\text{rang}(A \vdots B)$ = r < n $\Rightarrow$ más de una solución y hay n – r variables libres.

Aplicaciones lineales.

F : V $\rightarrow$ U es lineal, si y sólo si, a) $F(\bar{v} + \bar{w}) = F(\bar{v}) + F(\bar{w})$

b) $F(\alpha \bar{v}) = \alpha F(\bar{v})$

Núcleo e imagen de una aplicación lineal:

Sea F : V $\rightarrow$ U una aplicación lineal, entonces

$\boxed{\text{Im}(F) = \{\bar{u} \in U \,/\, F(\bar{v}) = \bar{u},\ \text{para } v \in V\}}$

$\boxed{\text{Ker}(F) = \{\bar{v} \in V \,/\, F(\bar{v}) = \bar{o},\ \bar{o} \in U\}}$.

Representación matricial de una aplicación lineal.

F : V $\rightarrow$ U lineal, E = { e_1, -----, e_m } base de V.

G = { g_1, -----, g_n } base de U.

$$F(e_i) = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} g_j, \qquad \text{entonces} \qquad [F]_E^G = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Valores propios y vectores propios:

Sea $A_{n \times n}$ una matriz cuadrada

$\boxed{Av = \lambda v}$ $\Rightarrow$ λ es **valor propio** de A y v es **vector propio** de A asociado a λ.

λ **es valor propio de A** $\Leftrightarrow$ λ es solución de la ecuación $\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$

$\bar{v}$ **es vector propio de A, asociado al valor propio** λ $\Leftrightarrow$ $\boxed{(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}}$.

FORMULARIO 4: ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

1) VARIABLES SEPARABLES

$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$

Solución. $\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = c$

2) HOMOGÉNEAS

$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, $M \wedge N$ homogéneas del mismo grado.

Solución usar la sustitución : $y = vx$

$dy = v\,dx + x\,dv$.

3) COEFICIENTES LINEALES.

$(ax + by + c)\,dx + (ex + fy + g)\,dy = 0$

Solución

a) Si $ax + by + c = 0 \wedge ex + fy + g = 0$ se intersectan en (h, k) hacer $u = x - h$ $v = y - k$.
$du = dx$ $dv = dy$.

b) Si $ax + by + c = 0 \wedge ex + fy + g = 0$ no se intersectan hacer $u = ax + by$
$du = a\,dx + b\,dy$.

4) EXACTAS

$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, tal que $\dfrac{\partial M}{\partial Y} = \dfrac{\partial N}{\partial X}$

Solución $F(x, y) = C$, tal que $\dfrac{\partial F}{\partial X} = M \wedge \dfrac{\partial F}{\partial Y} = N$

5) FACTOR INTEGRANTE (F. I).

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial Y} - \dfrac{\partial N}{\partial X}}{N} = g(x) \Rightarrow \text{F. I} = e^{\int g(x)dx}, \quad \frac{\dfrac{\partial M}{\partial Y} - \dfrac{\partial N}{\partial X}}{-M} = h(y) \Rightarrow \text{F.I.} = e^{\int h(y)dy}$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial Y} - \dfrac{\partial N}{\partial X}}{N - M} = \phi(z) \Rightarrow \text{F. I.} = e^{\int \phi(z)dz}, \ z = x + y, \quad \frac{\dfrac{\partial M}{\partial Y} - \dfrac{\partial N}{\partial X}}{YN - XM} = Y(z) \Rightarrow \text{F. I} = e^{\int \varphi(z)dz}, \ z = x \cdot y.$$

$x\,dy - y\,dx \Rightarrow$ F. I. $= 1/x^2$, $x\,dy - y\,dx \Rightarrow$ F. I $= 1/y^2$

$x\,dy - y\,dx \Rightarrow$ F. I. $= 1/xy$, $x\,dy - y\,dx \Rightarrow$ F. I. $= 1/x^2 + y^2$

$x\,dy + y\,dx \Rightarrow$ F. I. $= 1/(xy)^n$, $x\,dx + y\,dy \Rightarrow$ F. I. $= 1/(x^2 + y^2)^n$

6) LINEALES

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x) \qquad \text{(lineal en y)}$$

Solución $\quad Y = e^{-\int p(x)dx}\left[c + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]$

Nota: También se puede hacer la linealidad en x.

