UNIVERSIDAD CATÓLICA LOS ÁNGELES
CHIMBOTE

SISTEMA DE UNIVERSIDAD ABIERTA

DOCENTE : Econ. Julio Lezama Vásquez

E-MAIL: julezavas@hotmail.com

MATEMÁTICA FINANCIERA I

Escuelas Profesionales de Contabilidad y Administración
Departamento Académico de Contabilidad
Ciclo II

Lezama Vásquez, Julio. Matemática Financiera I. Universidad Católica Los Ángeles de Chimbote. Chimbote. 2010. 201 p.

Edición:
Lic. Mariadhela Aguilar Minchón

Universidad Los Ángeles de Chimbote
Leoncio Prado 443
Chimbote (Perú) www.uladech.edu.pe
maguilarm@uladech.pe

Reservados todos los derechos. No se permite reproducir, almacenar en los sistemas de recuperación de la información ni trasmitir alguna parte de esta publicación, cualquiera que sea el medio empleado-electrónico, mecánico- fotocopia, grabación, etc., sin el permiso previo de los titulares de los derechos de la propiedad intelectual.

ÍNDICE

CAPÍTULO XIII: ANUALIDADES ANTICIPADAS

CAPÍTULO XIV: ANUALIDADES DIFERIDAS

CAPÍTULO XV: AMORTIZACIONES

CAPÍTULO XVI: INTERÉS COMPUESTO

INTRODUCCIÓN

El mundo de los negocios nos involucra en la tarea de dar solución a los problemas de carácter financiero y para ello hacemos uso de las herramientas que nos proporcionan las Matemáticas Financieras. Éstas permiten evaluar las diferentes alternativas de financiamiento, de manera que se constituyen en instrumentos técnicos, que orientan a los ejecutivos en la toma de decisiones, para asignar recursos monetarios a las operaciones más rentables y que mejor convengan a las organizaciones.

El nuestro es un mundo globalizado, en el que la competencia en todos los campos como en el financiero, exige grandes esfuerzos y solamente se puede superar exitosamente con el apoyo de la ciencia y la tecnología, y en el cual se encuentran inmersos los conceptos de las matemáticas financieras, evolucionando y profundizando en la medida que se amplía el campo de sus aplicaciones.

Con la finalidad de dinamizar y hacer más comprensible el estudio de la asignatura de Matemática Financiera I. Diseñamos el presente texto porque existe un cúmulo de información al respecto pero, en forma dispersa, lo cual dificulta al estudiante en sistematizar su aprendizaje; así, presentamos los temas en forma secuencial, tocando los contenidos necesarios para construir un conocimiento básico y de calidad que el alumno necesita para desarrollar la asignatura de Matemática Financiera II y fortalecer sus conocimientos en la materia en una forma sólida y consistente.

El texto está completamente dedicado a la propuesta de aprender por medio de ejemplos. Cada capítulo guía al lector paso a paso, a través de ejercicios y casos de aplicación que permitirán desarrollar habilidades para proponer y solucionar problemas referentes a los temas tratados.

El texto se ha diseñado en dieciséis capítulos, presentando primero la teoría y los conceptos fundamentales de cada tema, luego buscamos la aplicación y la solución correspondiente, para lo cual se dispone de las fórmulas referidas a cada caso.

Obtenemos las fórmulas por el método de la deducción, a fin de evidenciar el fundamento teórico del tema y familiarizar al estudiante con el manejo de dichos instrumentos, facilitando la solución de los diferentes problemas que cotidianamente se presentan.

La matemática financiera es una materia eminentemente práctica y el propósito del texto con sus numerosos ejemplos, es proveer al lector, no solo del entendimiento de los conceptos financieros, sino de la habilidad de aplicarlos resolviendo problemas tipos en cada caso.

El autor.

CAPÍTULO I

1. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS

1.1 Secuencia de las operaciones

Las operaciones matemáticas tienen un orden de ejecución, de manera que es necesario tener presente la secuencia lógica de las operaciones, a fin de su adecuada aplicación en los casos que correspondan.

En las operaciones matemático – financieras, en las que intervienen potenciaciones, radicaciones, multiplicaciones, divisiones, sumas y restas; en las que no estén presentes los signos de agrupación, la secuencia de las operaciones mantienen el siguiente orden: Potenciaciones y radicaciones, multiplicaciones y divisiones y finalmente adiciones y sustracciones.

Ejemplo 1.1. Siguiendo la secuencia de las operaciones determinamos el resultado del la expresión siguiente:

$4+5x3-8\div4+2^3+\sqrt{36}$

$= 4+5x3-8\div4+8+6$

$= 4+15-2+8+6$

$= 31$

Cuando las expresiones matemáticas demandan el uso de los signos de agrupación, como es el caso de las fórmulas utilizadas en las matemáticas financieras, es frecuente el uso de los siguientes signos de agrupación

- Paréntesis : ( )
- Corchetes : [ ]
- Llaves : { }

Si aplicamos los signos de agrupación en la solución del ejercicio en cuestión, obtenemos el siguiente resultado:

$(4+5) \times (3-8) \div (4+2^3) + \sqrt{36}$

$= 9x-5\div12+$

$= - 45\div12+6$

$= 2.25$

Cuando en una expresión numérica figuran paréntesis, se efectúan en primer lugar las operaciones contenidas dentro del paréntesis. Si en una expresión numérica hay varios signos de agrupación uno dentro de otros, se efectúa primero los de dentro

Ejemplo 1.2: Determinar el resultado de las siguientes operaciones:

a. 25 – 4x3 – 2 (12 – 3 x 4 + 10 : 2)
= 25 – 12 – 2 (12 – 12 + 5)
= 25 – 12 – 2 (0 + 5)
= 3

b. 60 – 5 (12 – 4) + 3 x 2 (12 – 9)
= 60 – 5 x 8 + 3 x 2 x 3
= 60 - 40 + 18
= 20 + 18
= 38

1.2 Potenciación

Cuando en una multiplicación se repiten como factores **n** valores iguales, al que lo llamamos valor base y lo representamos por **b,** el resultado viene a ser la enésima potencia de **b,** operación que se conoce como **potenciación** y se representa por $\mathbf{b^n}$ y se lee **b** elevado a la **n.**

En las operaciones a interés compuesto el uso de la potenciación es frecuente, se presenta en casi todas las fórmulas simplificando los cálculos, evitando multiplicar repetidamente un valor.

Ejemplo:

Expresar en forma de potenciación las multiplicaciones siguientes:

(1+i) (1+i) (1+i) (1+i) (1+i) (1+i) = $(1+i)^6$

(1 - i) (1 - i) (1 - i) (1 - i) (1 - i) = $(1+i)^5$

1.3 Casos de la potenciación

En las operaciones de potenciación se presentan diferentes casos que es necesario tener en cuenta para la correcta aplicación del tema.

1. **Multiplicación de potencias de igual base**

Para multiplicar potencias de igual base los exponentes se suman, de manera que la multiplicación de a^2 por $a^{3,}$ lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$a^2 \; . \; a^3 = a^{2+3} = a^5$$

Lo que nos permite generalizar:

$$a^n \; . \; a^m = a^{n+m}$$

2. **División de potencias de igual base**

Para dividir potencias de igual base los exponentes se restan, de manera que la división de a^2 por $a^{3,}$ lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$\frac{a^4}{b^2} = a^{4-2}$$

Lo que nos permite generalizar:

$$\frac{a^n}{b^m} = a^{n-m}$$

3. **Multiplicación de potencias de igual exponente**

Para multiplicar potencias de igual exponente, se multiplica correspondientemente las bases y al producto se le eleva al exponente indicado.

Si a^3, b^3 = (ab) (ab) (ab) = $(ab)^3$

Generalizando:

$$a^n \cdot b^n = (a.b)^n$$

División de potencias de igual exponente

Para dividir potencias de igual exponente, se expresa la división como una fracción y mediante un signo de agrupación como el paréntesis, se le eleva al exponente indicado.

La expresión $\frac{a^n}{b^n}$ es igual a $\left(\frac{a}{b}\right)^n$

De manera que la expresión: $\frac{(1+i)^5}{(1+j)^5}$, lo podemos simplificar de la forma siguiente: $\left(\frac{1+i}{1+j}\right)^5$

4. Potencia de potencia

Para potenciar una potencia de una base cualquiera, se multiplican los exponentes de las potencias y a cuyo producto se eleva la base propuesta.

En términos matemáticos lo manifestado lo expresamos de la manera siguiente:

$$\left(a^n\right)^m = a^{n.m}$$

1.4 Radicación

Es una operación inversa a la potenciación de manera que la expresión **b**^{n} = **P** se lee, **b** es la raíz enésima de **P**, a la operación consistente en calcular la raíz de una cantidad se le llama radicación.

Al igual que la potenciación la radicación se presenta con frecuencia en las operaciones financieras a interés compuesto, en el cual radica la importancia del tratamiento del tema.

En términos de definición la radicación es la operación que consiste en hallar la base de una potencia, cuando se conoce el exponente y la potencia.

Dicho de otro modo: La raíz de un número es otro número que elevado a la potencia que indica el índice, coincide con la cantidad subradical.

Si $\mathbf{b}^n = \mathbf{P}$ entonces $\mathbf{b} = \sqrt[n]{P}$

En el que: **b** **=** Raíz enésima de P

n = Índice de la raíz

P = Cantidad sub radical o radicando

$\sqrt{\ }$ = Signo radical

En el cálculo financiero es frecuente el uso de términos, como la enésima potencia, la raíz enésima etc.

En el caso de la raíz enésima de un número es otro número, que elevado a la potencia enésima, da por resultado el número propuesto.

De manera que:

6 es la raíz cuadrada de 36, por que $6^2 = 36$

5 es la raíz cúbica de 125, por que $5^3 = 125$

B es la raíz enésima de P por que $b^n = P$

1.5 Logaritmos

En matemática el **logaritmo** es el exponente (o potencia) a la que un número fijo, llamado base, se ha de elevar para obtener un número dado.

Es la función inversa de la exponencial $x = b^n$, que permite obtener n, esta función se escribe como: $n = \log_b x$. Así, en la expresión $10^2 = 100$, el logaritmo de 100 en base 10 es 2, y se escribe como $\log_{10} 100 = 2$.

La expresión $3^4 = 81$, en términos de logaritmos será $\log_3 81 = 4$

El logaritmo es una de tres funciones relacionadas entre sí: en $b^n = x$, puede encontrarse b con radicales, n con **logaritmos** y x con exponenciación.

Etimológicamente la palabra logaritmo se debe a John Napier y está formada de las palabras griegas (logos), que significa razón o cociente, y (arithmos), con el significado de *número*, y se define, literalmente, como *un* número que indica una relación o proporción. Se refiere a la proposición que fue hecha por Napier en su "teorema fundamental", que establece que la diferencia de dos logaritmos determina la relación de los números a los cuales corresponden, de manera que una serie aritmética de logaritmos corresponde a una serie geométrica de números.

1.6 Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos mantienen ciertas identidades aritméticas muy útiles a la hora de realizar cálculos:

Primera propiedad. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log (c.d) = \log (c) + \log (d)$$

Segunda propiedad. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\text{Log} (c/d) = \log (c) - \log (d)$$

Tercera propiedad. El logaritmo de una potencia es igual al producto entre el exponente y el logaritmo de la base de la potencia.

$$\text{Log}(c^{d}) = d \text{ Log}(c)$$

Cuarta propiedad. El logaritmo de una raíz es igual al producto entre la inversa del índice y el logaritmo del radicando.

$$\text{Log } \sqrt[d]{c} = \frac{\log(c)}{d}$$

1.7 Ejercicios y problemas

1. Obtener el resultado de los siguientes ejercicios:

   a. $[(14+5) \times (12 - 4)] \div (3 + 4)^{2} + \sqrt{256}$

   b. $S = 3\,200 \left(1 + \frac{0.18x14}{12}\right)$

   c. $30 + [12 - (4 + 6)]$

   d. $(4 \times 3) : 2 + (17 + 3) : (2 + 3)$

2. Expresar como una sola potencia los siguientes ejercicios
   a. $(4^{-2} + 3^{-3})^{-2}$
   b. $5^2 . 5^3 . 5^5$
   c. $X^4 . X^3 . X . X^{12}$
   d. $3^X . 3^X . 3^X . 3^X$
   e. $2^4 . 3^4 . 5^4$
   f. $a^n . b^n . 2^n$

3. Quitar paréntesis reducir y expresar en una sola potencia
   a. $(4^{-2} + 3^{-3})^{-2}$
   b. $5^2 . 5^3 . 5^5$
   c. $X^4 . X^3 . X . X^{12}$
   d. $3^X . 3^X . 3^X . 3^X$
   e. $2^4 . 3^4 . 5^4$
   f. $a^n . b^n . 2^n$

4. Simplificar los radicales siguientes
   a. $\sqrt[4]{\frac{2^4}{10^4}}$
   b. $\sqrt[9]{64}$
   c. $\sqrt[12]{27.a^6 X^3}$
   d. $\sqrt[3]{27a} \quad \sqrt[3]{a^3}$

5. Resolver:
   a. Un comerciante ha comprado cierto número de pantalones por S/.256. Sabiendo que el número de pantalones coincide con el precio de cada pantalón, ¿cuántos pantalones compró?

   b. Se compra cierto número de bolígrafos por 196 soles. Sabiendo que el precio de un bolígrafo coincide con el número de bolígrafos comprados, ¿cuál es el precio de un bolígrafo?

c. Se compra cierto número de libros por S/. 729. Si el número de libros comprados es el cuadrado del precio de un libro, ¿cuántos libros he comprado y cuánto costó cada uno?

6. Expresa los logaritmos decimales de los siguientes números en función de log 2.

Los números son los siguientes:

4, 16, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{1024}$

0.5; 0.25; 0.125; 0.0625

$\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{1}{64}}$

C A P Í T U L O II

2. RAZONES Y PROPORCIONES

2.1 Conceptos Básicos

Magnitud

Es todo aquello que siendo inmaterial, es susceptible de medición, de comparación, de aumento o disminución; como el peso, la longitud, el área, el volumen, la velocidad la capacidad, el tiempo, la fuerza y otros.

Cantidad

Es cada uno de los estados particulares de una magnitud.

Cantidad homogénea

Ejemplo 2.1. Pertenecen a la misma magnitud.

a. 20 kg, 100 gs, 18 onzas, pertenecen a la magnitud peso.
b. 10 años, 15 meses, 2 horas, 20 minutos, etc. pertenecen a la magnitud tiempo.
c. 10 km, 50m. 30 millas, etc., son también cantidades homogéneas que pertenecen a la magnitud longitud.

Cantidades uniformes

Son las cantidades homogéneas que están expresadas en la misma medida.

Ejemplo 2.2.- La siguientes son cantidades uniformes

200 kg 20 kg, 30 kg.

10 km, 80 km, 120 km.

Magnitud Proporcional

Es la proporción directa o inversa, formado por las cantidades uniformes de una determinada magnitud.

Magnitudes directa e inversamente proporcionales

Estos temas son tratados con definiciones y ejemplos sencillos, que lo hacen entendible y claro de manera que no redundaremos desarrollando más al respecto.

2.2. Razones

Una razón es la comparación de dos cantidades uniformes por medio de la resta o la división.

El resultado de la comparación de dos cantidades uniformes, por medio de la sustracción, se llama ***razón aritmética.***

En este caso, si comparamos las cantidades 28 y 7, por medio de la sustracción obtenemos:

28 - 7 = 21 Razón aritmética

El resultado de la comparación de dos cantidades uniformes, por medio de la división, se llama ***razón geométrica.***

De manera que, comparando las cantidades 28 y 7, por medio de la división se tiene:

$\frac{28}{7}$ = 4 Razón geométrica

Las razones geométricas se pueden escribir de dos maneras:

a) Separando ambas cantidades con 2 puntos. 28 : 7
b) En forma de fracción $\frac{28}{7}$

Ejemplo 2.3.- Dos hermanos cuyas edades son de 40 años el mayor y de 20 años el menor respectivamente.

Estas dos cantidades uniformes lo podemos comparar de dos maneras

1. El mayor tiene 20 años más que el menor, o sea 40 – 20 = 20

El mayor tiene el doble de edad que el menor, o sea $\frac{40}{20}$ = 2

En consecuencia la razón aritmética de 40 y 20 es 20 y la razón geométrica de dichas cantidades es 2.

Las razones aritméticas se pueden escribir de dos maneras:

a. Separando las dos cantidades con el signo menos (–).
b. Separando ambas cantidades con un punto (.).

De la manera siguiente:
La razón aritmética de 40 es a 20 se puede escribir:
40 - 20 o bien 40 . 20

Elementos de una razón:
Los términos de una razón aritmética o geométrica reciben el nombre de **Antecedente** el primer término y de **Consecuente** el segundo término.
Al antecedente lo representamos por A y al consecuente por C
El resultado de la comparación del antecedente y consecuente se llama ***razón*** y lo representamos por R-
En consecuencia las razones se expresan:

a. Aritmética $A - C = R$ o también $A \cdot C = R$

b, Geométrica $\frac{A}{C} = R$ o también $A : C = R$

2.3 Propiedades de la Razón Aritmética

Primera Propiedad. El antecedente es igual a la suma del consecuente y la razón.

$$A = C + R$$

Segunda Propiedad.- La suma del antecedente, el consecuente y la razón es igual al doble del antecedente.

$$A + C + R = 2A$$

Tercera Propiedad.- Si a la suma del antecedente y consecuente le sumamos la razón, se obtiene el doble del antecedente y si le restamos la razón obtenemos el doble del consecuente. Si A + C = S entonces:

a. S + R = 2A

b S - R = 2C

Ejemplo 2.4.- Calcular A y C de las razones aritméticas siguientes:

a.	b.	c
S = 18	S = 25	S = 37
R = 8	R = 11	R = 12
S + R = 2A = 26	S+R = 2A = 36	S+R = 2A = 49
A = 13	A = 18	A = 24.5
S – R = 2C = 10	S-R = 2C = 14	S-R = 2C = 25
C = 5	C = 7	C = 12.5

2.4 Propiedades de la Razón Geométrica

Primera propiedad: El antecedente es igual al consecuente multiplicado por la razón propiamente dicha.

A = C x R

De esto se deduce que:

$$C = \frac{A}{R}$$

Ejemplo: Hallar el antecedente de las siguientes razones geométricas

a) X : 8 = 7

b) X : 3 = 12

c) $X : \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

d) X : 0.8 = 3

e) $X : 0.3 = \frac{5}{6}$

Segunda propiedad: En toda razón geométrica, el consecuente es igual a la suma del antecedente y consecuente dividido por la razón aumentado en uno.

$$C = \frac{A+C}{R+I} \quad \text{o} \quad C = \frac{S}{R+1}$$

Ejemplo: Hallar el antecedente y consecuente de las siguientes razones:

a. S = 24 $\quad C = \dfrac{24}{5+1}$

R = 5 $\quad C = 4$

$A = 20$

S = 36 $\quad C = \dfrac{36}{8+1}$

R = 8 $\quad C = 4$

$A = 32$

S = 75 $\quad C = \dfrac{75}{4+1}$

R = 4 $\quad C = 15$

$A = 60$

Tercera propiedad: En toda razón geométrica, la diferencia del antecedente y consecuente dividido por la razón disminuida en uno, es igual al consecuente.

$$\frac{A-C}{R-I} = C \quad \text{o} \quad \frac{D}{R-1} = C$$

Ejemplo: Hallar el antecedente y consecuente de las siguientes razones:

a) D = 24 $\quad C = \dfrac{24}{5-1}$

R = 5 $\quad C = 6$

$A = 30$

b) D = 40 $\quad C = \dfrac{40}{3-1}$

R = 3 $\quad C = 20$

$A = 60$

c) D = 16 $\quad C = \dfrac{16}{5-1}$

R = 5 $\quad C = 4$

$A = 20$

2.5 Proporciones

Es la expresión matemática constituida por dos razones con el mismo resultado, si las razones son aritméticas la proporción es aritmética y si las razones son geométricas la proporción es geométrica.

Ejemplo:

Proporción aritmética

15 . 9 = 6

10 . 4 = 6

Proporción geométrica

12 : 3 = 4

20 : 5 = 4

En el primer caso se lee 15 es a 9 como 10 es a 4; y en el segundo caso: 12 es 3 como 20 es a 5.

2.6 Elementos de una proporción

En toda proporción, al primer y último término se les llama extremos y a los términos centrales se les llama medios.

15 . 9 : 10 . 4

Medios

Proporción aritmética

Extremos

12 : 3 :: 20 : 5

Medios

Proporción geométrica

Extremos

2.7 Clases de proporciones

Hay dos clases de proporciones:

Proporción aritmética y proporción geométrica.

Proporción aritmética

Una proporción aritmética es la igualdad de dos razones aritméticas con el mismo resultado.

Las proporciones aritméticas se pueden representar de dos maneras:

a – b = c – d o también a · b : c · d

A su vez la proporción aritmética se clasifica en:

Discretas : Cuando todos sus elementos son diferentes

15 . 9 : 10 . 4 Proporción aritmética discreta

Continuas: Cuando los medios son iguales

16 . 6 : 6 . 4 Proporción aritmética continua

18 : 6 : : 6 : 2 Proporción geométrica continua

Proporción geométrica

Una proporción geométrica es la igualdad de dos razones geométricas con el mismo resultado

Una proporción geométrica se puede representar de dos maneras:

a **:** b **: :** c **:** d o también $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y en ambos casos se lee **a** es a **b** como **c** es a **d**

La proporción geométrica se clasifica al igual que la aritmética, en discreta y continua.

Discreta : Cuando todos su términos son diferentes

12 : 3 : : 20 : 5 Proporción geométrica discreta

Continuas: Cuando los medios son iguales

18 : 6 : : 6 : 2 Proporción geométrica continua

2.8 Formación de proporciones geométricas

Sea la razón geométrica $\frac{8}{10}$, si multiplicamos ambos términos por 3, obtenemos una nueva razón $\frac{24}{30}$, de manera que igualando las razones obtenemos la proporción:

$$\frac{8}{10} = \frac{24}{30}$$

y si a dicha razón lo dividimos a cada uno de sus términos por 2 obtenemos $\frac{4}{5}$ permitiéndonos formar una segunda proporción.

$$\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Continua: Para formar una proporción continua se escribe una razón geométrica, en el cual el consecuente sea múltiplo del antecedente, se multiplica su dos términos por el número de veces que el antecedente está contenido en el consecuente y luego se igualan las dos razones.

Sea la razón geométrica $\frac{5}{10}$, el antecedente está contenido dos veces en el consecuente, por tanto, multiplicamos ambos términos por 2, obteniéndose una nueva razón $\frac{10}{20}$, igualamos las dos razones y obtenemos la proporción:

$$\frac{5}{10} = \frac{10}{20} ,$$

2.9 Propiedades de las proporciones geométricas

Primera Propiedad. En toda proporción geométrica, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Ejemplo:

45 : 3 : : 75 : 5

45 x 5 = 3 x 75

225 = 225

Segunda Propiedad En toda proporción geométrica continua, el término medio es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

Ejemplo:

32 : X : : X : 2

X = $\sqrt{32X2}$,

X = 8

En este caso el resultado recibe el nombre de media proporcional.

Tercera Propiedad. En toda proporción geométrica discreta, un término cualquiera es igual al producto de los términos contrarios, dividido entre el término del mismo nombre.

Ejemplo:

32 : 8 : : 40 : X

X = $\frac{8x40}{32}$

X = 10

Cuarta Propiedad. En toda proporción geométrica, la suma o diferencia del antecedente y consecuente es a su antecedente, como también a su consecuente en ambas razones.