7) ECUACIÓN DE BERNOULLI

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)\,y^n$$

Solución: Dividir la ecuación por Y^n y hacer la sustitución $u = y^{1-n}$

$$\frac{du}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\,\frac{dy}{dx}$$

8) ECUACIÓN DE RICCATI

$$\frac{dy}{dx} + q_2(x)\,y^2 + q_1(x)\,y + q_0(x) = 0 \quad , \quad q_2(x) \neq 0$$

Solución: Hacer $y = y_p + \frac{1}{z}$, y_p = solución particular.

9) REDUCCIÓN DE ORDEN

a) $f(x, y', y'') = 0$ (ausencia de y)

Solución: $y' = p \quad , \quad y'' = \frac{dp}{dx}$

b) $f(y, y', y'') = 0$ (ausencia de x)

Solución $Y' = p \quad , \quad y'' = p\,\frac{dp}{dy}$

10) ECUACIÓN DE CLAIRAUT

$y = xy' + f(y')$

Solución

$y' = v$

$y = xv + f(v)$

$y' = xv' + v + f'(v)\,v'$

$v' = (x + f'(v)) = 0 \Rightarrow \quad v' = 0 \quad \vee \quad x + f'(v) = 0$

$v = c \quad \vee \quad x = -f^1(v)$

$\boxed{y = (x + f(c)} \quad \vee \quad \boxed{y = -v\,f'(v) + f(v)}$

sol. general $\qquad$ sol. singular (envolvente)

FORMULARIO 5: APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

1) Trayectorias Ortogonales

$F(x, y, y') = 0 \quad \Rightarrow \quad F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$

$F\left(r, \theta, \frac{r\,d\theta}{dr}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F\left(r, \theta, \frac{dr}{r\,d\theta}\right) = 0$

2) Problemas geométricos

Ec. de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en (x_o, y_o)

$$y - y_o = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_o y_o)} \cdot (x - x_o)$$

Ec. de la recta normal a la curva $y = f(x)$, en (x_o, y_o)

$$y - y_o = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_o, y_o)}} \cdot (x - x_o)$$

3) Problemas de crecimiento y decrecimiento

$\frac{dx}{dt} = \pm\, k\,x$, variación de x respecto a t es proporcional a x.

$+$ si x crece cuando t crece, $-$ si x decrece cuando t crece.

$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{x}$, variación de x respecto a t es inversamente proporcional a x.

$\frac{dx}{dt} = k\,x \cdot t$, variación de x respecto a t es proporcional a x y a t.

4) Problemas de mezclas

$\frac{dx}{dt} =$ velocidad de ganancia $-$ velocidad de pérdida

(entrada de la sustancia) (salida de la sustancia)

5) Problemas de enfriamiento

$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_a)$, T = temperatura de la sustancia, T_a = temperatura del medio

6) Problemas mecánicos

Velocidad = v = $\frac{dx}{dt}$, x = desplazamiento del cuerpo en el instante t, desde un punto 0.

Aceleración = a = $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$

Fuerza $\boxed{F = m \cdot a}$

Masa $\boxed{m = \frac{w}{g}}$ w es el peso, g es la gravedad

g = 9,8 m / seg^2 = 980 cm / seg^2 = 32 pies / seg^2.

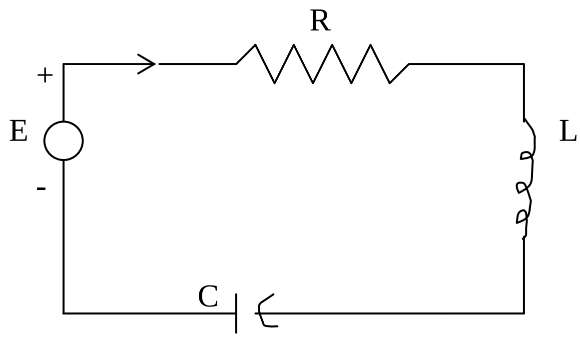
w puede venir dado en kgrs peso o en libras.