Ejemplo:

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$; y $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$; y $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

3. $\frac{12}{3} = \frac{16}{4}$; $\frac{12+6}{12} = \frac{16+4}{16}$; y $\frac{12+3}{3} = \frac{16+4}{4}$

4. $\frac{12}{3} = \frac{16}{4}$; $\frac{12-3}{12} = \frac{16-4}{16}$; y $\frac{12-3}{3} = \frac{16-4}{4}$

2.10. Problemas propuestos

1. La razón geométrica entre las dimensiones de un patio rectangular es 2/5 si el ancho mide 6 metros. ¿Cuál es su longitud?
2. Determinar la media proporcional de una proporción geométrica, sabiendo que la suma de los términos extremos es 130 y su diferencia es 120.
3. Hallar el menor de dos números sabiendo que su razón es 5/7 y la suma 324.
4. La razón geométrica de dos números es 6/5, y la suma de dichos números es 33. ¿Cuáles son esos números?
5. ¿Cuáles son los números cuya diferencia es igual a 10 y cuya razón geométrica es 3?
6. Hallar los términos desconocidos de la proporción $\frac{27}{15}=\frac{X}{Y}$,sabiendo que X+Y= 14
7. Hallar los términos desconocidos de la proporción $\frac{18}{X}=\frac{6}{Y}$, sabiendo que X+Y= 16
8. La suma de los precios de dos productos A y B es S/.65.00 y la razón geométrica de dichos precios es de 9 es a 4. ¿Cuál es precio de cada uno?
9. Una camisa cuesta S/.10.00 más que una corbata y la razón geométrica de los precios es de 3 es a 4. ¿Cuánto cuesta cada una?
10. La relación de clientes hombres a clientes mujeres que visitan un restaurante criollo del Perú diariamente es de 4 a 5. Si en este momento hay 20 clientes mujeres. ¿Cuántos clientes varones hay en el restaurante?
11. La edad de dos clientes habituales de un restaurante de pescados y mariscos de Chimbote, están en la relación de 9 a 5. Si la edad del cliente mayor es 63 años. ¿Cuál es la edad del otro cliente?
12. En un campeonato deportivo realizado en el Perú. La razón de partidos ganados a partidos perdidos del equipo favorito es 6 a 4. Si en total se jugaron 20 partidos. ¿Cuántos partidos ganó y cuantos perdió?
13. En un restaurante de Chimbote la tarifa diaria de los mozos Alberto y Felipe es $\frac{5}{6}$.

    Si la tarifa de Alberto es S/. 20.00 soles. ¿Cuál es la tarifa de Felipe?. Si ambos trabajaron durante 5 días, ¿Cuánto recibirá cada uno por los días trabajados?

14. Las ventas de papa a la huancaína y de la ocopa arequipeña, dos platos típicos del Perú, están en una relación de 2 a 3, si las ventas de papa a la huancaína, fueron de S/.I,520 soles. ¿ Cual fue la venta de la ocopa arequipeña?
15. Las tarifas diarias de dos anfitrionas;, Mercedes y Luisa, son entre sí como 2 es a 8. Si la tarifa de Mercedes es S/.14 soles. ¿Cuál será la tarifa de Luisa?
16. La razón de mujeres a hombres que están en este momento en un bar es de 3 a 4. Si hay 36 mujeres. ¿Cuántos varones hay en el bar?
17. En un restaurante en el distrito de Miraflores la razón de clientes que toman una copa de vino, respecto a los que toman una copa de agua es de 1 a 5. Si hay 48 clientes en total. ¿Cuántos clientes toman vino?
18. El mayor de dos mozos de un restaurante limeño tiene 42 años y la relación entre sus edades es de 5 a 7. Hallar la edad del otro mozo.
19. La razón entre el largo y el ancho del área de una cocina es 3/2. Si el largo es de 15 mts. ¿Cuál es el ancho?
20. En un bar la razón de mujeres que toman un pisco sour o una algarrobina es de 3/4. Si en el bar hay 35 clientes mujeres, ¿cuántas de ellas toman un pisco sour?. Si cada pisco sour cuesta S/. 12.00, ¿cuánto fueron los ingresos del día por la venta de pisco sour a las clientes mujeres?
21. Sabiendo que la razón de los sueldos de 2 anfitrionas es 7/3 y su diferencia es 244. Calcular el sueldo de cada anfitriona.

C A P Í T U L O III

3. PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

Toda secuencia ordenada de números reales recibe el nombre de sucesión. Dentro del grupo de sucesiones existen dos particularmente interesantes por el principio de regularidad que permite sistematizar la definición de sus propiedades: las progresiones aritméticas y geométricas.

3.1. Progresiones Aritméticas

Es una sucesión de valores en los que cada uno de sus términos, es igual a la anterior, más una constante llamada diferencia o **razón**.

Cuando la razón es positiva los términos aumentan sucesivamente y la progresión toma el nombre de ascendente o creciente.

Si la razón es negativa los términos disminuyen sucesivamente y la progresión toma el nombre de descendente o decreciente.

En la solución de problemas y casos utilizaremos la siguiente simbología:

a = Primer término
u = Último término
n = Número de términos
r = Razón
S = Suma de todos los términos

3.1.1 Valores de una Progresión Aritmética

Primer Término

$$a = u - (n - 1)r$$

Ejemplo 3.1: Si el último término de una progresión aritmética es 72 , la razón 12 y el número de términos es 10. ¿Cuál es el primer término?.

$$a = 72 - (10-1)\ 12$$

$$a = -36$$

Último Término

$$u = a + (n - 1)\, r$$

Ejemplo 3.2: Hallar el último término de una progresión aritmética de 8 términos, si el primer término es 10 y la razón 9.

$$u = 10 + (8-1)\ 9$$

$$u = 73$$

Número de Términos

$$n = \frac{u-a}{r} + 1$$

Ejemplo 3.3: ¿Cuál es el número de términos de la siguiente progresión aritmética?
9, 6,. . . . ., -24

$$n = \frac{-24-9}{-3} + 1$$

$$n = 12$$

La razón

$$r = \frac{u-a}{n-1}$$

Ejemplo 3.4: Calcular la razón en la siguiente progresión aritmética de 18 términos: 10, ... , 95.

$$r = \frac{95-10}{18-1}$$

$$r = 5$$

3.1.2 Suma de los términos de una progresión aritmética

La suma de todos los términos de una progresión aritmética, es igual a la semisuma del primer y último término, multiplicado por el número de términos.

$$S = \left(\frac{a+u}{2}\right)n$$

Ejemplo 3.5: Calcular la suma de todos los términos de una progresión aritmética de 8 términos, si el primer término es 10 y el último 28.

$$S = \left(\frac{10+28}{2}\right)8$$

$$S = 152$$

Cuando no se conoce el último término se reemplaza este, por su fórmula o valor literal.

$$S = \left[\frac{a+a+(n-1)r}{2}\right]n$$

$$S = \left[\frac{2a+(n-1)r}{2}\right]n$$

Ejemplo 3.6: Una persona deposita en una cuenta de ahorros S/.200 nuevos soles mensuales, con un incremento de S/.20 mensual. ¿De cuánto dispondrá al término de 2 años y 8 meses?.

$$S = \left[\frac{2x200+(32-1)20}{2}\right]32$$

$$S = 510 \text{ x } 32$$

$$S = 16{,}320$$

3.1.3 Interpolación de medios aritméticos

La palabra interpolar que equivale a intercalar, insertar lo cual quiere decir, tratándose de números, a situarlos, intercalarlos, entre otros dos.

Ejemplo 3.7: Supongamos que nos dicen que entre 6 y 10 tenemos que interpolar o intercalar 3 términos y que además, tanto el 6 como el diez y los tres números que han de estar entre ellos, se encuentren en progresión aritmética.

Decimos que son **medios** porque están entre otros dos y **aritméticos** por tratarse de progresiones aritméticas.

De acuerdo al enunciado, entre el valor 6 y el valor 10 se debe interpolar 3 números o medios aritméticos, la nueva progresión tendrá 5 términos: el primer término de valor 6, el último término de valor 10 y los tres medios aritméticos:

Por lo general, para interpolar medios aritméticos se tiene que calcular la nueva diferencia o razón r.

En la progresión aritmética de primer término 6, último 10 y tres interpolados, en total 5 términos: El primero y el último más los interpolados, en total n+2 términos, siendo n el número de los interpolados.

En la fórmula: $u = a + (n-1)r$

Tenemos que despejar el valor de r*:*

$$r = \frac{u-a}{n-1}$$

Esta fórmula es correcta cuando no tenemos que interpolar, pero para el caso de interpolación no nos sirve, porque en lugar de **n** términos, tenemos **n+2**.

En la fórmula para el cálculo del valor de **r**, tendremos que sustituir **n** por **n+2**:

$$r = \frac{u-a}{n+2-1}$$

Resultando la nueva fórmula

$$r = \frac{u-a}{n+1}$$

Con esta última fórmula podemos determinar la razón o diferencia de la nueva progresión, y volviendo a nuestro ejemplo:

$$r = \frac{10-6}{3+1} = 1$$

La diferencia o razón es 1. Esto quiere decir que la nueva progresión sería:

6. 7. 8. 9. 10

En la que tenemos, 3 medios intercalados entre 6 y 10.

Ejemplo 3.8: Halla la **r** para interpolar 5 medios aritméticos entre 26 y 80.

$$r = \frac{80-26}{5+1}$$

$$r = 9$$

La progresión es: 26. 35. 44. 53. 62. 71. 80

Ejemplo 3.9: Entre 65 y 165 queremos interpolar 9 medios aritméticos. Calcular **r** y la suma de todos los términos.

$$r = \frac{165-65}{9+1}$$

$$r = 10$$

$$S = \left(\frac{65+165}{2}\right)11$$

$$S = 1265$$

Ejemplo 3.10: Entre –5 y –35 interpolar 5 medios aritméticos y escribir la progresión

$$r = \frac{-35-(-5)}{5+1}$$

$$r = -5$$

La progresión es: -5,-10,-15,-20,-25,-30.-35

Ejemplo 3.11: Las edades de 11 personas están en progresión aritmética y la suma de todas ellas es de 561, si la mayor tiene 86 años, ¿cuántos tiene la más joven?

$$\left(\frac{a+86}{2}\right)11 = 561$$

$$a = \frac{2x561}{11} - 86$$

$$a = 16$$

Ejemplo 3.12: La sucesión: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{2}$ . . . . . es una progresión aritmética. Determinar el término 15 y la suma de los 50 primeros términos.

El término 15 lo determinamos mediante la fórmula del último término

$$u = 0.1 + (15-1)0.1$$
$$u = 1.5$$

Con la misma fórmula determinamos el término 50

$$u = 0.1 + (50-1)0.1$$
$$u = 5$$

Conociendo el término 50 obtenemos la suma de los 50 primeros términos con aplicación de la fórmula correspondiente

$$S = \left(\frac{0.1+5}{2}\right)50$$
$$S = 127.50$$

3.2. Progresiones Geométricas

Una progresión geométrica es una sucesión de términos, en la que cada uno después del primero, es igual al anterior multiplicado por una constante llamada razón.

3.2.1 Valores de una Progresión Geométrica

Primer Término

$$a = \frac{u}{r^{n-1}}$$

Ejemplo 3.13: Si el último termino de una progresión geométrica es 8 748 , la razón 3 y el número de términos es 8. ¿Cuál es el primer términos?.

$$a = \frac{8748}{3^7}$$

$$a = \frac{8748}{2187}$$

$$a = 4$$

Último Término

$$u = a.r^{n-1}$$

Ejemplo 3.14: Hallar el último término de una progresión geométrica de 9 términos, si el primer término es 3 y la razón 2.

$$u = 3x\ 2^8$$

$$u = 768$$

Número de Términos

De $u = a.r^{n-1}$ despejar n :

$$r^{n-1} = \frac{u}{a}$$

$$(n-1) \log r = \log u - \log a$$

$$n - 1 = \frac{\log u - \log a}{\log r}$$

$$n = \frac{\log u - \log a}{\log r} + 1$$

Ejemplo 3.15: ¿Cuál es el número de términos de la siguiente progresión geométrica?. 4, 12,. . . . ., 8 748

$$n = \frac{\log 8{,}748 - \log 4}{\log 3} + 1$$

$$n = 8$$

La razón

De $u = a.r^{n-1}$ despejar r

$$r^{n-1} = \frac{u}{a}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$$

Ejemplo 3.10: Calcular la razón de una progresión geométrica de 7 términos, en el que el primer término es 8 y el último es 125 000.

$$r = \sqrt[6]{\frac{125{,}000}{8}}$$

$$r = 5$$

3.2.2 Suma de Términos de una Progresión geométrica

Para calcular la suma de todos los términos de una progresión geométrica limitada a_1, a_2, a_3,…., a_{n-1}, a_n, escribimos la suma de todos los términos. y lo multiplicamos por la razón de la siguiente manera:

1. $S = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \ldots\ldots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1}$

Multiplicamos la ecuación (1) por la razón

2. $Sr = a_1\cdot r + a_1\cdot r^2 + a_1\cdot r^3 + \ldots.. + a_1\cdot r^{n-1} + a_1\cdot r^n$

Ahora restamos la ecuación (1) de la ecuación (2) y obtenemos:

$$S\cdot r - S = -a_1 + a_1\cdot r^n$$

Ordenando signos en el Segundo miembro

$$S\cdot r - S = a_1\cdot r^n - a_1$$

Factorizando en ambos miembros

$$S\,(r - 1) = a_1\,(r^n - 1)$$

$$S = \frac{a_1\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

Ejemplo 3.11: Calcular la suma de los primeros 6 términos de una progresión geométrica, cuyo primer término es 3 y la razón 3.

$$S = \frac{3(3^6 - 1)}{3 - 1}$$

$$S = 1\,092$$

3.2.3 Producto de los términos de una progresión geométrica

Si observamos la progresión geométrica:

1:3: . . :81:243

Tenemos los términos: $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$

El producto de todos los términos de la progresión sería:

1) $P = a_1 \times a_2, \ldots, a_{n-1} \times a_n$

Sabemos que el orden de los factores no altera el resultado: 4 x 5 es lo mismo que 5 x 4. Podemos decir entonces, que el valor de P será igual a:

2) $P = a_n \times a_{n-1}, \ldots, a_2 \times a_1$

Si multiplicas el primer término por el último, el segundo por el penúltimo y el tercero por el antepenúltimo, etc., todos los productos son iguales:

$a_1 \times a_n = 1 \times 243 = 243$

$a_2 \times a_{n-1} = 3 \times 81 = 243$

$a_{n-1} \times a_2 = 81 \times 3 = 243$

$a_n \times a_1 = 243 \times 1 = 243$

Multiplicamos los contenidos de las ecuaciones (1) y (2) tanto los términos que se encuentran a la izquierda del signo = como los que se encuentran a la derecha de dicho signo.

Cada producto lo realizamos multiplicando el factor de la primera igualdad por su correspondiente factor de la segunda igualdad.

$$P \;=\; a_1 \, x \, a_2, \, . \, . \, , \, a_{n-1} \, x \, a_n$$

$$P \;=\; a_n \, x \, a_{n-1}, \, . \, . \, , \, a_2 \, x \, a_1$$

Ejecutando la multiplicación tenemos:

$$P \, x \, P \;=\; (a_1 \, x \, a_n)x(a_2 \, x \, a_{n-1}) \, x \, . \, . \; x(a_{n-1} \, x \, a_2)x(a_n \, x \, a_1)$$

Hemos visto anteriormente que los productos entre paréntesis ***son iguales*** por lo que podemos escribir:

$$P^2 \;=\; (a_1 \, x \, a_n)x(a_2 \, x \, a_{n-1}) \, x \, . \, . \; x(a_{n-1} \, x \, a_2)x(a_n \, x \, a_1)$$

Para mantener la uniformidad de la simbología hacemos $a_n = u$ luego simplificamos la ecuación:

$$P^2 \;=\; (a \, x \, u)^n$$

Despejando el valor de P:

$$P \;=\; \sqrt{(axu)^n}$$

De todo lo anterior concluimos en que, el producto de los términos de una progresión geométrica es igual a la raíz cuadrada del producto del primer y último término, elevado al número de términos.

Ejemplo 3.12: Experimentemos con la progresión geométrica: 1:2:4:8:16:32

El producto de los términos es = 1x2x4x8x16x32 = 32,768

Aplicando la fórmula del producto:

$$P \;=\; \sqrt{(1x32)^6} \quad 32^3 \;=\; 32,768$$

Obtenemos el mismo resultado.

3.2.4 Interpolación de medios geométricos

Se trata de calcular la razón para que los términos a interpolar entre dos números dados formen una progresión geométrica.

Para el efecto despejamos de la fórmula del último término de una progresión geométrica la razón, y el número de términos será igual al primer y último término que nos dan como datos, más el número de los medios geométricos, haciendo en total *n+2* términos:

$$u = a.r^{n-1}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$$

Ejemplo 3.13: Calcular la razón para interpolar entre 11 y 5632, ocho medios geométricos, y escribir la progresión.

$$r = \sqrt[9]{\frac{5632}{11}}$$

$$r = 2$$

La progresión es:

11:22:44:88:176:352:704:1408:2816:5632

Ejemplo 3.14: En la progresión geométrica: 3: 6: 12:……… el producto de dos términos consecutivos es 1152. ¿Cuáles son estos términos?

Sea X el primero de los términos que nos piden. El segundo será: 2xX = 2X

El producto de los valores de estos dos términos es: X x 2X = $2X^2$

$$2X^2 = 1152$$

$$X^2 = 576$$

$$X = \sqrt{576}$$

$$X = 24$$

$$2X = 48$$

Luego comprobamos que: 24 x 48 = 1,152., que corresponden al cuarto y quinto término.

Dado a que, si el tercer término vale 12 y la razón 2, el cuarto será: 12 x 2 = 24 y el quinto término será 24 x 2 = 48

Ejemplo 3.15: La suma de dos términos consecutivos de la progresión 6: 18: 54: …………. es 157464. ¿Cuáles son estos términos?
Si el primero es X el segundo será 3X luego la suma:

$$X + 3X = 157{,}464$$
$$4X = 157{,}464$$
$$X = 39{,}366$$
$$3X = 118{,}098$$

Luego X + 3X = 157,464, correspondientes al 9º y 10º término.

3.3 Listado se fórmulas

FÓRMULA	OBTIENE
PROGRESIONES ARITMÉTICAS	
a = u - (n – 1) r	Primer término
u = a + (n – 1) r	Último término
n = $\frac{u-a}{r}+1$	Número de términos
r = $\frac{u-a}{n-1}$	Diferencia o razón aritmética
S = $\left(\frac{a+u}{2}\right)n$	Suma de los términos
S = $\left[\frac{2a+(n-1)r}{2}\right]n$	Suma de términos cuando no se conoce el último término
r = $\frac{\mathrm{u}-\mathrm{a}}{\mathrm{n}+1}$	Razón para interpolación
PROGRESIONES GEOMÉTRICAS	
a = $\frac{u}{r^{n-1}}$	Primer término
u = a. r^{n-1}	Último término
n = $\frac{\log u-\log a}{\log r}$ + 1	Número de términos
r = $\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$	Razón geométrica
S = $\frac{\mathrm{a}_1\,(\mathrm{r}^{\mathrm{n}}\text{ -1})}{\mathrm{r}\text{ -1}}$	Suma de términos

3.4. Problemas propuestos

1. Calcula el término que ocupa el lugar 100 de una progresión aritmética cuyo primer término es igual a 4 y la diferencia es 5.
2. Halla el primer término de una progresión aritmética y la diferencia, sabiendo que a_3 = 24 y a_{10} = 66.
3. El término sexto de una progresión aritmética es 4 y la diferencia 1/2. Halla el término 20.
4. Sabiendo que el quinto término de una progresión aritmética es 18 y la diferencia es 2, halla la suma de los nueve primeros términos de la sucesión.
5. La suma de los once primeros términos de una progresión aritmética es 176 y la diferencia de loa extremos es 30. Halla los términos de la progresión.
6. Por el alquiler de una casa se acuerda pagar 800 u.m. al mes durante el primer año, y cada año se aumentará el alquiler en 100 u.m. mensuales. ¿Cuánto se pagará mensualmente al cabo de 12 años?
7. Calcula el término undécimo de una progresión geométrica cuyo primer término es igual a 1 y la razón es 2.
8. El quinto término de una progresión geométrica es 81 y el primero es 1. Halla los cinco primeros términos de dicha progresión.
9. En una progresión geométrica de primer término 7 y razón 2, un cierto término es 28672. ¿Qué lugar ocupa dicho término?
10. Sabiendo que el séptimo término de una progresión geométrica es 1 y la razón 1/2, halla el primer término.
11. Interpola tres medios geométricos entre los números 8 y 128.
12. En una progresión geométrica se sabe que el término decimoquinto es igual a 512 y que el término décimo es igual a 16. Halla el primer término y la razón.
13. Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica 3,6 12, 24,...
14. ¿Cuántos términos se han tomado en una progresión geométrica, sabiendo que el primer término es 7, el último 448 y su suma 889?
15. La suma de los siete primeros términos de una progresión geométrica de razón 3 es 7651. Halla el primero y el séptimo término.
16. Halla el producto de los ocho primeros términos de la progresión 3, 6, 12, 24,...
17. Interpola tres medios geométricos entre los números 8 y 128

C A P Í T U L O IV

4. REGLA DE TRES

La regla de tres es un instrumento muy sencillo y útil al mismo tiempo. Consiste en una sencilla operación que nos va a permitir encontrar el cuarto término de una proporción, de la que sólo conocemos tres términos. Así, por ejemplo, nos permite saber cuánto cuestan diez kilos de arroz si se conoce el precio de un kilo, Además, la regla de tres nos va a permitir operar al mismo tiempo con elementos tan distintos como horas, kilómetros, número de trabajadores o dinero invertido.

La regla de tres se utiliza para calcular valores desconocidos de magnitudes proporcionales. Las operaciones con las que se resuelve son muy sencillas: la multiplicación y la división. Lo realmente importante es saber plantear la regla de tres.

La "regla de tres" puede ser: ***simple*** cuando se relaciona tres elementos conocidos para obtener un cuarto elemento que se desconoce o ***compuesta*** cuando se relacionan más de cuatro elementos pudiendo ser cinco, siete, nueve, etc.

4.1 Regla de tres simple

La regla de tres simple tiene por objeto, resolver problemas en los que intervienen cuatro cantidades proporcionales, de los cuales se desconoce una**.** Las dos primeras a las que se le llama **supuesto** deben ser de la misma magnitud y a las dos segundas en la que se desconoce una se les llama incógnita deben pertenecer a otra magnitud pero relacionada con la anterior.

En lo que concierne a la regla de tres simple se presentan dos casos: Regla de tres simple directa y regla de tres simple inversa y un caso en el que se pueden combinar los dos, llamado regla de tres compuesta.

4.1.1 Regla de Tres Simple Directa

Es cuando las magnitudes correspondientes a las cantidades son directamente proporcionales.

Es directamente proporcional, si cuando una de ellas aumenta la otra también aumenta (a más tiempo trabajado, más dinero ganado); o cuando una de ellas disminuye la otra también disminuye (a menos bolígrafos comprados menos dinero invertido).

Una de las formas de plantear la regla de tres es mediante el método tradicional. Si de a tenemos b, entonces de c tendremos d:

Ejemplo 4.1.- Si el costo de 20 kg. de pescado es S/.140. ¿Cuál será el costo de 30 kg. del mismo producto?.

Ordenando las cantidades:

20 kg	S/. 140
30 kg	S/. X

En el ejemplo intervienen dos magnitudes proporcionales: el peso y el valor en dinero; de la magnitud peso se conocen dos cantidades: 20 kg. 30 kg; en cambio se conoce solo una de la magnitud valor, el cual lo representamos por X y luego hacemos analizamos las variaciones de las magnitudes, con el propósito de identificar, si es directa o inversa.

Para dar solución al problema, habiéndose identificado que es directa, multiplicamos en cruz a las cantidades ordenadas, despejamos X que representa a la cantidad desconocida y obtenemos su valor.

20 kg	S/. 140
30 kg	S/. X

$$20X = 140 \times 30$$

$$X = \frac{4,200}{20}$$

$$X = 210$$

Ejemplo 4.2: Para obtener 63 litros de vino se necesitan 90 kilos de uva, ¿cuántos litros de vino tendremos con 10 kg de uva?

63 lit 90 kg

X 10 kg

$$90X = 63x10$$

$$X = \frac{630}{90}$$

$$X = 7$$

4.1.2 Regla de Tres Simple Inversa

Es cuando las magnitudes correspondientes a las cantidades son inversamente proporcionales.

Es inversamente proporcional, si cuando una magnitud aumenta la otra disminuye (a más tiempo trabajado, menos tiempo de ocio) y cuando una disminuye la otra aumenta.

Ejemplo 4.3: En un internado 30 estudiantes tienen víveres para 15 días, ¿para cuántos días alcanzaría si fueran 90 estudiantes?.

30 e 15 d

90 e X

Cuando las magnitudes proporcionales se relacionan en forma inversamente proporcional, los elementos se multiplican en forma horizontal y establecemos la igualdad, despejamos la incógnita o elemento desconocido obteniéndose su valor.

$$90X = 30x15$$

$$X = \frac{450}{90}$$

$$X = 5 \text{ días}$$

Ejemplo 4.4: Si 30 obreros terminan una obra civil en 5 horas ¿En cuántas horas terminarán la misma obra 50 obreros?

30 o 5h

50 o X

$$50X = 30 \text{ x } 5$$

$$X = \frac{150}{50}$$

X = 3 horas

4.2 Otros métodos de cálculo

Para la solución de problemas con aplicación de los criterios de la regla de tres simple se presentan otros métodos como los siguientes:

4.2.1 Regla de tres mediante proporciones

Otra forma de resolver una regla de tres es mediante las proporciones. Una proporción es la igualdad entre dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Aplicando las proporciones al cálculo del cuarto término, o incógnita, de una regla de tres se obtendría relacionando: $\frac{a}{b} = \frac{c}{X}$

Como el producto de los extremos (a y x) es igual al producto de los medios (b y c), $a * X = b * c$ de donde obtendríamos el valor de la incógnita o cuarto término.

Ejemplo 4.5: Con los datos del ejemplo (4.1) costo del pescado ilustramos el método de las proporciones de la siguiente manera.

$$\frac{20kg}{30kg} = \frac{140}{X}$$

Aplicando la regla de producto de medios y extremos

$$20X = 30 \times 140$$

$$X = \frac{4{,}200}{20}$$

$$X = 210$$

En el caso de regla de tres simple inversa, con aplicación del método de las proporciones, se establece la proporción, luego se invierte la razón formada por los elementos conocidos y procedemos al igual que en la regla de tres simple directa.

Ejemplo 4.6: Utilizando los datos de ejemplo (4.4) ilustramos la aplicación del método de las proporciones en la solución de problemas referentes a la regla de tres simple inversa.

$$\frac{30}{50} = \frac{5}{X}$$

Invertimos la primera razón

$$\frac{50}{30} = \frac{5}{X}$$

Aplicando producto de medios y extremos obtenemos:

$$50X = 30 \times 5$$

$$X = \frac{150}{50}$$

$$X = 3$$

4.2.2 Regla de tres reduciendo a la unidad

Con este método reflexionamos de la siguiente manera:

Siguiendo con el ejemplo anterior, si por 20 kg de pescado se pago S/.140.00, por un kg. se pagará 140/20 = 7 unidades monetarias. Como queríamos saber cuánto se habría pagado por 30 kg de pescado, tendremos que multiplicar 30 x 7 = 210 u.m. En este ejemplo, hemos calculado el precio de un kg para poder calcular el precio de cualquier número de kg tan sólo multiplicando el precio unitario por el número de kg a comprarse.

4.3 Regla de Tres Compuesta

Cuando en un problema aparecen más de dos tipos de magnitudes distintas, nos enfrentamos a un problema que se puede resolver mediante una regla de tres compuesta, teniendo en cuenta que las magnitudes pueden ser directa o inversamente proporcionales con respecto a la magnitud de la incógnita.

Dicho de otra manera, regla de tres compuesta, es cuando en un problema intervienen un conjunto de factores ordenados en forma de proporciones, cuyas magnitudes pueden ser directas o inversamente proporcionales a la magnitud correspondiente a la incógnita.

Ejemplo 4.7: 15 obreros trabajando 8 horas diarias, terminan una obra en 20 días. ¿Cuántos obreros trabajando 10 horas diarias, terminarán la misma obra en 12 días?.
Para dar solución al problema se ordenan los datos en forma de razones y a las directamente proporcionales con respecto a la incógnita se les identifica con el signo (+) y a las inversamente proporcionales se les identifica con el signo (-).

Luego se multiplica a la incógnita por los valores con signo positivo y la cantidad relacionada con la incógnita se multiplica con los valores identificados con signo negativo; de manera que despejando la incógnita obtenemos su valor.

	—	—
15 ob.	8 h	20 d
X	10 h	12 d
	+	+

X x 10 x 12 = 15 x 8 x 20

$$X = \frac{15x8x20}{10x12}$$

X = 20 obreros

Ejemplo 4.8: Para confeccionar 14 cortinas de 3 metros de largo y 2.5 metros de altura, se han necesitado 5 piezas de tela ¿Cuantas piezas de la misma tela se necesitarán para confeccionar 8 cortinas de 3.5 metros de largo y 3 metros de altura?

+	**+**	**+**	
14 c.	3 L	2.5 a	5 p
8 c	3.5L	3 a	X
—	—	—	

X x 14 x 3 x 25 = 5 x 8 x 3.5 x 3

$$X = \frac{5x8x35x3}{14x3x25}$$

X = 4

Ejemplo 4.9:- Un criador de caballos ha necesitado 200 pacas de heno para alimentar a 80 caballos durante 25 días. ¿Para cuántos días le queda heno, si vende 15 caballos y le quedan 390 pacas en el almacén?

+	—	
200 p.	80 c	2.5 d
390 p	65 c	X
—	+	

$$X \times 200 \times 65 = 25 \times 390 \times 80$$

$$X = \frac{25x390x80}{200x65}$$

$$X = 60$$

4.4. Problemas propuestos

1. Un padre le reparte a sus tres hijas de forma que a cada una le corresponde una cantidad proporcional a su edad. A la mayor, que tiene 20 años, le da S/.500. ¿Cuánto dará a las otras dos hijas de 15 y 8 años de edad?
2. Luisa pagó S/.85,67 por 41 Kg de manzanas, ¿cuánto pagaría si comprara 16 kilos?
3. Un chocolatero quiere repartir bombones en 15 cajas de 8 unidades cada una. ¿Cuántas cajas necesita si quiere colocarlos en cajas de 6 bombones cada una?
4. Una persona que trabajó 13 horas cobró S/.59.00, ¿cuánto cobrará cuando trabaje 76 horas?
5. Un empleado que trabaja 6 horas diarias recibe como salario S/.880 por mes. El dueño de la fábrica le ha comunicado que la empresa aumentará su horario de trabajo en 2 horas diarias. ¿Cuál será a partir de ahora su sueldo?

6. Entre 6 compañeros realizan un trabajo en 12 horas. ¿Cuánto tardarían si lo hicieran con tres compañeros más?
7. Un camión que carga 3 toneladas necesita 15 viajes para transportar cierta cantidad de arena. ¿Cuántos viajes necesitará para transportar la misma arena un camión que carga 5 toneladas?
8. En un campamento de 25 niños hay provisiones para 30 días. ¿Para cuántos días habrá comida si se incorporan 5 niños a la acampada?
9. Un taller de ebanistería, si trabaja 8 horas diarias, puede atender un pedido en 6 días. ¿Cuántas horas diarias deberá trabajar para servir el pedido en 4 días?
10. Por enviar un paquete de 5 kg de peso a una población que está a 60 km de distancia una empresa de transporte me ha cobrado S/.9.00. ¿Cuánto me costará enviar un paquete de 15 kg a 200 km de distancia?
11. Una pieza de tela de 2,5 m de larga y 80 cm de ancha cuesta S/.45.00. ¿Cuánto costará otra pieza de tela de la misma calidad de 3 m de largo y 1,20 m de ancho?
12. Cincuenta garrafas de aceite, de 5 litros cada una, cuestan S/.600.00. ¿Cuánto costarán 35 garrafas de ese aceite, de 3 litros cada una?
13. Un criador de caballos ha necesitado 200 pacas de heno para alimentar a 80 caballos durante 25 días. ¿Para cuántos días le queda heno, si vende 15 caballos y le quedan 390 pacas en el almacén?
14. Cincuenta terneros consumen 4 200 kg de alfalfa a la semana. ¿Cuántos kilos de alfalfa se necesitarán para alimentar a 20 terneros durante 15 días?
15. Doce obreros, trabajado 8 horas diarias, construyen un cerco de 250 m. de largo por 4 m. de alto en 25 días. ¿Cuánto tardarán en construir otro de 220m de largo por 5 m. de alto 5 obreros trabajando 10 horas diarias?

C A P Í T U L O V

5. REPARTIMIENTO PROPORCIONAL Y REGLA DE COMPAÑIA

5.1 Repartimiento Proporcional

El reparto proporcional es una operación que consiste en dividir un número en partes proporcionales a otros números dados, y se presentan en las modalidades de repartimiento proporcional directo, repartimiento proporcional inverso y repartimiento proporcional compuesto.

5.1.1 Repartimiento Proporcional Directo

En el reparto proporcional directo, las partes que se buscan son directamente proporcionales a los números dados.
Si los números dados son fraccionarios, se reducen éstos al mismo denominador, y después se hace el reparto proporcionalmente a los numeradores. Así, si los números a los que se va a repartir una cantidad cualquiera fueran: 1/2, 2/3 y 3/4, se reducirían éstos al mismo denominador, o sea el 12 (pues es el mínimo común múltiplo); de manera que dichas fracciones quedan convertidas en, 6/12, 8/12 y 9/12, luego el reparto se efectuará a los numeradores 6, 8 y 9 que les son proporcionales.

Ejemplo 5.1.- Un padre de familia desea repartir S/.100.00 entre sus tres hijos, en forma proporcional a sus edades, que son de 8, 12 y 20 años respectivamente. ¿Cuánto de dinero le corresponderá a cada uno?

Es lógico suponer que la cantidad que le corresponde a cada hijo serán diferentes porque las edades también son diferentes; y, como el reparto es directamente proporcional, es lógico suponer que al de mayor edad le corresponde una mayor proporción del dinero y así sucesivamente de acuerdo a las edades. Para esto presentamos un método sencillo y práctico que nos permite solucionar el problema con rapidez.

En la solución se multiplica la cantidad a repartir por cada una de las edades y se divide por la suma total de dichas edades.

$$100 \left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{8x100}{40} & = & 20 \\ \dfrac{12x100}{40} & = & 30 \\ \dfrac{20x100}{40} & = & \underline{50} \end{array} \right.$$

$$100$$

Para el segundo caso proponemos el siguiente problema:

Ejemplo 5.2.- Repartir proporcionalmente 500 unidades monetarias a las cantidades 1/2, 2/3 y 3/4 respectivamente.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad = \quad \frac{6}{12} \quad \frac{8}{12} \quad \frac{9}{12}$$

Luego efectuamos el reparto a los numeradores respectivos

$$500 \left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{6x500}{23} & = & 130.44 \\ \dfrac{8x500}{23} & = & 173.91 \\ \dfrac{9x500}{23} & = & \underline{195.65} \end{array} \right.$$

$$500.00$$

5.1.2 Repartimiento Proporcional Inverso

En este reparto, las partes que se buscan son proporcionales a los recíprocos o inversos de los números dados.

Se procede en forma similar al caso del repartimiento proporcional a cantidades fraccionarias:

a. Se toma los inversos de las cantidades a las que se va a repartir.

b. Se da común denominador a las fracciones resultantes
c. Se efectúa el repartimiento directo a los numeradores obtenidos.

Ejemplo 5.3: Un padre de familia desea repartir S/.100.00 entre sus tres hijos, en forma inversamente proporcional a sus edades, que son de 8, 12 y 20 años respectivamente. ¿Cuánto de dinero le corresponderá a cada uno?

Tomamos los inversos y le damos un común divisor

$$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{20} \quad = \quad \frac{15}{120} \quad \frac{10}{120} \quad \frac{6}{120}$$

Luego se reparte directamente proporcional a los numeradores obtenidos.

$$100 \begin{cases} \dfrac{15x100}{31} = 48.39 \\ \dfrac{10x100}{31} = 32.26 \\ \dfrac{6x100}{31} = \underline{19.35} \\ \qquad\qquad\quad 100.00 \end{cases}$$

5.2 Repartimiento Proporcional Compuesto

En el repartimiento compuesto se procede de la siguiente manera:

a) Se multiplican las cantidades relacionadas entre sí.
b) Se efectúa el repartimiento directo o inverso según el caso a los productos obtenidos.

Ejemplo 5.4: Un obrero trabaja 8 horas diarias durante 15 días y otro 10 horas diarias durante 10 días, y ganan el mismo jornal por hora. ¿Cuánto le corresponde a cada uno, si en total el salario es de S/. 880.00

Días	**Horas**	**Total horas**
15	8	120
10	10	100

A continuación repartimos directamente proporcional a los productos obtenidos.

$$880\begin{cases}\dfrac{120x880}{220} = 480 \\ \dfrac{100x880}{220} = \underline{400} \\ \qquad\qquad 880\end{cases}$$

Ejemplo 5.5: Se han abonado S/.6,800 por la limpieza de un bosque realizada por dos brigadas de trabajadores. La primera brigada está formada por 12 trabajadores y han trabajado 8 días. La segunda brigada está formada por 15 obreros y ha trabajado 10 días ¿Cuánto le corresponde a cada brigada?

Obreros		**Días**		**Total días**
12	x	8	=	96
15	x	10	=	150

$$6,800\begin{cases}\dfrac{96x6,800}{246} = 2,653.66 \\ \dfrac{150x6,800}{246} = \underline{4,146.34} \\ \qquad\qquad 6,800.00\end{cases}$$

5.3 Reparto proporcional mixto

Los casos de variación proporcional estudiados previamente solo comprendían dos variables relacionadas de manera directa o inversa; y además se abordó el reparto proporcional compuesto.

Sin embargo, existen problemas en los que aparecen más de dos variables y donde, con frecuencia, se combinan los tipos de variación.
Un tipo de variación proporcional con más de dos variables es la **variación conjunta.** Se dice que una variable **varía conjuntamente** con dos o más variables, si es directamente proporcional a su producto.

Es aquel en el que la cantidad a repartir se distribuye directamente proporcional a una serie de datos, e inversamente proporcional a otra serie de datos indicadas en el mismo problema.

Es mixto por que el concepto lo indica, la cantidad a repartir se va a distribuir en función directa a una serie de índices o números e inversamente proporcional a otra serie de índices o números que están dados por el mismo problema.

Ejemplo 5.6: Una cantidad de S/.5,800 han de repartirse entre tres trabajadores cuyas edades son 30, 40 y 50 años y sus sueldos mensuales son S/.1200, S/.1400 y S/.1600 respectivamente. El reparto ha de ser directamente proporcional a la edad e inversamente proporcional al sueldo de cada trabajador: quien *menos* años tiene recibirá *menos* dinero y quien menos gana, recibirá una mayor cantidad por concepto de gratificación.

Estamos frente a un caso típico de reparto proporcional mixto.

Ordenamos los datos y tenemos:

Edad	Sueldo
30	1200
40	1400
50	1600

Simplificamos los datos:

Edad	Sueldo
3	12
4	14
5	16

Los dos tipos de datos los multiplicamos cada dato de una serie o tipo por su correspondiente en la otra, teniendo en cuenta que en este segundo tipo los datos son inversamente proporcionales:

$$3 \text{ x } \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$4 \text{ x } \frac{1}{14} = \frac{2}{7}$$

$$5 \text{ x } \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

Calculamos el m.c.m. de los denominadores de: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{7}$ y $\frac{5}{16}$ el cual es 112

Y formamos las nuevas fracciones: $\frac{28}{112}$, $\frac{32}{112}$ y $\frac{35}{112}$

Cuando varias fracciones tienen el mismo denominador se puede prescindir de éste, y nos quedan los numeradores que en este caso son: 28, 32 y 35, cantidades a las cuales se efectúa el reparto proporcional directo.

$$5{,}800 \begin{cases} \dfrac{28x5{,}800}{95} = 1{,}709.48 \\[2ex] \dfrac{32x5{,}800}{95} = 1{,}953.68 \\[2ex] \dfrac{35x5{,}800}{95} = \underline{2{,}136.84} \end{cases}$$

$$5{,}800.00$$

5.4. Regla de Compañía

Cuando el repartimiento proporcional se aplica al reparto de ganancias o pérdidas, entre los propietarios de una empresa, el procedimiento toma el nombre de Regla de Compañía. Dicho reparto está relacionado con el aporte de cada accionista o socio, y con el tiempo durante el cual se encuentra invertido el capital de cada uno.

En la aplicación de la Regla de Compañía, se presentan los casos siguientes:

a. Que cada accionista o socio haya aportado, la misma cantidad y durante el mismo tiempo. En este caso el reparto se efectúa dividiendo las ganancias o pérdidas entre el número de socios o accionistas según el caso.
b. Que los aportes de capital sean en cantidades distintas y durante el mismo tiempo. En este segundo caso, se reparte directamente proporcional a las cantidades aportadas.
c. Que los aportes sean iguales y durante tiempos diferentes. El repartimiento será directamente proporcional a los tiempos.
d. Que los aportes sean diferentes y los tiempos también diferentes. En este último caso se aplica el repartimiento proporcional compuesto.

Ejemplo 5.7: Cuatro personas se asocian para emprender un negocio, aportando S/.20,000, S/.30,000 S/.40,000 y S/.45,000; respectivamente. Si terminado el ejercicio económico tienen una utilidad de S/.38,000. ¿Cuánto le corresponde a cada socio?

$$38{,}000 \left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{20{,}000\text{x}38{,}000}{135{,}000} & = & 5{,}629.63 \\[2ex] \dfrac{30{,}000x38{,}000}{135{,}000} & = & 8{,}444.44 \\[2ex] \dfrac{40{,}000x38{,}000}{135{,}000} & = & 11{,}259.26 \\[2ex] \dfrac{45{,}000x38{,}000}{135{,}000} & = & \underline{12{,}666.67} \\ & & 38{,}000.00 \end{array} \right.$$

Los resultados obtenidos son los que le corresponde a cada socio.

Ejemplo 5.8:- Cuatro personas naturales constituyen una sociedad aportando por concepto de capital S/.50,000 c/u y después de 3 años un socio se retira, otro se retira al término de 5 años y los dos restantes permanecen por tres años más, al término de dicho período acuerdan repartir utilidades acumuladas por S/.125,000. ¿ Cuánto le corresponde a cada socio?
En este caso se reparte directamente proporcional a los tiempos.

$$125{,}000 \begin{cases} \dfrac{3x125{,}000}{24} = 15{,}625.00 \\ \dfrac{5x125{,}000}{24} = 26{,}041.66 \\ \dfrac{8x125{,}000}{24} = 41{,}666.67 \\ \dfrac{8x125{,}000}{24} = \underline{41{,}666.67} \\ \qquad 125{,}000.00 \end{cases}$$

Ejemplo 5.9: Tres personas propietarias de un negocio, cuyos aportes de capital son de S/.10,000, S/.25,000 y S/.40,000, y permanecen en la empresa: el fundador 6 años y los dos restante 5 y 3 años respectivamente; si disponen de una utilidad por repartir de S/.30,000. ¿Qué cantidad le corresponde a cada socio?

Multiplicamos los capitales por los tiempos y a los resultados se efectúa el reparto directamente proporcional.

Capitales	Años	Total
10,000	6	60,000
25,000	5	125,000
40,000	3	120,000

$$30{,}000 \begin{cases} \dfrac{60{,}000x30{,}000}{305{,}000} = 5{,}961.64 \\ \dfrac{125{,}000x30{,}000}{305{,}000} = 12{,}295.08 \\ \dfrac{120{,}000x30{,}000}{305{,}000} = \underline{11{,}803.28} \\ \qquad 30{,}000.00 \end{cases}$$

5.5. Problemas propuestos

1. Con el propósito de proteger a sus hijos, un padre dispone que al morir su fortuna sea repartida a sus tres hijos de modo que al menor le corresponda 6 partes, al mediano 4 y el mayor 2. Si la herencia asciende a S/.6,00,000 ¿Cuánto recibe c/u.?
2. Se ha repartido una cantidad de dinero entre tres personas de modo que las partes que se reciben son proporcionales a los números 4, 5 y 6. Si la parte de la primera persona es de S/.2,000. ¿Qué cantidad se repartió y cuanto recibieron las dos personas restantes?
3. El Gobierno Regional de Áncash ha concedido una subvención de S/.360.000 para el desarrollo de los distritos de Pallasca, Quillo y Huarmey, en forma directamente proporcional al número de habitantes. Si dichos distritos tienen una población de 1,820, 2,120 y 3,240 respectivamente. ¿Cuál será el monto correspondiente a cada pueblo?
4. Un empresa pesquera asigna un fondo de S/.3,000 para repartir a sus 3 secretarias, con la finalidad de incentivarlas; el reparto es en proporción inversa a los días faltados en el año: Karin faltó 5 días, Cinthya faltó 3 días y Nattaly 7 días. ¿Cuánto recibió cada una de ellas?
5. Se reparten 90 días de descanso entre los directores de área de una fábrica, si se reparten inversamente proporcional a las semanas de capacitación que han tomado, ¿cuánto recibe cada director si, el primero tomó 2 semanas de capacitación, el segundo cinco, el tercero seis y el cuarto 8 semanas?
6. Dos inversionistas que habían aportado a un negocio S/.75,000 y S/. 85,000 sufrieron una pérdida de 25,000, después de absorber la pérdida, ¿cuánto le queda a cada uno?
7. Tres socios han obtenido en su negocio un beneficio de S/.12,000. ¿Qué parte corresponde a cada uno, si el primero aportó inicialmente S/.18,000, el segundo S/.15,000 y el tercero S/.10,000?
8. Tres personas se asocian para emprender un negocio, aportando el primero S/.65,000, el segundo S/.70,000 y el tercero S/.80,000. Por razones personales el segundo socio se retira al cumplir 4 años el tercero permanece dos años más y

luego se retira; el primero cumple los 8 años y convoca a los dos socios retirados para distribuir utilidades por un monto de S/.110,000. ¿Cuánto le corresponde a cada socio?