Caída libre $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = g}$

Caída retardada $\boxed{F = mg - Fr}$

Donde Fr = fuerza de resistencia del medio

7) Circuitos eléctricos



E_r = I R , $E_L = \frac{LdI}{dt}$, $E_c = \frac{Q}{c}$, $\boxed{\frac{LdI}{dt} + I\,a + \frac{Q}{c} = E}$ $\boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$

FORMULARIO 6: ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN N

ECUACIÓN: $$\boxed{a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ . \ . \ . + a_n y = F(x)} \qquad (1)$$

o brevemente $$\boxed{\varnothing (D)y = F(x)} \qquad (2)$$

donde $D = d / dx$, $\varnothing(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ . \ . \ . + a_n$ (3)

SOLUCIÓN:

<u>Paso 1</u>: Encuentre la solución general de la ecuación complementaria de (1) o (2), esto es,

$$\boxed{\varnothing (D)y = 0} \qquad (4)$$

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ . \ . \ . + c_n y_n \qquad (5)$$

donde c_1, c_2, ..., c_n son constantes arbitrarias.

<u>Caso a). Todos los coeficientes constantes</u>: En este caso hacemos $y = e^{mx}$ en (4) para obtener la ecuación auxiliar.

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \ . \ . \ . + a_n = 0. \qquad (6)$$

con n raíces dadas por m_1, m_2, ..., m_n. Las siguientes posibilidades pueden ocurrir.

(i) **<u>Raíces reales y distintas</u>**. Aquí la solución complementaria es

$$y_c = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + ... + c_n e^{m_n x}$$

(ii) **<u>Algunas (o todas) las raíces son repetidas</u>**. Aquí si la raíz m_1, por ejemplo, ocurre p_1 veces entonces los términos de la solución complementaria correspondientes a estas raíces están dados por

$$c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + c_3 x^2 e^{m_1 x} + ... + c_{p_1} x^{p_1 - 1} e^{m_1 x} = (c_1 + c_2 x + ... + c_{p_1} x^{p_1 - 1}) e^{m_1 x}$$

La suma de todos estos términos para todas las raíces produce y_c.

(iii) **<u>Algunas (o todas) las raíces son imaginarias.</u>** Puesto que las constantes a_0, a_1,....,a_n en (6) se asumen reales, cualesquiera raíces imaginarias deben ocurrir en parejas complejas conjugadas. Si $\alpha \pm \beta i$ es una de tales parejas la cual es no repetida, el término y_c correspondiente a la pareja está dado por $e^{\alpha x}$ [c_1 cos(βx) + c_2, sen(βx)]. Si esta pareja ocurre dos veces, el término correspondiente en y_c está dado por

$$e^{\alpha x} [c_1 \cos(\beta x) + c_2, \operatorname{sen}(\beta x)] + x e^{\alpha x} [c_3 \cos(\beta x) + c_4 \operatorname{sen}(\beta x)]$$

<u>Caso (b). Coeficientes variables (no todos constantes):</u> Aquí el método de hacer $y = e^{mx}$ no funcionará (excepto en casos muy especiales), así que se deben usar técnicas especializadas para encontrar y_1, y_2, ..., y_n, como por ejemplo en el caso de la ecuación de Euler, donde la transformación $x = e^z$ se usa para reducir el caso de coeficientes variables al de coeficientes constantes.

Paso 2: Encuentre una solución particular y_p de la ecuación (2) dada. Para el caso de coeficientes constantes hay tres posibles métodos los cuales pueden ser usados, como sigue:
Método de los coeficientes indeterminados, Método de los aniquiladores, Método de variación de parámetro.

Paso 3: Una vez hayamos obtenido y_c y y_p la solución general de (2) está dada por $y = y_c + y_p$

Wronskiano:

W [y_1, y_2] = $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ = $y_1 y'_2 - y_2 y'_1$

W [y_1, ---, y_n] = $\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$

W [y_1, ---, y_n] $\neq 0$ $\Rightarrow$ y_1, ---, y_n l. i.

W [y_1, ---, y_n] = 0 $\Rightarrow$ y_1, ---, y_n l.d.

OBTENCIÓN DE UNA SOLUCIÓN Y_2, CONOCIDA LA SOLUCIÓN Y_1 DE $(a_0D^2 + a_1D + a_2)y=0$.

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}}{y_1^2}dx$$

OBTENCIÓN DE UNA SOLUCIÓN PARTICULAR POR EL MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS.