9. Fernando emprende un negocio con S/.50,000, como falta dinero, recibe a María un año después con un aporte de S/.40,000, y en el año subsiguiente recibe a Jorge con un aporte de S/.50,000 y transcurrido cinco años de iniciado el negocio acuerdan repartir utilidades por S/.90,000. ¿Cuánto le corresponde a cada socio?
10. Cuatro personas se asocian para emprender un negocio, aportando por concepto de capital S/80,000 c/u y después de 2 años un socio se retira, el segundo permanece por dos años más y luego se retira y los dos restantes permanecen por cuatro años más, al término de dicho período acuerdan repartir utilidades acumuladas por S/. 105,000. ¿ Cuánto le corresponde a cada socio?

C A P Í T U L O VI

6. REGLA DE MEZCLA

Para entender el significado de la regla de mezcla, hagamos la siguiente reflexión: Una empresa tiene en venta aceite de dos calidades que no tienen salida, un aceite de muy buena calidad y no sale por ser caro y otro barato pero de mala calidad. El gerente de ventas asume que mezclando las dos calidades en proporciones adecuadas puede obtener un aceite a una calidad y a un precio intermedio que facilite su venta.

En la actividad comercial, con frecuencia se mezclan varios productos de la misma naturaleza, pero de calidades y precios diferentes, con el propósito de obtener una sustancia de calidad intermedia, cuyo precio promedio facilite su venta, manteniendo el valor equivalente a todas las sustancias intervinientes en la mezcla.

Con la mezcla se busca que el producto de calidad y precio intermedio sea atractivo al consumidor, facilitando de esta manera la venta de mercancías de poca salida.

Los elementos que intervienen en el proceso de la mezcla son los siguientes:

a. El precio unitario de cada una de las sustancias que intervienen en la mezcla.
b. La cantidad de cada sustancia interviniente en la mezcla.
c. El precio medio a la que ha de venderse la mezcla.

En el proceso de mezclar productos o sustancias encontramos las siguientes clases:

6.1 Mezcla directa

Consiste en determinar el precio medio a la que debe venderse una mezcla, conociendo las cantidades de los productos que intervienen y sus correspondientes precios.
En este caso el procedimiento es el siguiente:

1. Se multiplica el precio unitario de cada producto por la cantidad que de éste se ha utilizado en la mezcla
2. La suma de los productos se divide entre la suma de las cantidades utilizadas. En otras palabras consiste determinar el promedio ponderado de los precios.

Dicho de otra manera, se hallan los productos de los precios por sus correspondientes cantidades y la suma de estos se divide por la suma de las cantidades que intervienen en la mezcla dada.

Ejemplo 6.1. Se mezclan 40 litros de vino de S/ 9.00, con 50 litros de S/. 15.00 y 60 litro de S/.18.00 ¿A cuánto debe venderse el litro mezclado manteniendo su valor equivalente?

Cantidades		**Precios**		**Productos**
40 lit	x	S/. 9.00	=	S/. 360.00
50 lit	x	15.00	=	750.00
60 lit	x	18.00	=	1,080.00
150 lit.				2,190.00

$$\text{Precio medio} = \frac{2{,}190}{150} = 14.60$$

La mezcla se debe vender a S/. 14.60 para mantener su valor equivalente. Es decir para no ganar ni perder.

6.2 Mezcla inversa

Tiene por objeto determinar en qué proporciones se deben mezclar sustancias o productos de calidades y precios diferentes, para obtener una mezcla a un precio deseado.

6.2.1. Casos en la mezcla inversa

En la mezcla inversa se presentan varios casos como los siguientes:

Caso I. Dado el precio medio y los precios de las distintas cantidades, determinar la cantidad de cada una.

Cuando se mezclan dos sustancias, se compara cada precio unitario con el precio medio a través de la resta, cuyos resultados se invierten para cada precio y estas serán las cantidades buscadas.

Ejemplo 6.2.- Para vender dos productos homogéneos de S/. 30.00 y S/.36.00 el kilo a un precio promedio de S/.32.00 el kilo, se desea determinar cuantos kilos de cada uno se debe utilizar en la mezcla.

Pme.	**Precios**	**Diferencias**		**Cantidades**
32.00	36.00	36.00 - 32.00	= 4	2 kg. de 36.00
	30.00	32.00 - 30.00	= 2	4 kg . de 30.00

Comprobación:

Cantidades	**Precios**	**Productos**
2 kg	36.00	72.00
4 kg	30.00	120.00
6 kg.		192.00

$$\text{Precio medio} = \frac{192}{6} = 32$$

Cuando en una mezcla intervienen más de dos sustancias se debe observar lo siguiente:

1. Cuando las sustancias a mezclar son de número impar, se compara por medio de la resta como en el caso anterior.
2. Los resultados se cruzan empezando por los extremos, de manera que el resultado obtenido en el precio mayor con respecto al precio medio corresponde al precio menor y viceversa.
3. La sustancia cuyo precio sea mayor o menor al precio medio y que resulta solo se compara dos veces y si solo son tres simplemente se suma a su homólogo antes de cruzarse.

4. Las sustancias cuyos precios resultan ser pares (ejemplo dos mayores y dos menores con respecto al precio medio), los resultados de la resta se cruzan de dos en dos empezando por los extremos.

Ejemplo 6.3.- Se desea mezclar aceites de S/. 4.00, S/. 5.00 y S/. 5.80 el litro, para vender el litro de aceite mezclado a S/. 4.80, sin ganar ni perder. ¿Cuántos litros de cada precio se necesitará?

Pme.	Precios	Diferencias	Cantidades
	5.80	5.80 - 4.80 = 100	80 lit. de 5.80
	5.00	5.00 - 4.80 = 20	80 lit. de 5.00
4.80		120	
	4.00	4.80 - 4.00 = 80	120 lit. de 4.00

Comprobación

Cantidades		precios		Productos
80 lit	x	S/. 5.80	=	464
80 lit	x	5.00	=	400
120 lit	x	4.00	=	480
280 lit.				1,344

$$\text{Precio medio} = \frac{1{,}344}{280} = 4.80$$

Caso II. Cuando se conoce el precio medio, los precios de las distintas calidades y la cantidad total de la mezcla y se desea calcular las cantidades de cada una**.**

En este caso se procede como en el anterior, pero como la suma de las cantidades obtenidas no coincide con la cantidad requerida aplicamos un reparto proporcional.

Ejemplo 6.4.- Se dispone de arroz S/. 1.70, S/. 2.00, S/. 2.20 y S/.2.40, el kilo y se desea obtener una mezcla de 80 kgs, para venderse a S/ 2.10el kg. sin ganar ni perder. ¿Cuántos kgs de cada precio se necesitarán?

Pme.	**Precios**	**Diferencias**					**Cantidades**	
2.10	2.40	2.40	-	2.10	=	30	40	A
	2.20	2.20	-	2.10	=	10	10	B
	2.00	2..10	-	2.00	=	10	10	C
	1.70	2.10	-	1.70	=	40	30	D
							90	80

Efectuando el reparto proporcional

$$80\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{40x80}{90} & = & 35.55\ \text{kg} \\ \dfrac{10x80}{90} & = & 8.89 \\ \dfrac{10x80}{90} & = & 8.89 \\ \dfrac{30x80}{90} & = & \underline{26.67} \\ & & 80.00 \end{array}\right.$$

Comprobación

Cantidades		**Precios**		**Productos**
35.55 kg	x	S/. 2.40	=	85.32
8.89 kg	x	2.20	=	19.56
8.89 kg	x	2.00	=	17.78
26.67 kg	x	1.70	=	45.34
80.00 kg				168.00

$$\text{Precio promedio} = \frac{168}{80} = 2.10$$

Caso III. En este caso, se conoce el precio promedio, el precio de todas las sustancias que intervienen en la mezcla, la cantidad de una o varias de ellas. Determinar las cantidades de las que faltan.

Para solucionar problemas de este tipo, se procede igual que en los casos anteriores, pero como ya se conoce la cantidad de una o varias sustancias que intervienen en la mezcla, las restante se obtienen por medio de la regla de tres simple.

Ejemplo 6.5.- ¿Con cuántos kilos de manzanas de S/. 1.80, S/. 2.10, S/ 2.80, habrá que mezclarse 50 kilos de S/. 2.50, para vender el kilo de mezcla a S/. 2.40, manteniendo su valor equivalente?

Pme.	**Precios**	**Diferencias**	**Cantidades**	
2.40	2.80	2.80 - 2.40 = 40	60	60 kg
	2.50	2.50 - 2.40 = 10	30	50 kg
	2.10	2..40 - 2.10 = 30	10	16.67 kg
	1.80	2.40 - 1.80 = 60	40	40 kg

30 - - - - - - - - - - - 10

50 - - - - - - - - - - - X

$$X = \frac{500}{30} = 16.67 \text{ kg} \quad \text{de S/. } 2.10$$

Para determinar la cantidad correspondiente al precio de S/. 2.10 establecemos una regla de tres simple de la siguiente manera: Si para 30 kg de S/. 2.50 se han tomado 10 kg de S/. 2.10, para 50 kg de S/.2.50 cuántos kilos de S/. 2.10 se tomarán? El resultado es 16.67 de S/. 2.10

Comprobación:

Cantidades		**Precios**		**Productos**
60 kg	x	S/. 2.80	=	168
50 kg	x	2.50	=	125
16.67 kg	x	2.10	=	35
40 kg	x	1.80	=	72
166.67 kg				400

$$\text{Precio medio} = \frac{400}{166.67} = 2.40$$

Caso IV. Dado el precio promedio, el precio de todas las sustancias que intervienen en la mezcla, la cantidad de una o varias de ellas y la cantidad total requerida, determinar las cantidades de las que faltan.

Para solucionar problemas de este tipo, se procede igual que en el caso III, las cantidades desconocidas se obtienen por medio de la regla de tres simple y luego obtenemos las cantidades exactas de cada sustancia repartiendo proporcionalmente la cantidad requerida entre las cantidades obtenidas.

Ejemplo 6.6. Un comerciante tiene 36 kg de arroz de S/.3.70 y 12 kg de S/.350. ¿Cuántos kilos de arroz de de S/.3.00 y S/.2.60 tendrá que añadir, para obtener una mezcla de 64 kg, para venderlo a S/.3.20 el kilo sin ganar ni perder?.

Pme.	**Precios**	**Diferencias**	**Cantidades**	
	3.70	3.70 - 3.20 = 50	60	36 kg
	3.50	3.50 - 3.20 = 30	20	12 kg
3.20				
	3.00	3..20 - 3.00 = 20	30	18 kg
	2.60	3.20 - 2..60 = 60	50	30 kg
				96 kg

60 - - - - - - - - - - - 50

36 - - - - - - - - - - - X

$$X = \frac{1,800}{60} = 30 \text{ kg} \quad \text{de S/. 2.60}$$

20 - - - - - - - - - - - 30

12 - - - - - - - - - - - X

$$X = \frac{360}{20} = 18 \text{ kg} \quad \text{de S/. 3.00}$$

Para determinar las cantidades correspondientes a los precios de S/. 2.60 y S/.3.00 establecemos una regla de tres simple para cada precio de la siguiente manera: Si para

60 kg de S/.3.70 se han tomado 50 kg de S/. 2.60, para 36 kg de S/3.70, ¿cuántos kilos de S/. 2.60 se tomarán? El resultado es 30 kg de S/.2.60.

Asimismo, para 20 kg de S/.3.50 se han tomado 30 kg de S/.3.00, para 12 kg de S/.3.50, ¿cuántos kilos de S/.3.00 se tomarán? El resultado es 18 kg de S/. 3.00.

La suma de las cantidades obtenidas es de 96 kg y solo se requiere una mezcla de 64 kg, de manera que las cantidades exactas las determinamos mediante el reparto proporcional.

$$64 \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{64x36}{96} & = & 24 \text{ kg} \\[2ex] \dfrac{64x12}{96} & = & 8 \text{ kg} \\[2ex] \dfrac{64x18}{96} & = & 12 \text{ kg} \\[2ex] \dfrac{64x30}{96} & = & \underline{20 \text{ kg}} \\[2ex] & & 64 \text{ kg} \end{array} \right.$$

Comprobación:

Cantidades		**Precios**		**Productos**
24 kg	x	S/. 3.70	=	88.80
8 kg	x	3.50	=	28.00
12 kg	x	3.00	=	36.00
20 kg	x	2.60	=	52.00
64 kg				204.80

$$\text{Precio medio} = \frac{204.80}{64} = 3.20$$

6.3. Problemas propuestos

1. Se mezclan 9 litros de alcohol de 35 grados con 36 litros de alcohol de 40 grados. ¿Cuántos grados tendrá la mezcla?
2. Se mezclan 3 kg de té de S/.38.00 el kg con 7 kg de té de S/.44.00 el kg. ¿cuánto vale el kg de la mezcla?
3. Se mezcla 15 kg. de café de S/.16.00, con 60 kg de S/.14.00, con 80 kg de S/.17.00 y con 100 kg de S/.13.00. ¿A cómo debe venderse el kilo de la mezcla sin ganar ni perder?
4. Un comerciante en vinos mezcla 120 litros de vino de $75 el litro y 130 litros de $80 el litro, ¿cuál es el precio de un litro de esa mezcla?
5. Se mezclan 50, 80 y 100 kilos de trigo, de S/.1.90, S/.2.00 y S/.2.20 el kilo respectivamente. Determinar el precio medio y la cantidad a tomar para obtener una mezcla de 1,400 kilos.
6. ¿Cuántos litros de vino de S/.18.00, S/.15.00 y S/.12.00 y S/.10.00 hay que mezclar, para que el litro de la mezcla se pueda vender a S/.14.00 sin ganar ni perder?
7. ¿Cuántos kg de harina de $14 y $18 el kg deben mezclarse para obtener 480 kg de harina de $15 el kg?
8. ¿Cuántos kilos de frejoles de S/.3.00, S/.2.40, S/.1.60 y S/.1.20 el kilo deberán mezclarse para obtener 650 kilos de mezcla y vender a S/.2.00 el kilo, ganando S/.130.00 en total?
9. ¿Cuántos kilos de manteca de S/.7.50, S/.6.80, S/.6.40 y S/.6.00 el kilo se deben mezclar, para obtener una mezcla de 1,330 kilos y vender el kilo a S/.6.60, sin ganar ni perder?
10. ¿Cuántos litros de aceite de S/.6.40, S/.6.20, S/.5.50, y S/.5.30 el litro habrá que mezclar, para vender el litro de la mezcla a S/.5.80 sin ganar ni perder, en una mezcla total de 900 litros?
11. Se ha mezclado aceite de S/.9.20 el litro, con aceite de S/.7.40 el litro y se ha obtenido 120 litros, cantidad que se venderá por un importe total de S/.960.00. ¿Qué cantidad de cada precio se utilizó en la mezcla?

12. Un vendedor compró 1,500 kilos de naranja a S/.2.30 el kilo y de acuerdo al tamaño lo clasifica y lo vende a S/.2.20, S/.2.40 y S/.3.30 el kilo. ¿Cuántos kilos de cada precio vendió y cuanto ganó si el precio medio es de S/.2.50?
13. Un comerciante ha recibido 250 litros de vino de $48 el litro. Vende primero tres quintos de lo recibido al precio de costo; al sobrante le agrega 65 litros de vino de $36 el litro y llena el barril con vino de $35 el litro. ¿Cuál es el precio del litro de mezcla si obtiene un beneficio del 20% sobre el precio de la mezcla?
14. ¿Con cuántos kilos de uvas de S/. 2.80, S/. 3.40 y S/ 3.80, habrá que mezclarse 60 kilos de S/. 3.00, para vender el kilo de mezcla a S/. 3.10, manteniendo su valor equivalente?
15. Para una mezcla se tomaron 25 kg de grasa de S/.18.00 el kilo, 10 kg de S/.14.00 el kilo y una tercera calidad cuyo precio es S/.13.00 el kilo. ¿Cuántos kilos de la tercera calidad serán necesarios para vender la mezcla a S/.16.00 el kilo sin ganar ni perder?

C A P Í T U L O VII

7. TASAS Y PORCENTAJES

7.1 Tanto por ciento

Es una variable de mucha importancia, debido a que en torno a este, adquieren significado las demás, en las operaciones que tienen mucha frecuencia en el campo financiero, tema que ampliamos la explicación mediante ejemplos.

La tasa, tanto por ciento o tipo de interés, es la cantidad que produce como rédito una inversión por cada cien unidades de dinero colocado y por unidad de tiempo.

Es la cantidad o el número de unidades tomadas de cada 100. Se expresa con el símbolo % precedido de una determinada cantidad. Por ejemplo 5%, 10%, 8%, etc., los mismos que se pueden expresar también en forma fraccionaria : $\frac{5}{100}$, $\frac{10}{100}$ y $\frac{8}{100}$, o decimal tales como 0.05, 0.10 y 0.08 respectivamente.

El cálculo de tanto por ciento se utiliza constantemente en diversas operaciones aritméticas y contables, en consecuencia es de uso frecuente en el ámbito comercial y financiero.

Si la pregunta es ¿qué significado tiene la expresión “5% de 300?.
La expresión 5 % de 300 se interpreta como "cinco centésimas partes de 300" y si se desea conocer el 5 % de 300, se obtiene el cociente de $\frac{5}{100}$ y éste se multiplica por 300, esto es:

$$\frac{5}{100} \text{ X } 300 = \frac{1,500}{100} = 15, \quad \text{y es equivalente a } 0.05 \text{ x } 300 = 15$$

El 5 % de 300 es 15. En este ejemplo se puede apreciar cuáles son los elementos que intervienen en este cálculo; éstos son:

5% = Tanto por ciento o tasa

300 = Cantidad base

15 = Porcentaje

7.2 Porcentaje

Los porcentajes constituyen uno de los lenguajes matemáticos de uso más extendido en la vida real. Es muy frecuente que los utilicemos para indicar qué representa una cantidad respecto a otra pues es un método homogéneo que permite representar fácilmente una parte del todo.

En el ejemplo anterior se establece que, el porcentaje es el resultado de calcular el tanto por ciento de una cantidad cualquiera. Para el efecto, a los elementos que intervienen lo representamos por símbolos y tenemos:

P = Porcentaje

i = Tanto por ciento de la unidad o tanto por uno

C = Cantidad base

Luego: $P = C.i.$

Ejemplo 7.1.- Si se quiere calcular el 15% de 900, el 12% de 500 se procede de la siguiente manera:

a. $P = 900 \times 0.15 = 135$

b. $P = 500 \times 0.12 = 60$

De manera que los porcentajes son 135 y 60 respectivamente.

Ejemplo 7.2. Si un banco ofrece el 32 % de interés anual por el dinero que se ahorra en él, ¿cuánto debe recibir de interés una persona que ahorró S/.3 500.00 en ese banco?

Del enunciado se observa que el tanto por ciento es 32, la base S/. 3 500.00 y, lo que se requiere hallar es el porcentaje.

Haciendo uso de la fórmula, solucionamos el problema de la siguiente manera:

$$P = 3,500 \times 0.32$$
$$P = 1,120$$

El resultado es el porcentaje que se gana en el periodo, de acuerdo a las condiciones del banco.

Ejemplo 7.3. En el reparto anual de utilidades de cierta fábrica, un obrero recibe el 4 % de las utilidades. Si por este concepto recibió S/.3 700.00, ¿cuál fue el total de las utilidades de la empresa?

Del enunciado se observa que el tanto por ciento es 4 y el porcentaje es S/3 700.00; como se pide el total, que es la base, solucionamos el problema aplicando la fórmula siguiente:

$$C = \frac{P}{i}$$

Remplazando datos

$$C = \frac{3,700}{0.04}$$

$$C = 92,500.00$$

El total de las utilidades de la fábrica fue de S/. 92 500.00.

Ejemplo 7.4 Para elaborar 120 kg de cierta tela que contiene algodón y fibra sintética se emplean 35 kg de algodón, ¿qué tanto por ciento de algodón contendrá esta tela?

En este ejemplo se observa que 120 kg, es la base y 35 kg el porcentaje, el elemento desconocido es la tasa, lo cual se obtiene con la fórmula:

$$i = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{C}}$$

En la cual remplazamos los datos conocidos

$$i = \frac{35}{120}$$

$$i = 0.29.17$$

$$i = 29.17\%$$

El tanto por ciento de algodón que contiene la tela es de 29.17.

7.3 Variaciones porcentuales

Uno de los usos más frecuentes de los porcentajes es la cuantificación de la variación sufrida por una cantidad.

La comprensión y manipulación de situaciones de variación porcentual de una cantidad, resulta muy natural y eficaz mediante los **índices de variación** que multiplican a las cantidades sujetas a aumentos o disminuciones.

a. Aumentos porcentuales

En el caso de que la variación porcentual sea de aumento se tiene que **el índice de variación**, es igual a uno más el aumento porcentual expresado en forma decimal. Si llamamos **i** a dicho aumento porcentual se tiene:

$$CF = CI + CI \times i = CI\ (1 + i)$$

$$CF = CI\ (1 + i)$$

En la ecuación circunstancialmente lo llamamos Cantidad final a (**CF**), cantidad inicial a (**CI**) e índice de variación a la expresión (**1+i**). .

Ejemplo 7.5. Un producto que costaba S/.900 para su venta se le aumenta un 20%. ¿Cuál es su precio de venta?

Aplicando la lógica expuesta solucionamos el problema de la siguiente manera:

$$Pv = Pc\ (1 + i)$$

$$Pv = 900\ (1.20)$$

$$Pv = 1,080.00$$

El precio de venta es de S/.1,080.00

b. Disminuciones porcentuales

En el caso de que la variación porcentual sea de disminución se tiene que el **índice de variación**, es igual a uno menos la disminución porcentual en forma decimal. Si llamamos **i** a dicha disminución porcentual, el índice de variación será **(1- i).**

Ejemplo 7.6. Un producto tiene un precio de lista de S/.1,200 y para su venta se le descuenta el 20%. ¿Cuál es su precio de venta?

En este caso se tiene:

Pv = PL (1 - i)

Pv = 1,200 (1 - 0.20)

Pv = 1,200 (0.80)

Pv = 960

El precio de venta es de S/.960.00

7.4 Porcentajes Sucesivos

Los porcentajes sucesivos surgen cuando aplicamos varios aumentos o disminuciones porcentuales sucesivamente, obteniéndose un porcentaje equivalente, producto de varios aumentos o disminuciones sucesivos sobre una cantidad base.

Se conocen como tales a los porcentajes obtenidos sucesivamente, pudiendo ser de aumento o disminución, que se suman o se restan según sea el caso a una cantidad base.

Para aplicar porcentajes sucesivos, los calculamos de uno en uno, hallando los subtotales en cada paso y calculando el siguiente porcentaje sobre el subtotal, no sobre la cantidad original.

Ejemplo 7.7: A un producto cuyo costo es de S/.100.00 se le suma el 20 % por distintos conceptos y se le resta un 15 % por rebajas. ¿Cuánto cuesta ahora?

100 x 0.20 = 20 100 + 20 = 120

120 x 0.15 = 18 120 - 18 = 102

Ahora cuesta S/.102.00

Ejemplo 7.8.- Si el precio de costo de una máquina de soldar es de S/. 2,100.00 y para determinar el precio de venta, se le debe aumentar por distintos conceptos y sucesivamente, el 5%, el 10% y el 12%, lo obtenemos de la siguiente manera:

a. 0.05 x 2,100 = 105 2,100 + 105 = 2,205

b. 0.10 x 2,205 = 220.50 2,205 + 220.50 = 2,425.50

c. 0.12 x 2,425.5 = 291.06 2,425.5 + 291.06 = 2,716.56

El precio de venta es de S/. 2,716.56

7.5 Tasa Equivalente

La solución de problemas como el anterior también lo obtenemos con el uso de la tasa equivalente.

Tomamos como base 100:

a.	100	x	0.05	=	5	100	+	5	=	105
b.	105	x	0.10	=	10.50	105	+	10.50	=	115.50
c.	115.5	x	0.12	=	13.86	115.50	+	13.86	=	129.36
						Restando la base				100.00
						Tasa equivalente				29.36 %

Calculado la tasa equivalente, lo aplicamos al precio de costo del problema anterior y obtenemos el mismo resultado.

0.2936 x 2,100 = 616.56 2,100 + 616.56 = 2,716.56

Para el cálculo de la tasa equivalente tenemos además otros procedimientos, entre estos a través de la fórmula:

$$Te = T1 + T2 + \frac{T_1 x T_2}{100}$$

Mediante la cual se va calculando de dos en dos, de manera que si se tiene más de dos tasas sucesivas, primero se toma los dos primeros y el resultado de estos se procesa con el tercero y así sucesivamente.

Los datos del ejercicio anterior nos permiten demostrar lo manifestado:

$$Te = 5 + 10 + \frac{5x10}{100}$$

$$Te = 15 + 0.5$$

$$Te = 15.5 + 12 + \frac{15.5x12}{100}$$

$$Te = 27.5 + 1.86$$

$$Te = 29.36\ \% \qquad \text{Demostrado.}$$

Si en vez de aumentos fueran disminuciones sucesivas el signo de las tasas serán negativas y la ecuación estará dada de la siguiente manera:

$$Te = -T1. - T2 + \frac{(-T_1)(-T_2)}{100}$$

En la realidad se presentan casos en los que ha que combinar aumentos y disminuciones

Ejemplo 7.9. Un producto que se vendía a S/.1,500 bajó un 15% y luego subió un 10%. Determinar el precio actual con el uso de la tasa equivalente.

Aplicando la fórmula:

$$Te = -15. + 10 + \frac{(-15)(10)}{100}$$

Te = - 5 - 1.5

Te = - 6.5 %

Pv = 1,500 (1 – 0.065)

Pv = 1,500 x 0.0935

Pv = 1,402.50

Otra forma de obtener la tasa equivalente, es multiplicando los índices de variación y al producto lo restamos uno.

Con los datos del ejercicio anterior:

Te = (1 – 0.15)(1 + 0.10) - 1

Te = 0.935 - 1

Te = - 0.065 x 100

Te = - 6.5 %

7.6 Porcentaje sobre el precio de costo y sobre el precio de venta

En la actividad de comprar y vender es muy frecuente que las tasas se apliquen sobre el precio de costo o sobre el precio de venta. Es decir que la base de cálculo del aumento o descuento, en algunos casos es el precio de costo y en otros el precio de venta.

Para una mejor comprensión planteamos la siguiente pregunta. ¿Qué sucede si al precio de costo le aumentamos por concepto de ganancia el 40% y luego le hacemos un descuento del 40% sobre el precio de venta? En esta operación se gana o se pierde y ¿Cuánto?

Si consideramos que el precio de costo es 100, el precio de venta será 140. Ahora, si sobre el precio de venta se hace un descuento del 40%, se tendrá que vender a 84, perdiendo 16 unidades monetarias sobre el precio de costo.

Luego en la operación se obtuvo una pérdida de 16 unidades monetarias sobre el precio de costo.

7.6.1. Porcentaje sobre el precio de costo

Cuando el porcentaje se determina en base al precio de costo, podemos obtener el precio de venta, el precio de costo y la tasa, de la siguiente manera:

a. Precio de venta

El precio de venta es equivalente al precio de costo más un porcentaje por concepto de ganancia y este porcentaje se obtiene multiplicando el precio de costo por la tasa de ganancia (Pc.i), entonces:

$$Pv = Pc + Pc.\,i$$
$$Pv = Pc\,(1 + i)$$

Resulta que el precio de venta es el producto del precio de costo por el índice de variación formado por la tasa de ganancia.

Ejemplo 7.10: El precio de costo de un juego de muebles de sala es de S/2,000 y para su venta se le aumenta el 28% por concepto de ganancia. Determinar el precio de venta.

$$Pv = 2{,}000\,(1 + 0.28)$$
$$Pv = 2{,}000\,(1.28)$$
$$Pv = 2{,}560.00$$

b. Precio de costo

El precio de costo lo obtenemos a partir del precio de venta y resulta de dividir el precio de venta por el índice de variación.

$$Pc = \frac{Pv}{1+i}$$

Ejemplo 7.11: Un corte de tela se vende por S/.800 ganando el 40%. De precio de costo ¿Cuál es el precio de costo?

$$Pc = \frac{800}{1.40}$$

$$Pc = 571.43$$

c. Tasa de aumento

Continuando con el mismo razonamiento, la tasa de aumento por cualquier concepto lo obtenemos de la ecuación inicial del precio de venta:

$$Pv = Pc + Pc.i$$

$$Pc.i = Pv – Pc$$

$$i = \frac{Pv}{Pc} - 1$$

Ejemplo 7.12.: Un par de zapatos cuyo precio de costo es de S/.120 se vende por S/.170. ¿Cuál es la tasa de ganancia?

$$i = \frac{168}{120} - 1$$

$$i = 0.40$$

7.6.2. Porcentaje sobre el precio de venta

Cuando el porcentaje se determina en base al precio de venta y siguiendo el mismo razonamiento anterior, también determinamos el precio de venta, el precio de costo y la tasa de aumento:

a. Precio de venta

En este caso el precio de venta es equivalente al precio de costo más un porcentaje producto del precio de venta por la tasa de aumento (Pv.i) de manera que:

$$Pv = Pc + Pv.\ i$$

$$Pv - Pv.i = Pc$$

$$Pv\,(1 - i) = Pc$$

$$Pv = \frac{Pc}{1-i}$$

Resulta que el precio de venta es el igual al precio de costo dividido por el índice de variación.

Ejemplo 7.13: El precio de costo de un artefacto eléctrico es S/.1,800.00, ¿a cuánto se debe vender para ganar el 25% del precio de venta?

$$Pv = \frac{1{,}800}{1-0.25}$$

$$Pv = \frac{1{,}800}{0.75}$$

Pv. = S/.2,400.00

b. Precio de costo

El precio de costo lo obtenemos a partir del precio de venta y resulta de multiplicar el precio de venta, por el índice de variación negativo o de descuento.

$$Pc = Pv\,(1 - i)$$

Ejemplo 7.14: Un corte de tela se vende por S/.800 ganando el 28.57% del precio de venta. ¿Cuál es el precio de costo?

$$Pc = 800\,(1 - 0.2857)$$

$$Pc = 571.42$$

c. Tasa de aumento

En el comercio se usa normalmente el porcentaje de ganancia referido al precio de costo. Hablamos de un 50% de ganancia y entendemos que sobre el precio de costo se aplicó un 50% como recargo.

Pero existe otro concepto de porcentaje de ganancia, que es el que se refiere al precio de venta, ¿qué % del precio de venta corresponde a la ganancia?

En un sentido práctico, responder a la pregunta: ¿Cual es el máximo porcentaje que se puede rebajar a un determinado precio de venta sin afectar el costo?. Lógicamente que la respuesta indicará un porcentaje diferente al que se le recargó al precio de costo por concepto de ganancia.

Aunque el valor absoluto del beneficio sea siempre el mismo, sin embargo el porcentaje de ganancia sobre el costo no coincide con el % de ganancia sobre el precio de venta.

La razón es simple, el precio de costo es una cantidad menor que el precio de venta, y el porcentaje sobre el costo será mayor que el porcentaje sobre la venta.

Este tipo de problemas lo resolvemos aplicando el razonamiento expuesto que nos permite deducir una fórmula de la manera siguiente:

$$Pv = Pc + Pv\,i$$

$$Pv - Pv\,i = Pc$$

$$Pv(1 - i) = Pc$$

$$1 - i = \frac{Pc}{Pv}$$

$$i = 1 - \frac{Pc}{Pv}$$

Veamos la funcionalidad de la fórmula mediante ejemplos:

Ejemplo 7.15: A un artículo que cuesta 600 se le recarga con el 25% y esto asciende a 150 por concepto de ganancia. De manera que el precio de venta asciende a 750. ¿Qué % sobre el precio de venta significa la ganancia?

Lógicamente que será menor al 25%, de ganancia sobre el costo, puesto que se aplica a una cantidad mayor y esto lo demostramos aplicando la fórmula:

$$i = 1 - \frac{600}{750}$$

$$i = 0.20$$

$$i = 20\%$$

Suponiendo que un artículo que costó 600, cuyo precio de venta se fijó en 750 y lo queremos vender a un amigo o familiar sin obtener ganancia, no se podría aplicar un descuento del 25% sobre el precio de venta, porque la operación significaría una pérdida, dado a que el descuento sería:

$$750x0.25 = 187.50$$

Cantidad mayor al porcentaje de ganancia ya que éste asciende a solo 150, en consecuencia, la pérdida sería de 30.50.

En este caso, el % de descuento que se le aplicaría al precio de venta para no ganar ni perder sería del 20%, ya que el porcentaje obtenido con dicha tasa es de 150 equivalente al recargo por ganancia.

Ejemplo 7.16: ¿Qué % se gana del sobre el precio de venta si al precio de costo se le recarga el 28%?

Asumiendo que el precio de costo es 100 y el precio de venta 128 tenemos:

$$i = 1 - \frac{100}{128}$$

$$i = 0.2187 \approx 21.87\%$$

7.7 Listado de fórmulas

FÓRMULA	OBTIENE
P = C.i.	Porcentaje
C = $\frac{P}{i}$	Cantidad base para el cálculo del P
i = $\frac{P}{C}$	% o tasa papa el cálculo del P
Te = $T_1 + T_2 + \frac{T_1 x T_2}{100}$	Tasa equivalente de aumentos sucesivos
Te = $- T_1 - T_2 + \frac{(-T_1)(-T_2)}{100}$	Tasa equivalente de disminuciones sucesivas
Te = $T_1 - T_2 + \frac{T_1(-T_2)}{100}$	Tasa equivalente de aumentos y disminuciones sucesivos
PORCENTAJES SOBRE EL PRECIO DE COSTO	
Pv = Pc (1 + i)	Precio de venta
Pc = $\frac{Pv}{1+i}$	Precio de costo
i = $\frac{Pv}{Pc}$ - 1	Tasa de aumento o recargo
PORCENTAJES SOBRE EL PRECIO DE VENTA	
Pv = $\frac{Pc}{1-i}$	Precio de venta
Pc = Pv (1 – i)	Precio de costo
i = 1 - $\frac{Pc}{Pv}$	Tasa de aumento o recargo

7.8. Problemas propuestos

1. Calcular el total de alumnos que estudian en los primeros 5 ciclos de la Escuela de Contabilidad y cuántos estudian por ciclo, teniendo en cuenta que en el primer ciclo estudia el 27.18%, en el segundo el 24.45%, en el tercero el 19.02%, en el cuarto el 16.85% y en el quinto, estudian 46 alumnos.
2. Si una bicicleta vale S/.350 00 y la comercial los promociona, aplicando un descuento del 20% y aprovechando el descuento un cliente compra 8 unidades ¿Cuál fue el valor de la inversión?
3. En una fábrica textil producen 2,500 metros de tela diariamente. El 48 % en casimires, el 25 % del resto de gabardinas, el 20 % de lo que queda de polystel, y el resto de lanilla. Hallar la producción de cada calidad de tela.
4. Determina qué % es:
   a. 85 alumnos de un instituto de 1,100 alumnos.
   b. S/.2.000 de rebaja por una compra de S/.50.500
   c. 357 manzanas podridas de un total de 1.500 manzanas.
   d. 40 horas de trabajo semanal de una jornada de 48 horas
5. Calcular cuál es:
   a. El total de una deuda, sabiendo que el 8% de ella es S/.16.000
   b. El precio de un artículo cuyo 12% es S/.3.600
   c. La edad de un padre si el 24% de su edad equivale a la edad de su hija de 12 años.
   d.. El descuento del sueldo de un empleado si recibió $84.000 que equivale al 85%.
6. Un producto tuvo un aumento total del 61% despuŕs de 2 aumentos sucesivos. Si el primero fue de un 15%, entonces el segundo fue de un:
7. ¿A cuánto se debe vender un producto que costó S/.48,000, al que se le aumenta por distintos conceptos sucesivamente el 2%, 5% y el 8% y para su venta se hacen descuentos sucesivos del 4% y el 2%?
8. Una mercancía cuesta S/. 6,800 y por concepto de ganancias se le aumenta el 25% y luego se le aplica un descuento del 8%, determinar el precio de venta.

9. Un par de zapatos se vende por S/.170 ganando el 40% del precio de costo, calcular la ganancia.
10. Un producto se vende por S/.1,500 incluyendo una ganancia del 25% sobre el precio de costo, ¿qué % se debe rebajar para recuperar el costo?
11. Si una máquina de coser industrial se vende por S/.10,500 precio que incluye un recargo del 40% sobre el precio de costo, ¿qué % del precio de venta se gana?

C A P Í T U L O VIII

8. INTERÉS SIMPLE

8.1 Conceptos Básicos

Interés

El interés es el rédito o excedente generado por una colocación de dinero, a una tasa de interés y un determinado periodo de tiempo y este puede ser simple o compuesto. Se entiende por **rédito** al valor que se conviene pagar por el uso del dinero a través de un préstamo, un depósito o cualquier otra actividad financiera.

Interés Simple

El interés es simple cuando al término de cada periodo el interés obtenido no se agrega al capital inicial (no se capitaliza) para producir nuevos intereses, es decir, el capital permanece invariable y consecuentemente el interés devengado también es constante, que se puede retirar al final de cada periodo o al final del horizonte temporal.

Interés simple es la operación financiera donde interviene un capital, un periodo de tiempo y una determinada tasa en la cual, el interés obtenido en cada intervalo unitario de tiempo es el mismo, dado a que la base de cálculo es el capital inicial que permanece constante, generando un interés también constante durante todo el horizonte temporal de la operación financiera.

Una colocación está bajo el régimen de interés simple cuando los intereses no se capitalizan o se realiza una sola capitalización al final del horizonte temporal cuando se liquida la cuenta.

El interés simple tiene las siguientes características:

a. Los intereses no se capitalizan en cada periodo
b. El horizonte temporal **n** es un factor y no una potencia

c. Monto crece en forma lineal a lo largo del horizonte temporal (en progresión aritmética)

El interés compuesto a diferencia del interés simple, capitaliza los intereses en todos y cada uno de los periodos. Es decir que los intereses que se van generando se van incrementando al capital original en periodos establecidos y a su vez van a generar un nuevo interés adicional para el siguiente periodo, a esta operación se le denomina capitalización de los intereses.

Interés Comercial

Se llama interés comercial o bancario, cuando los cálculos se efectúan considerando el año de 12 meses de 30 días cada uno, haciendo un total de 360 días anuales.

Interés Real o Exacto

El interés real o exacto es cuando se obtiene considerando el año de 365 días o 366 días cuando el año es bisiesto.

Plazo comprendido entre dos fechas

Cuando se requiere determinar un período de tiempo comprendido entre dos fechas, de conformidad con el calendario o de acuerdo al número de días que trae cada mes, se excluye el primer día y se empieza a contar a partir del segundo día de iniciada una operación cualquiera.

Se efectúa un depósito el 26 de abril y se retira el 30 del mismo mes, se contabilizará 4 días (30 – 26 = 4), el período se obtiene restando los días transcurridos del mes hasta efectuar el depósito.

Para depósitos y retiros efectuados en períodos mayores a un mes, se efectúa la misma operación anterior para el primer mes y luego se adicionan los días de los meses siguientes incluido el día del retiro.

Ejemplo 8.1.- Determinar cuántos días han transcurrido entre el 4 de mayo y el 18 de agosto del mismo año, fechas en los que se depositó y retiró un capital de un banco.
Solucionamos el ejercicio de la siguiente manera:

Días del mes de mayo (31 - 4)	=	27
Junio	=	30
Julio	=	31
Agosto	=	18
Total días transcurridos		106

Período bancario o comercial

De acuerdo a lo normado por el BCR, el año comercial o bancario consta de 360 días y el año se subdivide según sea el caso de la siguiente manera:

Unidad	Períodos En un año	En días
Año	1	360
Semestre	2	180
Trimestre	4	90
Bimestre	6	60
Mes	12	30
Quincena	24	15
Semana	52	7
Día	360	1

Horizonte y Sub horizonte Temporal

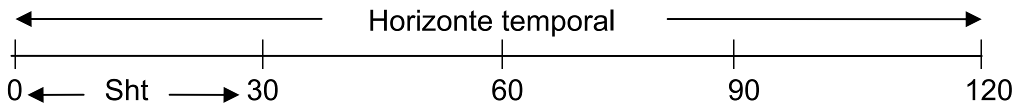
El horizonte temporal de una colocación de dinero, es el intervalo de tiempo que existe entre la apertura y la liquidación de una cuenta.

Ejemplo 8.2.- Se apertura una cuenta de ahorros en un banco el 4 de abril y se cierra el 6 de junio. ¿Cuál es el horizonte temporal?

El horizonte temporal es de 32 días

El sub horizonte temporal, es una fracción del horizonte temporal, de manera que un horizonte temporal puede contener dos o más sub horizontes temporales uniformes o no uniformes.

Ejemplo 8.3.- Una empresa obtiene un préstamo para ser amortizado en un plazo de 120 días, con cuatro cuotas mensuales; en este caso el horizonte temporal contiene cuatro sub horizontes uniformes de 30 días cada uno



8.2 Cálculo del Interés Simple

En el cálculo del interés simple interviene un capital, un tiempo predeterminado de pago y una tasa o razón, para obtener un cierto beneficio llamado interés.

El interés que se paga por el uso de una suma de dinero tomado en préstamo, depende de las condiciones contractuales, y varían en razón directa con la cantidad de dinero, el tiempo de duración del préstamo y la tasa de interés.

Elementos que intervienen en el cálculo del interés simple:

I = Interés expresado en valores monetarios.
P = Valor presente o capital, expresado en unidades monetarias.
S = Monto o valor futuro, expresado en unidades monetarias.
n = Número de períodos o tiempo, años, meses, días, etc.
m = Número de periodos en los que se divide el año, semestres, meses días, etc.
i = Tasa de interés, anual mensual quincenal, diario, etc.

Fórmula básica:

$$I = P \cdot i \cdot n$$

Cuando la tasa es anual y el período unitario menor a un año se tiene:

$$I = \frac{P.i.n}{m}$$

Aplicación de las fórmulas mediante ejemplos:

Ejemplo 8.4: Calcular el interés producido por S/. 2,800 al 20% anual durante 4 años.

I = 2,800 x 0.20 x 4

I = 2,240

Ejemplo 8.5: Un capital de S/. 5,200 se prestó al 22% anual durante 120 días. ¿A cuánto ascienden los intereses?

$$I = \frac{5{,}200x0.22x120}{360}$$

I = 381.33

Fórmulas derivadas

De la fórmula del interés que para el caso lo consideramos como básica deducimos las correspondientes fórmulas para el cálculo del capital, la tasa de interés y el tiempo. Esto se obtiene despejando el elemento que se desea calcular de la fórmula mencionada.

El capital

El capital, llamado también valor presente o valor actual, es la cantidad inicial de dinero que se coloca en una cuenta a una tasa de interés y un determinado periodo de tiempo, con la finalidad de generar un excedente llamado interés.

Fórmula:

Cuando la tasa y los periodos unitarios están dados en la misma unidad de tiempo

$$\mathbf{P} = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{i.n}}$$

Ejemplo 8.6 ¿Cuál será el capital necesario colocar, en una cuenta que paga el 18% anual, para producir un interés de S/.1,800 en un periodo de 2 años.

$$\mathbf{P} = \frac{.1{,}800}{0.18x2}$$

P = 5,000

Cuando la tasa está dada en un periodo de tiempo mayor al periodo unitario.

$$P = \frac{m..I}{i.n}$$

Ejemplo 8.7.- Calcular qué capital será necesario imponer 20% anual durante 8 meses para obtener un interés de S/ 1280.

$$P = \frac{12x1,280}{0.20x8}$$

P = 9,600

La Tasa de interés

Al igual que en el caso anterior la tasa lo despejamos de la fórmula básica:

Fórmula:

Siguiendo el mismo razonamiento anterior las fórmulas según el caso están dadas por:

$$i = \frac{.I}{.nP}$$

Ejemplo 8.8.- ¿A qué tasa de interés mensual estuvo colocado un capital de S/.4,000 para que en 6 meses produjera un interés de S/.480?

$$i = \frac{480}{6x4,000}$$

i = 0.02

Ejemplo 8.9.- ¿A qué tasa de interés anual estuvo colocado un capital de S/. 3,000 para que en 15 meses produjera S/. 750 de interés?

$$i = \frac{mI}{nP}$$

$$i = \frac{12x750}{15x3,000}$$

$$i = \frac{9,000}{45,000}$$

i = 0.20

Número de periodos

Llamado también plazo, horizonte temporal o tiempo.

Fórmula:

$$n = \frac{I}{P.i}$$

Ejemplo 8.10.- Durante que tiempo será necesario colocar la cantidad de S/.5,200 para que al 22% anual produzca S/. 2,800 de interés?

$$n = \frac{2,800}{5,200x0.22}$$

n = 2 años, 5 meses y 11 días.

Cuando la Tasa no es Anual

Cuando la tasa de interés está dada en períodos menores a un año, es susceptible de convertirse en anual, a fin de utilizar las fórmulas adecuadamente y se obtiene multiplicando la tasa por 2, 4, 6, 12, etc. Según esté dado en semestres, trimestres, bimestres, meses o en cualquier otro período de tiempo.

Período	Conversión al 36% anual
Año	0.36 x 1 = 0.36
Semestre	0.18 x 2 = 0.36
Trimestre	0.09 x 4 = 0.36
Bimestre	0.06 x 6 = 0.36
Mes	0.03 x 12 = 0.36
Quincena	0.015 x 24 = 0.36
Día	0.001 x 360 = 0.36

De manera que podemos convertir las siguientes tasas en anuales:

2% mensual = 2 x 12 = 24% anual

5% Trimestral = 5 x 4 = 20% anual

11% Semestral = 11 x 2 = 22% anual

8.3. Casos en el cálculo del Interés Simple

En el cálculo del interés simple se presentan varios casos como los siguientes:

a. Interés con capital y tasa nominal constante

Es el caso clásico analizado líneas arriba. Cuando durante el horizonte temporal el capital y la tasa de interés no ha sufrido variaciones.

Ejemplo 8.11.- Una empresa obtuvo un préstamo por S/. 8,000, por un período de 10 meses a una tasa del 20% anual. ¿Cuál será el interés a pagar al término del período.

$$I = \frac{8{,}000x0.20x10}{12}$$

$$I = 133.33$$

b. Interés con capital constante y tasa nominal variable

Este caso se presenta cuando se efectúan depósitos a plazo fijo, al cual no se pueden efectuar cargos ni abonos durante el horizonte temporal. Pero no así la tasa de interés, que está sujeta a las variaciones del mercado financiero.

Ejemplo 8.12.- ¿Cuál será el interés generado por un capital de S/. 6,000 impuesto a plazo fijo durante un año al 12% anual durante los primeros 6 meses y al 14% anual durante el período restante?

$$I = \frac{6{,}000x0.12x6}{12} + \frac{6{,}000x0.14x6}{12}$$

$$I = 360 + 420$$

$$I = 780$$

c. Interés con capital variable y tasa nominal constante

Cuando analizamos las operaciones de cargos o abonos efectuados en una cuenta de ahorros o cuenta corriente, nos encontramos frente a un caso en el que el principal sufre variaciones.