Ec. dif $\boxed{\varnothing (D)\, y = F(x).}$

a) F (x) contiene la forma e^{rx} , $y_p = a\, e^{rx}$
b) F (x) contiene la forma sen(rx), cos(rx), y_p = a sen (rx) + b cos(rx)
c) F (x) contiene la forma $a_n x^n$ + --- + a_0 , $y_p = b_n x^n$ + --- - + b_0

OBTENCIÓN DE UNA SOLUCIÓN PARTICULAR POR EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS.

$$y_p = y_1 \int \frac{-y_2F(x)}{W}dx + y_2 \int \frac{y_1F(x)}{W}dx \quad \text{(orden 2)}$$

$$y_p = y_1 \int \frac{V_1F(x)}{W}dx + y_2 \int \frac{V_2F(x)}{W}dx + \ldots\ldots + y_n \int \frac{V_nF(x)}{W}dx. \text{ (orden n)}$$

$V_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$ ------------------ $V_n = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & 0 \\ y_1' & y'_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ y_1^{n-1} & y_1^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

FORMULARIO 7: APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

1) MOVIMIENTOS VIBRATORIOS

a) **ECUACIÓN:** $\boxed{\frac{w}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = Fr = -kx}$ (fuerza restauradora)

SOLUCIÓN 1: $x(t) = x_0\cos(a\,t)$ (mov. armónico simple)

$A = |x_0|$ (amplitud), $T = \frac{2\pi}{a}$ (periodo), $F = \frac{1}{T}$ (frecuencia)

SOLUCIÓN 2: $x(t) = a\cos(\alpha\, t) + b\,\mathrm{sen}(\alpha\, t) = \sqrt{a^2+b^2}\ \mathrm{sen}(\alpha t + \theta)$,

Donde $\mathrm{sen}\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $A = \sqrt{a^2+b^2}$ (amplitud), $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ (período), $F = \frac{1}{T}$ (frecuencia)

b) **ECUACIÓN:** $\boxed{\frac{w}{g}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta dx}{dt} + kx = 0}$

donde $Fr = -kx$ (fuerza restauradora), $Fa = -\beta\frac{dx}{dt}$ (fuerza amortiguadora)

SOLUCIÓN:

a) Raíces Complejas $\Rightarrow$ Mov. Amortiguado.
b) Raíces Reales $\neq$ $\Rightarrow$ Mov. Sobreamortiguado
c) Raíces Reales $=$ $\Rightarrow$ Mov. Críticamente amortiguado.

c) **ECUACIÓN**: $\boxed{\frac{w}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = F_r + F_a + F_e}$

donde F_r = fuerza restauradora, F_a = fuerza amortiguadora, F_e = fuerza externa.

2) CIRCUITOS ELÉCTRICOS.

ECUACIÓN: $\boxed{L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E(t)}$

$I = \frac{dq}{dt}$ = intensidad de corriente, L =Inductancia, R =Resistencia, C =Capacitancia, E =Fuerza Electromotriz.

3) PÉNDULO SIMPLE.

ECUACIÓN: $\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g\theta}{l} = 0}$

SOLUCIÓN: $\theta(t) = A\mathrm{sen}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + B\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$ (mov. armónico simple), $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}$ (período), $F = \frac{1}{T}$ (frecuencia)

4) OSCILACIONES EN UN LÍQUIDO.

ECUACIÓN: $\boxed{\frac{w}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -F_{neta}}$

F_{neta} = Volumen que oscila por densidad de fluido. Densidad de agua quieta: 62,5 libras/pies^3.

SOLUCIÓN: $x(t) = A\cos\sqrt{\frac{gF_0}{w}}\,t + B\mathrm{sen}\sqrt{\frac{gF_0}{w}}\,t$, F_0 es la fuerza ejercida por el volumen desplazado.

FORMULARIO 8: ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES VARIABLES

Ecuación de Euler

$$\boxed{a_n x^n \; y^{(x)} + a_{n-1} x^{n-1} \; y^{(n-1)} + \text{---} + a_1 x \; y' + a_0 y = g(x)}$$

La transformación $\boxed{x = e^z}$ convierte a esta ecuación diferencial en una de coeficientes constantes.

Sea $x = e^z \quad \therefore \quad \dfrac{dx}{dz} = e^z$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy/dz}{dx/dz} = e^{-z}\frac{dy}{dz}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(e^{-z}\frac{dy}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(e^{-z}\frac{dy}{dz}\right)\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dz}\left(e^{-z}\frac{dy}{dz}\right)e^{-z} = e^{-2z}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)$$

reemplazando en la ecuación diferencial, se tiene la ecuación de coeficientes constantes

Solución en serie de potencias.