Ejemplo 8.13.- El 10 de abril se apertura una cuenta de ahorros en un banco con S/.2,000, al 22% de interés anual y luego efectúa las operaciones siguientes dentro del mismo año: El 2 de junio se deposita S/. 800, el 10 de julio se retira S/. 500, el 25 de julio se deposita S/. 1,200, el 10 de agosto se retira S/. 1,000 y el 30 de agosto se liquida la cuenta. Calcular el interés generado durante el horizonte temporal.

De acuerdo a lo dispuesto por el BCR consideramos el mes de 30 días

$$I = \frac{2,000x0.22x53}{360} + \frac{2,800x0.22x38}{360} + \frac{2,300x0.22x15}{360} + \frac{3,500x0.22x16}{360} + \frac{2,500x0.22x20}{360}$$

$$I = 64.78 + 65.02 + 21.08 + 34.22 + 30.56$$

$$I = 215.66$$

d. Interés con capital y tasa nominal variables

Durante el horizonte temporal se presentan casos, en los que además de efectuar operaciones que hagan variar el principal, las condiciones del mercado financiero hacen variar la tasa de interés, lo que debemos tener en cuenta para el cálculo del interés correspondiente.

Ejemplo 8.14.- El 10 de mayo se apertura una cuenta de ahorros con S/. 1,200 a una tasa de interés anual de 24%, efectuándose posteriormente las operaciones siguientes: El 30 de mayo un depósito de S/. 500 al 22%, el 20 de junio un depósito de S/. 800 al 20%, anual el 15 de julio un retiro de S/. 600, fecha en la que la tasa de interés baja al 18% anual y finalmente el 8 de agosto un retiro de S/. 800 variando la tasa al 20% anual. El propietario de la cuenta desea saber cuál será el interés generado al 30 de septiembre del mismo año.

$$I = \frac{1,200x0.24x20}{360} + \frac{1,700x0.22x21}{360} + \frac{2,500x.20x25}{360} + \frac{1,900x0.18x24}{360} + \frac{1,100x0.20x53}{360}$$

$$I = 16.00 + 21.82 + 34.72 + 22.80 + 32.39$$

$$I = 127.73$$

8.4 Listado se fórmulas

FÓRMULA	OBTIENE
I = P . i . n	Interés simple cuando **i** y **n** están dados en la misma unidad de tiempo
$I = \frac{P.i.n}{m}$	Interés simple cuando **i** está dado en una unidad de tiempo mayor al de **n**
$P = \frac{I}{i.n}$	El capital cuando **i** y **n** están dados en la misma unidad de tiempo
$P = \frac{m..I}{i.n}$	El capital cuando **i** está dado en una unidad de tiempo mayor al de **n**
$i = \frac{.I}{.nP}$	La tasa de interés en un periodo de tiempo cualquiera
$i = \frac{mI}{nP}$	La tasa de interés anual
$n = \frac{I}{P.i}$	El numero de periodos de tiempo

8.5. Problemas propuestos

1. Calcular el interés generado por un capital de S/.15,000 colocado a una tasa de interés simple anual del 28 %, en el periodo comprendido entre el 4 de junio y 30 de septiembre del mismo año.
2. Un capital de S/.5000 se coloca en un banco al 3% mensual durante un año y 4 meses. Determinar el valor del interés.
3. Calicular la tasa mensual necesaria para que un capital de S/.800 genere un interés de S/.120 en un periodo de 5 bimestres.
4. Un comerciante obtiene un préstamo a una tasa de interés simple del 5% trimestral, para ser revertido en 18 meses y pagar por concepto de intereses S/.6,300. ¿De cuánto fue el préstamo?
5. Un cierto capital colocado al 2.5% mensual produce un interés de S/.7,000, en un año y 8 meses. ¿Cuál fue el valor de la colocación?
6. Una persona coloca S/.1,500 en un banco que le paga un 4 % bimestral durante un año, luego retira la cuarta parte del monto y lo coloca en otro banco al 5% bimestral durante medio año, con la plata que le sobraba gasta un 40 % en pasajes y un 30 % en indumentaria. ¿cuánta plata le queda para emprender el viaje?
7. Calcular la tasa anual necesaria imponer a un capital de S/.6,820 para producir un interés de S/.1,705 en un periodo de 10 meses.
8. Calcular el tiempo que estuvo depositado un capital de S/.1,500 si se obtuvo un interés equivalente al 30 %, al ser colocado al 6% bimestral.
9. Indicar el tiempo en que estuvo colocado un capital de S/.3000 que al ser depositado a una tasa semestral del 9% obtuvo una ganancia de S/.400.
10. Cuál será el interés generado por un capital de S/.8,000 colocado a plazo fijo durante 18 meses al 12% anual durante los primeros 6 meses y al 14% anual durante los 6 meses siguientes y 15% durante el período restante?
11. El 4 de junio se apertura una cuenta de ahorros en un banco con S/.3,800, al 24% de interés anual y luego efectúa las operaciones siguientes dentro del mismo año: El 2 de julio se retira S/. 920, el 12 de agosto se retira S/. 620, el 20 de Septiembre se deposita S/. 1,600, el 10 de octubre se retira S/. 1,000 y el 30 de

octubre se liquida la cuenta. Calcular el interés generado durante el horizonte temporal.

12. El 4 de julio se apertura una cuenta de ahorros con S/. 2,520 a una tasa de interés anual de 24%, efectuándose posteriormente las operaciones siguientes: El 30 de agosto un depósito de S/. 850 al 22%, el 20 de septiembre un retiro de S/. 900 y la tasa varía al 20%, anual el 15 de octubre un retiro de S/. 720, y la tasa varí al 22% anual y finalmente el 8 de noviembre un depósito de S/.1,800 variando la tasa al 20% anual. El propietario de la cuenta, desea saber cuál será el interés generado al 30 de noviembre del mismo año.

C A P Í T U L O IX

9. MONTO Y VALOR ACTUAL

El planeamiento de los problemas económico – financieros, se desarrolla en torno a dos conceptos básicos: Capitalización y actualización. El concepto de capitalización se refiere a la formación del monto, consistente en sumar al capital, los intereses devengados en un determinado periodo de tiempo y una tasa de interés pre establecida, razón por la cual al monto se le denomina también como valor futuro del dinero.

Actualización es la operación inversa a la capitalización y consiste en deducir los intereses devengados en determinado periodo de tiempo y a una determinada tasa de interés, mediante un factor llamado factor simple de actualización, que nos permite traer al presente un valor fututo o llevar al pasado un valor actual.

En otras palabras, capitalizar es trasladar y valorizar capitales actuales en el futuro; y actualizar es traer y valorizar capitales del futuro en el presente.

9.1 Monto

Es el valor acumulado del capital más los intereses devengados y para su cálculo utilizamos el término (1+in), denominado factor simple de capitalización a interés simple (FSC), que convierte un importe actual en un monto en un periodo futuro al que lo representamos por S, a una tasa de interés **i** en **n** períodos de tiempo. Cabe recordar que en una colocación a interés simple no se producen capitalizaciones de intereses antes del término del horizonte temporal.

Cuando se coloca una determinada cantidad de dinero es justo exigir la recuperación o devolución del capital inicial más sus correspondientes intereses, que compense la pérdida del valor de la moneda, el riesgo que implica toda colocación. Generalmente es preferible utilizar el dinero en el presente y no en el futuro. El incremento es el interés y

es consecuencia de la capacidad que tiene el dinero de "producir más dinero". El interés como todo precio, depende del mercado y de las condiciones de cada negociación, fundamentalmente del plazo y del riesgo.
De acuerdo a la definición, en términos matemáticos el monto es la suma del capital más el interés:

$$S = P + I$$
$$I = P.\,i.\,n$$
$$S = P + P.\,i.\,n$$
$$S = P\,(1 + i.\,n)$$

En el caso en que la tasa de interés esté dada en una de tiempo mayor al de número de periodos en la fórmula interviene **m**

$$S = P\,\left(1 + \frac{i.n}{m}\right)$$

Ejemplo 9.1: Calcular el monto que debe pagarse por una deuda de S/.8,000 después de 150 días de su aceptación, al 18% de interés anual.

$$S = 8{,}000\,\left(1 + \frac{0.18x150}{360}\right)$$
$$S = 8{,}600$$

9.2 Valor Actual

El valor actual o presente de una suma que vence en fecha futura, es el monto actualizado, es decir el monto deducido los intereses devengados durante el horizonte temporal.

El valor actual de una cantidad con vencimiento en el futuro, es el capital que a una tasa de interés **i**, en **n** períodos de tiempo, ascenderá a la suma que incluye al capital y los intereses devengados llamado monto.

Si conocemos el monto y el es hallar el capital, en realidad no es otra cosa que determinar el valor actual del monto.

A partir de la definición, para calcular el valor actual despejamos P de la fórmula del monto.

$$\text{De} \quad S = P(1 + i.n)$$

$$P = S\left[\frac{1}{1+i.n}\right]$$

El término encerrado entre corchetes es el factor simple de actualización a interés simple (FSA) que trae un monto desde el final del horizonte temporal hacia el presente o período cero.

Cuando la tasa está dada en una unidad de tiempo mayor al del periodo unitario, la formula sufre una modificación y se tiene:

$$P = \left[\frac{m}{m+in}\right]$$

Ejemplo 9.2: Con los datos del ejercicio anterior conociendo el monto, la tasa de interés y el tiempo calcular P.

$$P = \left[\frac{360}{360+0.18x150}\right]$$

$$P = 8{,}000$$

Las fórmulas para el cálculo de la tasa de interés y el tiempo en base al monto son los siguientes:

9.3 Tasa de Interés en función al monto

$$S = P(1+in)$$

$$1 + in = \frac{S}{P}$$

$$in = \frac{S}{P} - 1$$

$$i = \frac{S-P}{n.P}$$

Con el uso de ***m*** la fórmula queda modificada en :

$$i = \frac{m(S-P)}{n.P}$$

Ejemplo 9.3: Se obtuvo un préstamo de S/. 8,000 para ser revertido en un período de 180 días la cantidad de S/. 8,960. ¿Cuál será la tasa de interés mensual impuesta durante el período?

$$i = \frac{8{,}960 - 8{,}000}{6x8{,}000}$$

$$i = 0.02$$

$$i = 2\ \%\ \text{mensual}$$

9.4 Número de Períodos en función al monto

$$S = P(1+in)$$

$$1 + in = \frac{S}{P}$$

$$in = \frac{S}{P} - 1$$

$$n = \frac{S-P}{P.i}$$

Ejemplo 9.4: ¿En qué tiempo un capital de 2,600 colocado al 20% anual, se convertirá en el doble?

$$n = \frac{5{,}200 - 2{,}600}{2{,}600x0.20}$$

$$n = \frac{2{,}600}{520}$$

$$n = 5 \text{ años}$$

9.5 Monto con capital constante y tasa variable

Cuando se presentan variaciones en la tasa permaneciendo el capital constante, el monto puede calcularse aplicando la siguiente fórmula:

$$S = P\left[1+\sum i.n\right]$$

Ejemplo 9.5: Un capital de S/.5,200 se coloca en una cuenta por un periodo de 10 meses, a una tasa de interés anual del 15% los primeros tres meses, 18% los tres meses siguientes y 24% por el resto del periodo. ¿Cuál será el monto acumulado?

$$S = 5{,}200\left(1+\frac{0.15x3}{12}+\frac{0.18x3}{12}+\frac{0.24x4}{12}\right)$$

$$S = 5{,}200 \text{ x } 1.1625$$

$$S = 6{,}045$$

9.6 Valor Actual con tasa variable

Cuando se dispone de un monto y la tasa de interés sufre variaciones durante el horizonte temporal de la operación, el valor actual lo determinamos aplicando la siguiente fórmula:

$$P = S\left[\frac{1}{1+\sum \text{in}}\right]$$

Ejemplo 9.6: En una cuenta se dispone de de S/.8,200 producto de una colocación efectuada hace un año y 2 meses y se desea saber de cuanto fue la colocación si durante los primeros 6 meses la tasa de interés simple fue del 2 % mensual, los 6 meses siguientes del 2.5 % mensual y los últimos 2 meses del 3 % mensual.

$$P = \left(\frac{1}{1+0.02x6+0.025x6+0.03x2}\right)$$

$$P = 6{,}200 \text{ x } 0.7519$$

$$P = 6{,}165.58$$

9.7 Suma de Intereses

La suma de intereses viene a ser la acumulación de intereses que producen distintos capitales impuestos a una tasa de interés y a diferentes tiempos de vencimiento.

Para esto usamos los llamados numerales que viene a ser el producto de los capitales por sus correspondientes tiempos de vencimientos.

$$N = C.n \qquad N = \text{Numeral}$$

$$\sum I = \frac{i}{m} \sum N$$

Ejemplo 9.7: Calcular la suma de los intereses generados por los capitales de S/.12,000, S/.10,000, S/.14,000, y S/.8,500, y sus correspondientes períodos de tiempo de 30, 60, 90, y 120 días, a una tasa de interés del 18% anual.

$$\sum I = \frac{0.18}{360} (12{,}000 \times 30 + 10{,}000 \times 60 + 14{,}000 \times 90 + 8{,}500 \times 120)$$

$$\sum I = \frac{0.18}{360} (360{,}000 + 600{,}000 + 1{,}260{,}000 + 1{,}020{,}000)$$

$$\sum I = \frac{0.18}{360} 3{,}240{,}000$$

$$\sum I = 1{,}620.00$$

9.8 Tasa Promedio de Intereses

Consiste en determinar una tasa promedio de intereses, cuando se tiene una serie de deudas o documentos de crédito, con diferentes fechas de vencimiento y a tasas de interés diferentes.

Para este caso despejamos la tasa de interés (i) de la fórmula de la suma de intereses, obteniéndose la fórmula que nos permite calcular dicho indicador.

De $\sum I = \frac{i}{m} \sum \mathbf{N}$ despejamos i y obtenemos la fórmula siguiente:

$$\frac{i}{m} \sum \mathbf{N} = \sum I$$

$$i = \frac{m\sum I}{\sum N}$$

Ejemplo 9.8: Una empresa a girado las letras de cambio siguientes:
Por S/.4,000 al 12% anual con vencimiento al 31 de julio, por S/. 6,000 al 18% anual con vencimiento al 31 de agosto, por S/. 10,000 al 16% anual con vencimiento al 30 de septiembre, por S/. 8,000 al 14% anual con vencimiento al 31 de octubre y por 9,500 al 15% anual con vencimiento al 30 de noviembre. Si la fecha de liquidación es el 31 de diciembre, calcular la tasa promedio de los intereses.

Vencimiento	Capitales	Días	Numerales	Tasas	Intereses
Julio 31	4,000	153	612,000	0.12	204.00
Agosto 31	6,000	122	732,000	0.18	366.00
Septiembre 30	10,000	92	920,000	0.16	408.89
Octubre 31	8,000	61	488,000	0.14	189.78
Noviembre 30	9,500	31	294,500	0.15	122.71
			3,046,500		1,291.38

$$i = \frac{m\sum I}{\sum N}$$

$$i = \frac{360x1,291.38}{3,046,500}$$

i = 0.1526

i = 15.26%

Conocida la tasa promedio podemos calcular el interés global o la suma de los intereses de la siguiente manera:

$$Ig = \frac{3,046,500x0.1526}{360}$$

Ig = 1,291.38

9.9 Listado se fórmulas

FÓRMULA	OBTIENE
S = P (1 + i. n)	Monto cuando **i** y **n** están dados en la misma unidad de tiempo
S = P (1 + $\frac{i.n}{m}$)	Monto cuando **i** está dado en una unidad de tiempo mayor al de **n**
P = S $\left[\frac{1}{1+i.n}\right]$	Valor actual cuando **i** y **n** están dados en la misma unidad de tiempo
P = S $\left[\frac{m}{m+in}\right]$	Valor actual cuando **i** está dado en una unidad de tiempo mayor al de **n**
i = $\frac{S-P}{n.P}$	La tasa de interés en un periodo de tiempo cualquiera en función al monto
i = $\frac{m(S-P)}{n.P}$	La tasa de interés anual en función al monto
n = $\frac{S-P}{P.i}$	El número de periodos de tiempo en función al monto
S = P$\left[1+\sum i.n\right]$	Monto con capital constante y tasa variable
P = S $\left[\frac{1}{1+\sum \mathrm{in}}\right]$	Valor actual con tasa variable
∑I = $\frac{i}{m}$ ∑ N	Suma de intereses
i = $\frac{m\sum I}{\sum N}$	Tasa promedio de intereses

9.10. Problemas propuestos

1. Se depositan S/.4,000 el 1 de marzo y se retiran el 31 de julio. Si la tasa de interés simple es del 4 % bimestral, ¿cuál será el monto al término del periodo?
2. Si tenemos S/.10,000 y los invertimos por un año a la tasa del 28% de interés simple anual, ¿cuánto dinero tendremos al finalizar el año?
3. Un capital se transformó en S/.5600 en 4 cuatrimestres, si se aplicó un1% mensual. ¿Cuál fue el capital inicial?
4. ¿Cuál fue nuestra inversión inicial, si hemos acumulado un monto de S/.3,750, después de 8 meses, a una tasa de interés simple del 48% anual?
5. Un cierto capital se transformó en S/.25,000 en un año y 6 meses, si se aplicó un 2.5 % de interés simple mensual. ¿Cuál fue el capital inicial ?
6. ¿Cuál es la tasa de interés simple anual aplicada, para que un capital de S/.5,400 colocado a un año 2 meses y 20 días se haya convertido en S/.6,600?
7. Calcular la tasa anual necesaria imponer a un capital de S/.6,820 para transformarse en S/.8,525 en un periodo de 10 meses.
8. Calcular el tiempo que estuvo depositado un capital de S/.4,800 si se convirtió en S/.5,600 al ser colocado al 20% de interés simple anual.
9. En el proceso de adquisición de una máquina industrial recibimos de nuestros proveedores las siguientes propuestas:

La empresa **A,** solicita una cuota inicial de S/.10,000 y un pago de S/.10,000 al termino de 6 meses a una tasa de interés simple mensual del 2%.

La empresa **B,** solicita una cuota inicial de S/.8,800 y un pago de S/.11,200 al término de 6 meses, a la misma tas propuesta por la empresa **A**

¿Cuál es la mejor alternativa, evaluando cada una a valor actual?

10. Un capital de S/.12,000 se coloca en una cuenta por un periodo de 15 meses, a una tasa de interés trimestral del 4 % los primeros cinco meses, 4.5% trimestral los cinco meses siguientes y 5 % trimestral los últimos cinco meses. ¿Cuál será el monto acumulado?
11. Se desea acumular en una cuenta S/.10,400 en un periodo de dos años. ¿Cuánto se tendrá que colocar en la cuenta, si la tasa de interés simple es del 4%

trimestral durante los primeros 9 meses y del 5 % trimestral durante el tiempo restante?

12. Las deudas que a la fecha registra una empresa son las siguientes: Por S/.5,000 al 16% anual con vencimiento al 30 de junio, por S/. 6,000 al 18% anual con vencimiento al 20 de agosto, por S/. 8,000 al 15% anual con vencimiento al 10 de septiembre, por S/. 9,000 al 14% anual con vencimiento al 31 de octubre y por 10,500 al 12% anual con vencimiento al 25 de noviembre. Si la fecha de liquidación es el 20 de diciembre, calcular la tasa promedio de los intereses.

C A P Í T U L O X

10. DESCUENTO SIMPLE

Una operación de descuento consiste en obtener el pago anticipado de un título valor o de un documento de crédito como el pagaré, letra de cambio, bono, etc. Deduciendo el interés llamado descuento, por el tiempo que falta para su vencimiento.

En el tema del descuento se presentan dos casos:

a. El descuento simple racional o descuento verdadero y;
b. El descuento simple comercial o bancario.

10.1 Descuento racional, matemático o verdadero

Es la operación financiera que tiene por objeto la deducción de los intereses a un valor futuro para obtener su equivalente en el momento actual, a través de la aplicación de la fórmula del descuento simple. Es un procedimiento inverso al de capitalización. Los procedimientos de descuento tienen un punto de partida que es el valor futuro conocido, cuyo vencimiento quisiéramos adelantar.

El descuento racional tiene el mismo concepto y aplicación de los criterios de cálculo del monto y valor actual de una cantidad monetaria, tratado líneas arriba con la única diferencia, que en este caso lo aplicamos al tratamiento principalmente de documentos de crédito.

El descuento racional, matemático o verdadero, es igual al interés simple, calculado sobre el valor actual del documento, como si este fuese el capital. Como el interés es calculado sobre el valor actual, recibe también el nombre de descuento justo.

10.1.1 Cálculo del descuento racional

De la definición se deduce que el descuento racional simple es la diferencia entre el valor nominal o futuro y el valor actual o efectivo de una deuda especificada en un documento de crédito.

Los elementos que utilizaremos para el caso son los siguientes:

Valor nominal.- Es el valor futuro de una deuda o de un capital, que se somete a descuento o actualización con la finalidad de determinar el valor efectivo o actual y lo representamos por **"Vn"**

Valor efectivo o actual.- Es el valor nominal o futuro deducido los intereses devengados en el plazo de descuento. Es decir el valor nominal menos el descuento y lo representamos por **"Ve".**

Descuento racional. - Es la diferencia establecida entre el valor nominal o futuro y el valor efectivo o actual. Es el interés que se deduce del valor nominal para determinar el valor efectivo. y lo representamos por **"D"**.

Tasa de descuento.- Es la tasa que se aplica al valor actual para determinar el valor del descuento racional. Es la diferencia entre el valor nominal de una unidad monetaria y su valor actual y lo representamos por **"d".**

Plazo o periodo de descuento.- Es el intervalo de tiempo entre el valor actual o efectivo y el valor futuro o nominal de una deuda o documento de crédito. Plazo en el que se genera el descuento y lo representamos por **"n".**

Si por equivalencia hacemos al Vn = S y al Ve = P tendremos que el descuento es equivalente a la diferencia entre el valor nominal y el valor actual o efectivo.

$$D = Vn - Ve$$

Dadas las equivalencias indicadas el valor nominal queda expresado de la siguiente manera::

$$Vn = Ve\,(1+d.n)$$

Del cual deducimos la fórmula del valor efectivo o actual

$$\text{Ve} = \text{Vn}\left[\frac{1}{1+d.n}\right]$$

Remplazando en la definición del descuento tenemos:

$$\text{D} = \text{Vn - Vn}\left[\frac{1}{1+d.n}\right]$$

Factorizando:

$$\text{D} = \text{Vn}\left[1-\frac{1}{1+d.n}\right]$$

Ejemplo 10.1. Calcular el valor del descuento racional, que resulta de aplicar una tasa de descuento simple del 12% anual, a una deuda a pagar de S/220,000, dentro de tres años, a fin de cancelarlo de inmediato..

$$\text{D} = 220{,}000\left[1-\frac{1}{1+0.12x3}\right]$$

$$\text{D} = 58{,}235.29$$

Cuando la tasa de descuento no está dado en la misma unidad de tiempo que el periodo de descuento solucionamos el problema con;

$$\text{D} = \text{Vn}\left[1-\frac{m}{m+d.n}\right]$$

Ejemplo 10.2. Si en el ejemplo anterior el descuento se efectuara faltando solamente 8 meses para su vencimiento, obtendríamos el descuento de la siguiente manera:

$$\text{D} = 220{,}000\left[1-\frac{12}{12+0.12x8}\right]$$

$$\text{D} = 16{,}296.30$$

10.1.2 Valor nominal

Consiste en determinar el valor por el que se tiene que girar un documento de crédito con vencimiento posterior a la fecha de giro, sabiendo que el valor nominal es la cantidad que figura en el documento sometido a descuento comercial o bancario antes de su vencimiento.

Para determinar el valor nominal de un documento de crédito, además de conocerse el periodo de descuento y la respectiva tasa, es necesario conocer el valor efectivo o el descuento.

En el primer caso cuando se conoce el valor efectivo y la tasa de descuento está dada en la misma unidad de tiempo que el periodo de descuento se aplicará la fórmula:

$$Vn = Ve\,(1+d.n)$$

Y cuando la tasa de descuento esta dado en una unidad de tiempo mayor al del periodo unitario la fórmula se modifica en:

$$Vn = Ve\left[1+\frac{d.n}{m}\right]$$

Ejemplo 10.3. Si la tasa de descuento simple anual es del 10%, determinar el valor nominal de un documento de crédito, sometido a descuento racional 90 días antes de su vencimiento, cuyo valor efectivo es S/.4390.25

$$Vn = 4{,}390.25\left[1+\frac{0.10x90}{360}\right]$$

$$Vn = 4{,}500$$

En el segundo caso cuando se tiene como dato el descuento la formula se deduce a partir del descuento.

$$D = Vn\ a\left[1-\frac{1}{1+dn}\right]$$

Efectuando las operaciones correspondientes deducimos la fórmula que nos permite calcular el valor nominal.

$$Vn = \frac{D(1+dn)}{dn}$$

O en su defecto:

$$Vn = \frac{D(m+dn)}{dn}$$

Ejemplo 10.4. El descuento racional al que se somete una factura por pagar 6 meses antes de su vencimiento al 20% anual asciende a S/.2.500. Calcular el valor nominal del documento.

En este caso tenemos como dato el descuento, luego aplicaremos la fórmula:

$$Vn = \frac{\mathrm{D(m+dn)}}{\mathrm{dn}}$$

Remplazando datos:

$$Vn = \frac{2{,}500(12+0.20x6)}{0.20x6}$$

$$Vn = 27{,}500$$

10.1.3 Valor efectivo o actual

Consiste en determinar el valor efectivo o actual de un pago futuro, dada una tasa de descuento y un periodo de tiempo.

La fórmula correspondiente lo obtenemos despejando **Ve** a partir de la fórmula del valor nominal, de la siguiente manera:

$$Vn = Ve\ (1+d.n)$$

$$Ve = Vn\left[\frac{1}{1+\mathrm{dn}}\right]$$

En caso de que la tasa de descuento no esté dado en la misma unidad de tiempo que el periodo de descuento haremos uso de la fórmula:

$$Ve = Vn\left[\frac{m}{m+\text{dn}}\right]$$

Ejemplo 10.5.- Un comerciante tiene una deuda pendiente de S/5,250, cuyo vencimiento es dentro de 8 meses y propone a su acreedor cancelarlo 5 meses antes de su vencimiento. ¿Cuál será el valor a pagar si se descuenta al 12% anual?

En este caso utilizamos la fórmula siguiente:

$$Ve = Vn\left[\frac{\text{m}}{\text{m}+\text{dn}}\right]$$

$$Ve = 5{,}250\left[\frac{12}{12+0.12x5}\right]$$

$$Ve = 5{,}000$$

10.1.4 Tasa de descuento

Para determinar la tasa de descuento racional, despejamos la fórmula a partir del valor nominal y obtenemos:

$$Vn = Ve\ (1+d.n)$$

$$(1+dn) = \frac{\text{Vn}}{\text{Ve}}$$

$$dn = \frac{\text{Vn}}{\text{Ve}} - 1$$

$$dn = \frac{\text{Vn - Ve}}{\text{Ve}}$$

$$d = \frac{\text{Vn - Ve}}{\text{nVe}}$$

Cuando la tasa de descuento esta dado en una unidad de tiempo mayor al periodo unitario de descuento, en la fórmula interviene **m**

$$d = \frac{m(Vn - Ve)}{nVe}$$

Ejemplo 10.6: ¿Qué tasa de descuento racional se aplico a un documento con valor nominal de S/.700 dólares, si se descontó a 60 días antes de su vencimiento y se recibieron S/.666,67 dólares netos?

$$d = \frac{360(700 - 666.67)}{60x666.67}$$

$$d = 0.30$$

$$d = 30\%$$

10.1.5 Periodo de descuento

En forma similar a la tasa de descuento, tomamos como base la fórmula del valor nominal y a partir de esta obtenemos la fórmula requerida para el cálculo del periodo de descuento.

$$Vn = Ve\,(1+d.n)$$

$$(1+dn) = \frac{Vn}{Ve}$$

$$dn = \frac{Vn}{Ve} - 1$$

$$dn = \frac{Vn - Ve}{Ve}$$

$$n = \frac{Vn - Ve}{dVe}$$

Ejemplo 10.7: Un pagaré de S/.10.000 se descuentan al 12% y se reciben del banco S/.9.500. Calcular la fecha de vencimiento del pagaré.

$$n = \frac{10,000 - 9,500}{0.12x9,500}$$

$$n = 0.4386$$

$$n = 5 \text{ meses } 8 \text{ días}$$

10.2 Descuento comercial o bancario

Las operaciones comerciales en su mayoría se realizan al crédito, con el uso de los Pagarés, Letras de Cambio y otros, conocidos con el nombre de documentos de Crédito. En estos documentos el deudor se compromete a pagar en la fecha de vencimiento, el valor que se especifica en el documento.

Sin embargo, el acreedor tiene la posibilidad de hacerlo efectivo antes de su vencimiento, a través de los servicios de las entidades bancarias o financieras mediante una operación llamada descuento bancario, por la cual recibe una cantidad menor al del documento, debido a que la institución financiera le cobra un interés en forma anticipada por el tiempo que falta para su vencimiento y a una tasa llamada tasa de descuento**.**

Los elementos o símbolos son los mismos utilizados en el descuento racional, con alguna variación de concepto, dado a que la base de cálculo del descuento racional es el valor actual y del descuento comercial o bancario es el valor nominal, tal es así que:

Valor nominal.- Es el valor que está inscrito en el documento de crédito y lo vamos a representar por **"Vn".**

Valor líquido.- Es el valor nominal menos el descuento. Es el valor que el propietario del documento recibe en el momento de efectuar el descuento y lo representamos por **"VL".**

Descuento bancario.- Es la diferencia establecida entre el valor nominal y el valor efectivo. Es el interés que cobra el Banco por el servicio de hacer efectivo el documento antes de su vencimiento y lo representamos por **"D"**.

Tasa de descuento.- Es la tasa que al realizar el descuento la entidad financiera aplica al valor nominal del documento sometido a descuento, a la que lo representamos por **"d".**

Plazo o periodo de descuento.- Es el término que se utiliza para indicar el período que falta para el vencimiento del documento, al momento de ser sometido a descuento **"n".**

10.2.1 Valor del descuento comercial o bancario

El tratamiento de este tema es similar al interés, de manera que las fórmulas presentan la misma estructura, con una simbología diferente; la similitud se debe a que el descuento es una forma de interés pagado por anticipado.

$$D = Vn \cdot d \cdot n$$

Cuando la tasa de descuento esta dado en un periodo mayor al periodo unitario de descuento, como por ejemplo: Si la tasa es anual y el período de vencimiento está dado en meses, días o cualquier otro periodo menor a un año se aplicará la fórmula:

$$D = \frac{Vn.d.n}{m}$$

Ejemplo 10.8.- Un pagaré por valor de S/. 8,000, se somete a descuento bancario faltando 8 meses para su vencimiento, al 12%. Calcular el valor del descuento.

$$D = \frac{8{,}000x0.12x8}{12}$$

$$D = 640$$

Ejemplo 10.9.- Una Letra de S/. 5,200 se somete a descuento bancario al 16% anual faltando 120 días para su vencimiento. ¿A cuánto asciende el descuento?

$$D = \frac{5{,}000x0.16x120}{360}$$

$$D = 277.33$$

10.2.2 Valor líquido

En el descuento bancario al valor efectivo se le conoce también como el valor líquido, y es igual al valor nominal menos el descuento, de manera que:

$$VL = Vn - D$$

$$D = Vn \cdot d \cdot n$$

$$Ve = Vn - Vn \cdot d \cdot n$$

$$VL = Vn\,(1 - d \cdot n)$$

En el caso que corresponda se hace uso de **m**:

$$VL = Vn\left(1 - \frac{d.n}{m}\right)$$

Ejemplo 10.10.- Un pagaré cuyo valor es de S/. 2,000, se somete a descuento bancario 120 días antes de su vencimiento. Calcular el valor líquido, si la tasa de descuento es del 12% anual.

$$VL = 2{,}000\left(1 - \frac{0.12x120}{360}\right)$$

$$VL = 1{,}920$$

10.2.3 Valor nominal

Para determinar el valor nominal se presentan dos casos:

a. Cuando se tiene como dato el valor líquido.
b. Cuando se tiene como dato el descuento.

En el primer caso: Deducimos la fórmula en función al valor líquido, partiendo de la definición en el que el valor nominal es la suma del valor líquido más el descuento, es decir:

$$Vn = VL + D$$

$$D = Vn \cdot d \cdot n$$

$$Vn = VL + Vn \cdot d \cdot n$$

$$Vn - Vn \cdot d \cdot n = VL$$

$$Vn(1 - d \cdot n) = VL$$

$$Vn = \frac{VL}{1 - d.n}$$

Cuando el caso lo requiera se aplicará:

$$Vn = \frac{m.Ve}{m + d.n}$$

Ejemplo 10.11.- ¿Cuál será el nominal de una letra a girarse a 160 días, que descontada al 18% anual se desea obtener un valor líquido de S/.950.

$$Vn = \frac{360x950}{360 + 0.18x160}$$

$$Vn = 1{,}032.61$$

En el segundo caso, la fórmula del valor nominal lo obtenemos a partir del descuento:

$$D = Vn \,.\, d \,.\, n$$

$$Vn = \frac{D}{d.n} \quad \text{o}$$

$$Vn = \frac{mD}{d.n}$$

Ejemplo 10.12. El descuento bancario al que se somete una letra de cambio 6 meses antes de su vencimiento al 20% anual asciende a S/.2.500. Calcular el valor nominal del documento.

$$Vn = \frac{12x2{,}500}{0.20x6}$$

$$Vn = 25{,}000$$

10.2.4 Tasa de descuento bancario

En el descuento bancario la fórmula para el cálculo de la tasa, lo obtenemos a partir del descuento.

$$D = Vn \,.\, d \,.\, n$$

$$d = \frac{D}{n..Vn}$$

En el caso que corresponda:

$$d = \frac{mD}{n..Vn}$$

Ejemplo 10.13: ¿A qué tipo de descuento simple comercial se descontó una letra de cambio sometido a descuento 60 días antes de su vencimiento, si su nominal asciende a S/.3.500 y el descuento S/.120?.

$$d = \frac{360x120}{60x3,500}$$

d = 0.2057

d = 20.57% es el tipo de descuento

10.2.5 Periodo de descuento bancario

Para obtener la fórmula del periodo de descuento, seguimos el mismo proceso realizado para la tasa**.**

D = Vn . d . n

$$n = \frac{D}{d..Vn}$$

Ejemplo 10.14: ¿Cuánto duró una operación de descuento si sabemos que la tasa de descuento bancario simple es del 20 % anual, el descuento de S/.150 y el nominal de S/.2.000?

$$n = \frac{150}{0.20.x2,000}$$

n = 0.375

n = 4 meses y 15 días

10.3. Relación por cociente del descuento comercial y el descuento racional

Partiendo de las fórmulas del descuento comercial y racional:

Dc = Vn . d . n

$$Dr = Vn\left[1-\frac{1}{1+d.n}\right]$$

Vamos a compararlo a través de una relación por cociente

$$\frac{Dc}{Dr}=\frac{Vn.d.n}{vn\left[1-\frac{1}{1+d.n}\right]}$$

Despejando obtenemos que el descuento comercial resulta de capitalizar el descuento racional.

$$Dc = Dr\,(1+d.n)$$

En consecuencia el descuento racional será el resultado de actualizar el descuento comercial.

$$Dr = Dc\left[\frac{1}{1+d.n}\right]$$

Ejemplo 10.15. Calcular el descuento comercial que se aplicó a una letra durante un año, al 14% anual, si el descuento racional es de S/.2,500.

$$Dc = 2{,}500\,(1 + 0.14 \times 1)$$

$$Dc = 2{,}850$$

10.4. Pago después de la fecha de vencimiento

Cuando un documento de crédito no se cancela en la fecha señalada para su vencimiento, genera intereses llamados **intereses de mora,** los cuales se calculan tomando como base el valor nominal, por el tiempo que se retrasa el pago, a una tasa de interés fijada al firmar el documento.

En este caso, para determinar la cantidad a pagar se utiliza la fórmula del monto a interés simple: S = P(1+in), de manera que el valor efectivo (Ve) que cobra el banco es equivalente al monto (S) y el valor nominal (Vn) es equivalente al capital (P), entonces:

$$Ve = Vn\,(1 + in)$$

Ejemplo 10.16.- Calcular el valor efectivo de un pagaré de S/.14,000 cancelado 38 días después de su vencimiento, si los intereses de mora se fijaron en el 18% anual.

$$Ve = 14{,}000\left(1 + \frac{0.18x38}{360}\right)$$

$$Ve = 14{,}266$$

Cuando un documento de crédito es protestado por no haberse cancelado a su vencimiento genera además otros gastos adicionales a los intereses de mora, tales como comisiones, portes, gastos judiciales y otros gastos.

Ejemplo 10.17.- Una letra de S/.20,000 aceptada a 90 días, ha sido protestada a su vencimiento y cancelada 30 días después de su vencimiento, incurriendo en los gastos siguientes: 18% anual de interés simple, 2% por comisión sobre los intereses devengados, S/20 de portes S/.180 gastos judiciales, formular la liquidación del documento.

Cancelación		S/.	20,000.00
Intereses de mora			300.00
Comisión			6.00
Portes			20.00
Gastos judiciales			180.00
	Liquidación total	S/.	20,506.00

10.5. Descuentos por Pronto Pago

En las operaciones comerciales de compra-venta es frecuente que el pago no se realice al contado, sino que el vendedor concede al comprador un aplazamiento sin coste alguno, por un periodo convenido entre las partes.

Además se presentan otros casos en este tema, como los que analizamos a continuación:

10.5.1 Cuando las operaciones de compra – venta al crédito son financiadas por el banco.

En este caso es necesario calcular el costo del financiamiento de la operación, para determinar el % máximo que puede ofrecer el vendedor por "pronto-pago", así como a partir de qué tipo de descuento le puede convenir acogerse al comprador.

a. Descuento máximo por "pronto pago" que puede ofrecer el vendedor

Este descuento máximo estará determinado por el costo de su financiamiento. Al obtener el pago al contado, el vendedor se ahorra tener que acudir al financiamiento bancario durante el periodo de aplazamiento.

Por lo tanto, el vendedor podrá ofrecer un tipo de descuento que será como máximo igual al costo de su financiación, ya que si fuera mayor le resultaría más ventajoso esperar a que se cumpla el aplazamiento dado al vendedor y financiarse mientras por el banco.
Para poder comparar el costo de su financiamiento con el descuento ofrecido, tendrá que calcular el tipo de descuento equivalente durante el periodo de aplazamiento. La fórmula empleada es la siguiente:

$$i = \frac{.dn}{m}$$

i = Tipo anual equivalente
m = sub periodos en los que se divide un año
d = Tasa de descuento ofrecido por el vendedor
n = Periodo de aplazamiento concedido

Ejemplo 10.18: Una empresa concede un aplazamiento por 90 días y su costo de financiamiento bancario, es del 10% anual. Calcular el descuento por "pronto-pago" máximo que podrá ofrecer:

$$i = \frac{.0.10x90}{360}$$

i = 0.025
i = 2.5% en tres meses

Por lo tanto, el descuento máximo que podrá ofrecer es del 2,5% (equivalente a un 10% anual). No podrá ofrecer descuentos mayores ya que le resultaría más rentable esperar los 90 días del aplazamiento y mientras financiarse con el banco.

b. Descuento mínimo por pronto pago.

Este caso es de interés del comprador. El razonamiento se orienta al ahorro que obtenga por el descuento y este tendrá que ser igual o mayor que el costo de su financiación: si la empresa paga al contado requerirá de unos fondos que tendrá que financiarlo por medio del banco, sólo si con el pago al contado consigue un ahorro igual o superior al costo de su financiamiento.
Si el descuento que obtiene es inferior al costo del financiamiento bancario para el pago al contado, preferirá acogerse al aplazamiento del pago.

Al igual que en el caso anterior, y para poder comparar la tasa de descuento con el costo de su financiación, habrá que calcular el tipo equivalente anual de dicho descuento, aplicando la fórmula:

$$i = \frac{.m.d}{n}$$

Ejemplo 10.19: Una empresa compradora se financia en el banco al 12% anual. En una operación de compra-venta y el vendedor le ofrece un pago aplazado de 120 días con un descuento por pago al contado del 3%. Ver si le conviene acogerse a este "pronto-pago".

$$i = \frac{.360x0.03}{120}$$

i = 0.09

i = 9 % anual de descuento

9% < 12%

Vemos que el descuento que le ofrecen por pronto-pago es inferior al costo de su financiamiento, por lo que no le conviene acogerse al mismo.

Dadas las mismas condiciones de financiamiento, y el descuento ofertado fuera del 5%. ¿Es conveniente?

$$i = \frac{.360x0.05}{120}$$

i = 0.15

i = 15 % anual de descuento

15% > 12%

En este caso sí le convendría financiar el pago al contado.

10.5.2 Cuando las operaciones de compra – venta al crédito, es financiado por recurso propios.

Así como las obligaciones son castigadas cuando se cancelan después de la fecha de su vencimiento. El comercio mayorista acostumbra también a ofrecer descuentos cuando son pagadas antes de su vencimiento, que permiten al cliente escoger entre varias alternativas la forma de pagar, según el tiempo en que anticipen el pago, en base a la fecha fijada como vencimiento Si el vencimiento de una deuda es de 60 días, significa que el deudor está obligado a pagar el neto de la deuda a los 60 días contados a partir de la fecha de generado el compromiso.

Si en la obligación encontramos la notación: 8% al contado, 6/15, 4/30, n/ 60; implica que se hará un descuento del 8% si se paga al contado, del 6% si se paga dentro de los primeros 15 días , del 4% dentro de los 30 días y el neto sin descuento a los 60 días.

Ejemplo 10.20.- Una factura fechada el primero de marzo por S/.7,150 y cuyas condiciones de pago son: 3/10, 2/20 y n/30, es cancelada el 15 de marzo. ¿Cuánto se debe pagar?

Días transcurridos desde la emisión de la factura 15, en consecuencia, tiene un descuento del 2%.

$$Ve = Vn\,(1 + i)$$

$$Ve = 7{,}150\,(1 - 0.02)$$

$$Ve = 7{,}007$$

10.6 Listado se fórmulas

FÓRMULA	OBTIENE
DESCUENTO RACIONAL	
$D = Vn\left[1-\frac{1}{1+d.n}\right]$ $D = Vn\left[1-\frac{m}{m+d.n}\right]$	Descuento racional
$Vn = Ve\ (1+d.n)$ $Vn = Ve\left[1+\frac{d.n}{m}\right]$	Valor nominal en función al valor efectivo
$Vn = \frac{D(1+dn)}{dn}$ $Vn = \frac{D(m+dn)}{dn}$	Valor nominal en función al descuento
$Ve = Vn\left[\frac{1}{1+\text{d.n}}\right]$ $Ve = Vn\left[\frac{\text{m}}{\text{m}+\text{d.n}}\right]$	Valor efectivo, o actual
$d = \frac{\text{Vn - Ve}}{\text{nVe}}$ $d = \frac{\text{m(Vn - Ve)}}{\text{nVe}}$	Tasa del descuento racional
$n = \frac{\text{Vn - Ve}}{\text{dVe}}$	Periodo de descuento racional
DESCUENTO BANCARIO	
$D = Vn\ .\ d\ .\ n$ $D = \frac{\text{Vn.d.n}}{\text{m}}$	Descuento comercial o bancario

VL = Vn (1 – d . n) $VL = Vn\left(1 - \frac{d.n}{m}\right)$	Valor líquido
$Vn = \frac{VL}{1-d.n}$ $Vn = \frac{mVL}{m-dn}$	Valor nominal en función del valor líquido
$Vn = \frac{D}{d.n}$ $Vn = \frac{mD}{d.n}$	Valor nominal en función del descuento
$d = \frac{D}{n.Vn}$ $d = \frac{mD}{n, Vn}$	Tasa de descuento bancario
$n = \frac{D}{d..Vn}$	Periodo de descuento
Dc = Dr (1+d.n)	Descuento comercial en base al descto. racional.
$Dr = Dc\left[\frac{1}{1+d.n}\right]$	Descuento racional en base al descuento comercial
Ve = Vn (1 + in)	Pago después de la fecha de vencimiento.

10.7. Problemas propuestos

1. Calcular el descuento racional, que resulta de aplicar una tasa de descuento simple del 15% anual, a un pagaré de S/.20,000, con vencimiento a 20 meses y sometido a descuento faltando un año para su vencimiento.
2. El descuento racional al que se somete una factura por pagar 6 meses antes de su vencimiento al 20% anual asciende a S/.3.200. Calcular el valor efectivo del documento.
3. Sabemos que a una letra que vencía a los 90 días, le descontaron S/.350 al aplicar el 12 % de descuento simple racional anual. ¿Cuál fue el nominal del documento?
4. Una empresa somete a descuento racional un pagaré y obtuvo S/.16,000. Si la tasa de descuento es del 24% y el vencimiento del pagare era cuatro meses después de su descuento. ¿Cuál era el valor nominal del documento en la fecha de su vencimiento?
5. Una persona descuenta el 15 de mayo un pagaré de S/.20.000 con vencimiento el 13 de agosto y recibe S/.19.559,90. ¿A qué tasa de descuento racional o matemático se le descontó el pagaré?
6. Una empresa descuenta un documento en el banco por el cual recibe S/.4,620. Si la tasa de descuento es de 20% anual y el valor nominal del documento era de S/.5,330. ¿ Cuánto tiempo faltaba para el vencimiento de su obligación ?
7. Un pagaré con un valor nominal de S/.5,850 es descontado en un banco a 40 días de su vencimiento a una tasa de descuento simple anual del 25%, ¿cuánto le pagaron al acreedor?
8. ¿Cuál fue el nominal de una letra que descontada al 15 % anual durante tres meses tuvo un descuento bancario de S/.348?
9. La empresa X hace una venta de S/.50,000 a un cliente que paga el 20% al contado y por el resto firma dos letras a 30 y 60 días por el mismo importe. A los 9 días de la venta, la empresa X va a un banco a descontar los 2 documentos a una tasa de descuento simple anual del 22%. ¿Cuánto recibe la empresa X en efectivo?