Consiste en reemplazar la incógnita y por una serie de potencia en la ecuación diferencial.

Si $\boxed{y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \; (x-a)^k}$

$\therefore \quad \boxed{y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k \; (x-a)^{k-1}}$

$$\boxed{y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k \; (x-a)^{k-2}}$$

Definiciones

Dada la ecuación diferencial de 2° orden de la forma : $p(x)\, y'' + q(x)\, y' + r(x)\, y = 0$ donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son polinomios. Diremos que $x = a$ es un **punto ordinario** si $p(a) \neq 0$, en caso contrario se llama **punto singular**.

Algunos desarrollos en series importantes

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \ -1 < x \leq 1$$

$$\text{sen}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x.$$

Solución entorno a un punto ordinario.

Si x_0 es un punto ordinario, la solución de una ec. dif. viene dada por:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

que convenga por lo menos para $| x - x_0 | < R$, donde R es la distancia de x_0 el punto singular más cercano.

Solución en torno a un punto singular regular

Método de Frobenius:

Si x_0 es un punto singular regular de la ec. dif, existe al menos una solución en serie de la forma:

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$$

donde r es una constante a determinar. La serie convergerá al menos en algún intervalo $o < x - x_0 < R$.

FORMULARIO 9: TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$, transformada de Laplace de f (t)

$F(s) = L(f(t)) \Rightarrow L^{-1}(F(s)) = f(t)$, transformada inversa de F(s)

N°	f (t)	F (s)
1	1	$\frac{1}{s}$, s > 0
2	t	$\frac{1}{s^2}$, s > 0
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, s > 0
4	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, s > a
5	$sen(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, s > 0
6	$cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, s > 0
7	$senh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$, s > | a |
8	$cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$, s > | a |
9	$e^{at}sen(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, s > 0
10	$e^{at}cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, s > 0
11	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$, s > 0
12	$tsen(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$, s > 0

N°	f (t)	F (s)
13	tcos(at)	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$, s > 0
14	$t^{n-1}\, e^{-at}$	$\frac{(n-1)!}{(s+a)^n}$, s > -a
15	t^2sent	$\frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$, s > 0
16	Y ’(t)	sL(Y) - Y(0)
17	Y”(t)	s^2L(Y) – s Y(0) – Y’(0)
18	Y”’(t)	s^3L(Y) – s^2Y(0) – sY’(0) – Y’’(0)
19	$Y^{(n)}(t)$	s^nL(Y) – s^{n-1}Y(0) - .... – $Y^{(n-1)}(0)$
20	$f(t-a)U(t-a)$ $U(t-a)=\begin{cases}0, si\ \ 0\le t<a\\ 1, si\ \ t\ge a\end{cases}$	e^{-as} F(s), donde F(s) = L{f(t)}
21	f * g = $\int_0^t$ f(τ)g(t-τ)dτ	F(s) G(s)
22	f(t) periódica de periodo T	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_a^T e^{-st} f(t)\, dt$
23	t^n f(t)	$(-1)^n F^{(n)}(s)$, n $\in$ IN
24	$\delta_a(t-t_0)$ $\delta_a(t-t_0)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, si\ \ t\in\,]t_0-a, t_0+a[\\ 0, si\ \ t\notin\,]t_0-a, t_0+a[\end{cases}$	$e^{-st_0}\left(\frac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa}\right)$
25	$\delta(t-t_0)$ $\delta(t-t_0)=\begin{cases}+\infty, si\ \ t=t_0\\ 0, si\ \ t\ne t_0\end{cases}$	e^{-st_0}

FORMULARIO 10: SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Solución mediante operadores.

a) Usando Eliminación Gaussiana: Se reduce la matriz de los coeficientes principales a la forma matricial.

b) Usando la regla de Cramer.

El sistema
$$\begin{aligned} L_1x + L_2y &= g_1(t) \\ L_3x + L_4y &= g_2(t) \end{aligned}$$

Tiene solución: $\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} X = \begin{vmatrix} g_1 & L_2 \\ g_2 & L_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} Y = \begin{vmatrix} L_1 & g_1 \\ L_3 & g_2 \end{vmatrix}$

si $\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix}$ es un polinomio de orden n, entonces deben haber n constantes arbitrarios en la solución general

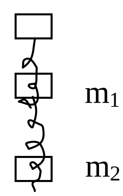
c) Usando la transformada de Laplace.

Se aplica la transformada de Laplace a cada ecuación y se revuelve el sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son L(x) y L(y).

Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

a) Resortes acoplados.

$$\begin{aligned} m_1 x''_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 x''_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) \end{aligned}$$



b) Redes electricas.

Se aplican las dos leyes de Kirchhoff

1) La suma algebraica de las corrientes que viajan hacia cualquier nudo es igual a cero.
2) La suma algebraica de las caídas de voltaje, alrededor de cualquier malla cerrada es igual a cero.

$$i_k = i_p + i_q + i_r \qquad i = \text{Corriente}$$

$$E(t) = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{c}$$

R = Resistencia, L = Inductancia, C = Capacitancia, Q = Carga Eléctrica

c) Problema de mezclas

$\frac{dx_i}{dt}$ = (velocidad de entrada)(cantidad entrada) - (velocidad de salida)(cantidad de salida).

Sistemas de ecuaciones diferenciadas de primer orden.

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + \quad \dots \quad \dots \quad + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + \quad \cdots \quad \cdots \quad + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$

Forma Matricial: $X' = AX + F$

Solución Sistema: $X = X_c + X_p$

Calculo de X_c : mediante valores propios y vectores propios.

a) Valores propios reales.

Si A es de orden n x n y tiene $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valores propios y $k_1, \dots, k_n$ los correspondientes vectores propios, entonces:

$$x_c = c_1 k_1 e^{\lambda 1t} + c_2 k_2 e^{\lambda 2t} + c_n k_n e^{\lambda nt}$$

b) Valores propios complejos.

Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ es un valor propio de A y K_1 es el vector propio correspondiente a λ_1.

Sea $B_1 = \frac{1}{2}[k_1 + \bar{k}_1]$ y $B_2 = \frac{i}{2}[k_1 - \bar{k}_1]$

Entonces

$X_1 = (B_1 \cos(\beta t) + B_2 \operatorname{sen}(\beta t))\, e^{\alpha t}$

$X_2 = (B_2 \cos(\beta t) + B_1 \operatorname{sen}(\beta t))\, e^{\alpha t}$

son soluciones l. i

c) Valores propios repetidos

Sea $\lambda 1$ valor propio de A con multiplicidad $m \leq n$. Entonces:

i) A tiene m vectores propios li para λ_1 y la expresión $c_1 k_1 e^{\lambda 1t} + \text{--} + c_m k_m e^{\lambda 1t}$ está en x_c.

ii) Si a $\lambda 1$ le corresponde solo un vector propio k_1, entonces se pueden encontrar m soluciones l.i. de la forma.

$$x_1 = k_{11} e^{\lambda 1t}$$
$$x_2 = k_{21} t\, e^{\lambda 1t} + k_{22}\, e^{\lambda 1t}$$
$$\vdots$$
$$x_m = k_{m1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda 1t} + k_{m2} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda 1t} + \text{---} + k_{mn}\, e^{\lambda 1t}$$

en donde los k_{ij} son vectores columnas, tales que

$(A - \lambda I)\ k_2 = k_1$

$(A - \lambda I)\ k_3 = k_2$

$(A - \lambda I)\ k_4 = k_3$

etc.

Calculo de X_p. Para el sistema $X' = AX + F$

a) Método de los coeficientes indeterminados.

Se aplica si F (t) es una matriz cuyos elementos son constantes, polinomios, funciones exponenciales, senos y cosenos o bien sumas finitas de estas funciones. Si un término de x_p está en x_c , entonces se debe agregar el término multiplicado por una mínima potencia de t.

b) Método de variación de parámetros.

Sea $\boxed{X_c = \phi(t) \cdot C}$, donde $\phi(t) = (x_1, ..., x_n)$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

X_1 , ---, X_n son vectores solución del sistema

$$\therefore \quad \boxed{X_p = \phi(t) \int \phi^{-1}(t)\, F(t)\, dt}$$

$$\therefore \quad \boxed{X = \phi(t) \cdot C + \phi(t) \int \phi^{-1}(t)\, F(t)\, dt}$$