10. Si un pagaré tiene un valor nominal de S/.30,500 y se paga descontado faltando 20 días para su vencimiento en S/.28,600 ¿ Cual fue la tasa de descuento simple anual?
11. Un pagaré por $ 400,000 se descuenta en el banco a 380,088 a una tasa de descuento de 56% anual, ¿cuántos días faltaban para su vencimiento?
12. Calcular el valor a pagar por un pagaré de S/.25,000 cancelado 98 días después de su vencimiento, si los intereses de mora se fijaron en el 18% anual.
13. Descontamos un documento de crédito de S/. 1.220 al 12 % simple anual, obteniéndose un descuento comercial de S/.180. Calcular los días en los que se adelantó el pago.
14. Una persona debe cancelar S/.14.000 a 3 meses, con el 8% de interés. Si el pagará tiene como cláusula penal que, en caso de mora, se cobre el 10% por el tiempo que exceda al plazo fijado ¿qué cantidad paga el deudor, 70 días después del vencimiento?
15. Una factura fechada emitida el 20 de mayo por S/.8,400 y cuyas condiciones de pago son: 4/12, 3/20, 2/25,y n/30 es cancelada el 10 de junio, ¿cuánto se debe pagar?

C A P Í T U L O XI

11. ECUACIONES DE VALOR A INTERÉS SIMPLE

En la práctica se presentan casos en los que es necesario canjear varias deudas de valores y vencimientos diferentes por otra u otras de vencimientos y valores diferentes a las anteriores y esto solo sucede si ambas alternativas resultan equivalentes.

De manera que si una persona registra varias deudas con valores y vencimientos diferentes y no es posible la liquidación de estas a su correspondiente vencimiento, motivado por distintas razones ajenas a la voluntad de los agentes económicos, se puede remplazar por otras con vencimientos diferentes a las originales o por una sola en una fecha llamada fecha focal, de esta manera se da origen al concepto de ecuación de valor.

11.1 Concepto

Las ecuaciones de valor se forman igualando en una fecha de comparación o fecha focal, dos o más obligaciones, pudiendo ser también ingresos o egresos con diferentes vencimientos, para establecer un valor llamado valor equivalente.

En las ecuaciones de valor no siempre se busca un solo valor equivalente, también se pueden establecer varios valores equivalentes con vencimientos diferentes a los valores originales. Un conjunto de obligaciones equivalentes en una fecha también lo serán en cualquier otra fecha.

En las operaciones en las que se utiliza las ecuaciones de valor, como en el caso, de remplazar varias deudas por una sola, tanto el deudor como el acreedor deben estar de acuerdo, para fijar la fecha de liquidación o fecha focal, así como la tasa de interés a utilizar.

Las mencionadas ecuaciones, nos permiten resolver diferente problemas a interés simple, de los cuales los básicos son:

a. Establecer el valor equivalente a los de un conjunto de obligaciones con valores y vencimientos diferentes, en una fecha llamada fecha focal. Al valor equivalente también se le denomina capital común.
b. Determinar la fecha de vencimiento común. Es decir el periodo **n** en el que vence un cantidad única conocida, que remplaza a varias cantidades u obligaciones con valores y vencimientos diferentes, todos ellos conocidos.
c. Determinar la fecha de vencimiento medio, de un conjunto de deudas de diferentes valores y vencimientos que puede cancelarse mediante un pago único, estableciendo el valor equivalente a dicha fecha. El tiempo transcurrido hasta la fecha de vencimiento medio se define como **tiempo equivalente.**

11.2 Equivalencia financiera

Cuando disponemos de diversos capitales de importes diferentes, situados en distintos momentos puede resultar conveniente saber cuál de ellos es más atractivo desde el punto de vista financiero. Para definir esto, es necesario compararlos, pero no basta fijarse solamente en los montos, fundamentalmente debemos considerar, el instante donde están ubicados los capitales.

Para comparar dos capitales en distintos instantes, hallaremos el equivalente de los mismos en un mismo momento y ahí efectuamos la comparación.

Equivalencia financiera es el proceso de comparar dos o más capitales situados en distintos momentos a una tasa dada, observando si tienen el mismo valor en el momento en que son medidos. Para ello utilizamos las fórmulas de las matemáticas financieras de capitalización o actualización.

Dos capitales, P1 y P2, que vencen en los momentos n1 y n2 respectivamente, son equivalentes cuando, comparados en un mismo momento n, tienen igual valor. Este principio es de aplicación cualquiera sea el número de capitales que intervengan en la operación. Si dos o más capitales son equivalentes resultará indiferente cualquiera de ellos, no existiendo preferencia por ninguno en particular. Contrariamente, si no se cumple la equivalencia y uno de ellos es mayor se tendrá preferencia por éste.

Dos sumas son equivalentes (no iguales), cuando resulta indiferente recibir una suma de dinero hoy (P - valor actual) y recibir otra diferente (F - valor futuro) de mayor cantidad transcurrido un período capitalizado a una determinada tasa de interés simple. Ante dos capitales de igual valor en distintos momentos, preferiremos aquel más cercano.

Ante dos capitales presentes en el mismo momento pero de diferente valor, preferiremos aquel de importe más elevado.

En consecuencia, no es posible sumar unidades monetarias de diferentes períodos de tiempo, porque no son iguales. Cuando se hace una colocación de dinero se espera obtener una cantidad mayor a lo invertido al final de un determinado periodo, a una tasa de interés que el sujeto inversor considera que compensa al sacrificio de consumo actual, es decir, a la tasa a la cual está dispuesta a cambiar consumo actual por consumo futuro. Si cuantificamos la equivalencia financiera podemos sostener que:

S/.1,000 colocado al 10% anual, al término de un año será equivalente a S/.1,100. Entonces el valor futuro de S/.1,000 dentro de un año, al 10% anual, es S/.1,100 y viceversa, el valor actual de S/.1,100 dentro de un año, al 10% anual, es S/.1,000.

11.3 Valor equivalente a interés simple

De lo manifestado, que el canje de uno o varios capitales por otro u otros de vencimiento y/o valores diferentes a los anteriores, sólo puede llevarse a cabo si financieramente resultan ser equivalentes.

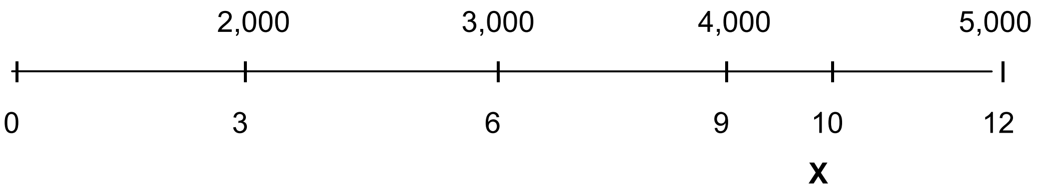
Para determinar si dos o más alternativas son financieramente equivalentes tendremos que valorar en un mismo momento y precisar que posean iguales montos. Al momento de la valoración se le conoce como fecha focal o simplemente como fecha de análisis. Para todo esto el acreedor y el deudor deberán estar de acuerdo en las siguientes condiciones fundamentales:

a) Momento a partir del cual calculamos los vencimientos.
b) Momento en el cual se fija como fecha focal.
c) Tasa de interés a utilizarse en la operación.

Ejemplo 11.1. Un empresario tiene cuatro obligaciones pendientes de S/.2,000, S/.3,000, S/.4,000 y S/.5,000 con vencimiento a los 3, 6, 9 y 12 meses respectivamente. Para pagar estas deudas propone canjear las cuatro obligaciones en una sola armada dentro de 10 meses. Determinar el monto que tendría que abonar si la tasa de interés simple fuera de 15% anual.

Para solucionar el problema se tiene que valorar todas las obligaciones en el décimo mes a fin de poderlos sumar y determinar el valor equivalente que remplace a todas las demás, dado a que se conocen los valores de las obligaciones, los vencimientos y la tasa de interés.

La escala de tiempo nos permite visualizar con mayor precisión el problema.



$$X = 2{,}000\left(1 + \frac{0.15x7}{12}\right) + 3{,}000\left(1 + \frac{0.15x4}{12}\right) + 4{,}000\left(1 + \frac{0.15x1}{12}\right)$$

$$+ 5{,}000\left[\frac{12}{12 + 0.15x2}\right]$$

$$X = 2{,}175 + 3{,}150 + 4{,}050 + 4{,}878$$

$$X = 14{,}253$$

Ejemplo 11.2.- En la fecha, un comerciante debe S/.1,000 con vencimiento a 6 meses, S/.2,500 con vencimiento en 9 meses y propone pagar S/.1,000 de inmediato y liquidar el saldo, mediante un pago único dentro de un año, a una tasa de interés del 18% anual, determinar el valor del pago único.

$$X = 1{,}000\ (1 + \frac{0.18x6}{12}) + 2{,}500\ (1 + \frac{0.18x3}{12}) - 1{,}000\ (1.18)$$

$$X = 1{,}090 + 2{,}612.50 – 1{,}180$$

$$X = 2{,}522.50$$

Ejemplo 11.3.- Una persona firma los siguiente pagarés de S/.10,000 a 120 días, S/.12,000 a 90 días y S/.8,000 a 180 días. Transcurridos 30 días, propone efectuar un pago de S/.10,000 al contado y el saldo a 180 días con el 9% de interés simple anual; determinar el valor del saldo a pagar.

$$X = 12{,}000\left(1+\frac{0.09x90}{360}\right) + 10{,}000\left(1+\frac{0.09x60}{360}\right) + 8{,}000 - 10{,}000\left(1+\frac{0.09x150}{360}\right)$$

$$X = 12{,}270 + 10{,}150 + 8{,}000 - 10.375$$

$$X = 20{,}095$$

11.4 Vencimiento común a interés simple

Vencimiento común es el instante **n** en el que vence un capital único **P** conocido, que reemplaza a varios capitales diferentes, con vencimientos también diferentes, todos ellos conocidos en valores y tiempos.

Cuando la cantidad de pago único propuesto no coincide con la suma aritmética de las deudas, es de suponer que el vencimiento común tampoco coincida con alguna de las fechas de vencimiento.

Para determinar este vencimiento procedemos de la misma forma que en el caso del cálculo de valor equivalente o capital común siendo ahora la incógnita el momento **n** en el que se efectuará el pago único propuesto.

Ejemplo 11.4: Un empresario tiene cuatro obligaciones pendientes de S/.1,000, S/.3,000, S/.3,800 y S/.4,600 con vencimiento a los 3, 6, 8 y 11 meses, respectivamente. De acuerdo con el acreedor deciden hoy sustituir las cuatro obligaciones por una sola de S/.14,000. Determinar el vencimiento común, es decir el momento en el que se debe pagar la cantidad propuesta.

Formulamos la escala de tiempo para una mejor visualización.

	1000	3000	3800	4600
0	3	6	8	11
14,000				

$$14.000\left[\frac{12}{12+0.15x.\text{n}}\right] = 1000\left[\frac{12}{12+0.15x3}\right] + 3000\left[\frac{12}{12+0.15x6}\right]$$

$$+ 3800\left[\frac{12}{12+0.15x8}\right] + 4600\left[\frac{12}{12+0.15x11}\right]$$

$$14{,}000\left[\frac{12}{12+0.15x.\text{n}}\right] = 983.85 + 2{,}790.70 + 3{,}454.55 + 4{,}043.96$$

$$14{,}000\left[\frac{12}{12+0.15x.\text{n}}\right] = 11{,}273.06$$

$$0.15\ \text{n} = \frac{168{,}000}{11{,}273.06} - 12$$

$$\text{n} = 19.352$$

$$\text{n} = 19 \text{ meses y } 10 \text{ días}$$

Ejemplo 10.5: Un empresario tiene cuatro obligaciones pendientes de S/.2,000, S/.3,000, S/.4,000 y S/.5,000 con vencimiento a los 3, 6, 9 y 12 meses respectivamente y propone a su acreedor remplazar las 4 obligaciones por una sola ascendente a S/.15,000. Determinar el vencimiento común o momento en el que sebe cancelar la deuda única aplicando una tasa de interés simple de 15% anual.

Actualizamos todos los valores al periodo cero, establecemos la equivalencia financiera y despejamos la incógnita **n.**

$$15,000\left[\frac{12}{12+0.15.n}\right] = 2,000\left[\frac{12}{12+0.15.x3}\right] + 3,000\left[\frac{12}{12+0.15.x6}\right]$$

$$+\ 4,000\left[\frac{12}{12+0.15.x9}\right] + 5,000\left[\frac{12}{12+0.15x12}\right]$$

$$15,000\left[\frac{12}{12+0.15.n}\right] = 1,927.71 + 2,790.70 + 3,595.51 + 4,347.83$$

$$15,000\left[\frac{12}{12+0.15.n}\right] = 12,661.75$$

$$0.15.n = \frac{180,000}{12,661.75} - 12$$

$$n = 14.77$$

$$n = 14 \text{ meses y } 23 \text{ días}$$

11.5 Vencimiento Medio a interés simple

En las actividades comerciales se presentan casos, en los que hay que sustituir varios documentos o deudas con vencimientos diferentes por uno solo, cuyo valor sea equivalente a todos ellos y a un vencimiento medio.

Para el cálculo del vencimiento medio se presentan dos casos:

Primer caso

Cuando se conocen los capitales y el período de vencimiento.

En este caso el cálculo es semejante al vencimiento común, calculamos previamente los numerales. Es decir el productos de los capitales con sus correspondientes periodos de vencimiento y la suma de estos lo dividimos por la suma de los capitales iníciales. En otras palabras el vencimiento medio es la media aritmética ponderada de los capitales y sus periodos de vencimiento, siendo el importe de dichos capitales los factores de ponderación.

Ejemplo 11.6: Un comerciante firmó tres letras a 30, 60 y 90 días por S/.5,000, 8,000 y 10,000 respectivamente. Dicho personaje desea remplazarlas por una sola y su preocupación es pon cuanto debe firmar la nueva letra y a que vencimiento medio. Si la tasa de interés simple se fija en el 18% anual.

P Capitales	n Días	N Numerales
5,000	30	150,000
8,000	60	480,000
10,000	90	900,000
23,000		1'530,000

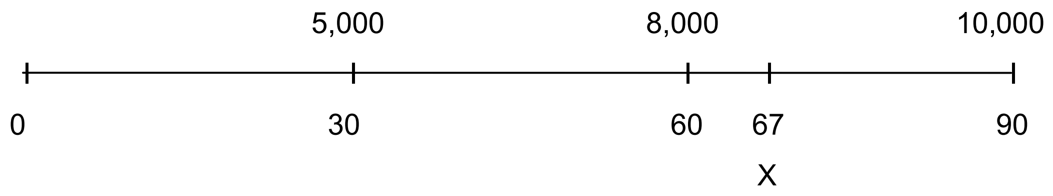
$$N = n \,.\, P$$

$$Vme = \frac{\sum N}{\sum P}$$

$$Vme = \frac{1{,}530{,}000}{23{,}000}$$

Vme = 67 días

Luego calculamos el monto de la nueva letra reemplazante con vencimiento a 67 días. Esto implica calcular el valor equivalente de las deudas al vencimiento medio.



$$X = 5{,}000\left(1+\frac{0.18x37}{360}\right) + 8{,}000\left(1+\frac{0.18x7}{360}\right) + 10{,}000\left(\frac{360}{360+0.18x23}\right)$$

X = 5,092.50 + 8,028 + 9,886.31

X = 23,006.81

Segundo caso

Cuando se conoce la fecha de vencimiento y hay que establecer el periodo de duración fijando una fecha focal.

Ejemplo 11.7: Un comerciante firmó tres letras de 7,000, S/. 10,000 y S/. 5,000 con vencimientos, el 10 de enero, el 15 de marzo y el 20 de mayo respectivamente y se desea calcular el vencimiento medio y por cuanto se debe girar una sola letra reemplazante de las anteriores, a una tasa de interés simple del 18% anual.

Fijamos como fecha de comparación o fecha focal cualquiera de los vencimientos, para determinar el periodo de cada uno de los capitales, colocando cero en la fecha focal y en los periodos anteriores a la fecha focal tienen signo positivo y los posteriores a dicha fecha tienen signo negativo.

Vencimiento	P Capitales	n Periodo	N Numerales
Enero 10	7,000	64	448,000
Marzo 15	10,000	0	0
Mayo 20	5,000	- 66	-330,000
	22,000		118,000

En este caso tomamos como fecha focal (F.F.) marzo 15 con un periodo de valor cero, un periodo positivo por ser anterior y un periodo negativo por ser posterior a la fecha focal. Cualquiera de las fechas que se tome como fecha focal debe dar el mismo resultado.

La fórmula a utilizar es la siguiente:

$$\text{Vme} = \text{F.F.} - \frac{\sum N}{\sum P}$$

$$\text{Vme} = \text{Marzo 15} - \frac{118{,}000}{22{,}000}$$

Vme = Marzo 15 – 5

Vme = Marzo 10

Verificamos el resultado tomando como fecha focal el 10 de enero.

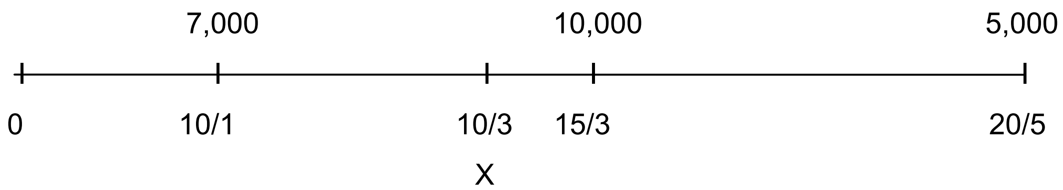
Vencimientos	P Capitales	n Período	N Numerales
Enero 10	7,000	0	0
Marzo 15	10,000	- 64	- 640,000
Mayo 20	5,000	- 130	- 650,000
	22,000		-1'290,000

$$\text{Vme} = \text{Enero 10} - \frac{-1'290,000}{22,000}$$

Vme = Enero 10 + 59

Vme = Marzo 10

Conociendo el vencimiento medio estamos en condiciones de calcular por cuanto se debe gira la letra reemplazante a las tres letras iníciales



$$X = 7,000\left(1+\frac{0.18x59}{360}\right) + 10,000\left(\frac{360}{360+0.18x5}\right) + 5,000\left(\frac{360}{360+0.18x71}\right)$$

X = 7,206.50 + 9,975.06 + 4,828.58

X = 22,010.14.

La letra reemplazante debe girarse por S/.22,010.14, con vencimiento al 10 de Marzo.

11.6 Problemas propuestos

1. Un comerciante tiene cuatro obligaciones pendientes de pago, S/.3,000, S/.4,000, S/.3,800 y S/.5,600 con vencimiento a los 4, 8, 12 y 16 meses, respectivamente. Para pagar estas deudas propone canjear las cuatro obligaciones por una sola, a pagar dentro de 14 meses. Determinar el monto que tendría que abonar a una tasa de interés simple del 24% anual.
2. El gerente de una empresa contrae la siguientes deudas, por S/.9,000 a 90 días, S/.10,000 a 120 días y S/.9,000 a 150 días y luego negocia con su acreedor, proponiendo un pago de S/10,000 a los 60 días y por el saldo firmar un pagaré con vencimiento a 180 días, al 9% de interés simple anual. ¿Cuál será el valor del saldo a pagar?
3. Con los datos del ejercicio Nº 1 y asumiendo que el deudor de acuerdo con el acreedor deciden sustituir las cuatro obligaciones por una sola de S/.18,000. Determinar el vencimiento o fecha de pago único, con una tasa de interés simple del 18% anual.
4. Un comerciante firmó tres letras por S/.15,000, S/. 10,000 y S/. 5,000 con vencimientos, el 30 de abril, el 25 de junio y el 12 de agosto respectivamente y propone a su acreedor sustituir las tres letras por una sola a su vencimiento medio. Calcular el vencimiento medio y el valor de la nueva letra, a una tasa de interés simple del 24% anual.
5. Se obtiene un préstamo de S/.10,000, para ser cancelado con un abono de S/.5,000 al final de sexto mes y el saldo al término del año. Calcular el valor del pago al término del año, a una tasa de interés simple del 2% mensual.
6. Se desea sustituir un pago de S/.10,000 dentro de 30 días por un pago de S/.5,000 hoy otro pago a realizar dentro de 60 días, a una tasa de interés simple del 24% anual. ¿Cuál será el importe a pagar dentro de 60 días?
7. Se desea sustituir por un solo pago de S/.10,000, al vencimiento medio, una deuda de S/.5,000 a pagarse el día de hoy y otro de S/.5,000 dentro de 60 días. Calcular el vencimiento medio.
8. Un señor tiene tres deudas de S/.2.000, S/.4.000 y S/.5.000, con vencimientos a los 6, 8 y 10 meses, respectivamente. Si se fija como fecha de liquidación con un

pago único el noveno mes. ¿Cuál será el valor de dicho pago a una tasa de interés simple del 18% anual?

9. Un señor tiene tres deudas de 2.000, 4.000 y 5.000 nuevos soles con vencimientos a los 6, 8 y 10 meses, respectivamente. De acuerdo con el acreedor deciden sustituir las tres deudas por una sola de S/.11.200. Calcular el vencimiento común, si se pacta a una tasa de interés simple del 18% anual.
10. Se desea sustituir dos deudas de S/.7,000 y S/.9,000, con vencimientos a 60 y 90 días respectivamente, por una sola deuda ascendente a S/.16,500, a una tasa de interés anual del 12%. ¿Cuál será el vencimiento único de las deudas?
11. Con los datos del problema número 10 calcular el valor equivalente a pagar si se fija como fecha focal a los 80 días.
12. Un señor tiene tres deudas de 2.000, 4.000 y 5.000 nuevos soles con vencimientos a los 6, 8 y 10 meses, respectivamente. De acuerdo con su acreedor, deciden sustituir las tres deudas por una sola a su vencimiento medio. Calcular el vencimiento medio y el valor a pagar, a una tasa de interés simple del 18% anual.

C A P Í T U L O XII

12. ANUALIDADES

En la práctica para formar un capital en el futuro o liquidar una deuda no siempre se hace un solo depósito o un solo pago, sino que una de las modalidades es el pago progresivo. Es decir una serie de depósitos o pagos, a los que se les conoce con el nombre de anualidad.

En el presente curso analizamos los distintos casos de financiamiento al corto plazo, esto significa en un período no mayor de un año. En consecuencia el tema a tratar se refiere a las anualidades a interés simple, conocimientos básicos necesarios para el aprendizaje de las anualidades a interés compuesto.

12.1 Concepto de Anualidad

Anualidad es la sucesión o conjunto de pagos iguales en periodos de tiempo también iguales. Si los pagos son diferentes o alguno de ello es diferente a los demás toman el nombre de anualidades variables o impropias.

El término ***anualidad***, nos da la impresión que los pagos son anuales pero de acuerdo a la definición, también pueden ser semestrales, trimestrales o de series de tiempo de cualquier otra duración.

12.2 Clasificación de las anualidades

Las anualidades en general se clasifican en:

a. Anualidades ciertas. Son aquellas cuyas fechas de inicio y término se conocen por estar estipulados en forma específica.
b. Anualidades eventuales o contingentes. Son aquellas en las que el comienzo o el final del plazo no se conoce específicamente, porque dependen de algún suceso

c. previsible, pero que no se puede establecer concretamente; un ejemplo típico es el seguro de vida, en el cual se conoce la cuota pero no el período de duración.

A su vez, las anualidades ciertas y eventuales se dividen en:

a. Anualidades ordinarias. Se les llama también anualidades vencidas o de final de periodo, los pagos se efectúan al final de cada periodo.
b. Anualidades anticipadas. Llamadas también impositivas, adelantadas o de inicio de periodo.
c. Anualidades diferidas: Cuando los pagos se inician después de transcurrido un determinado número de períodos de iniciada la anualidad y pueden ser ordinarias o anticipadas.
d. Impropias o variables. Cuando las cuotas de pago no son iguales.

12.3 Monto de una anualidad ordinaria a interés simple

Los símbolos que utilizaremos para el tema de las anualidades son:

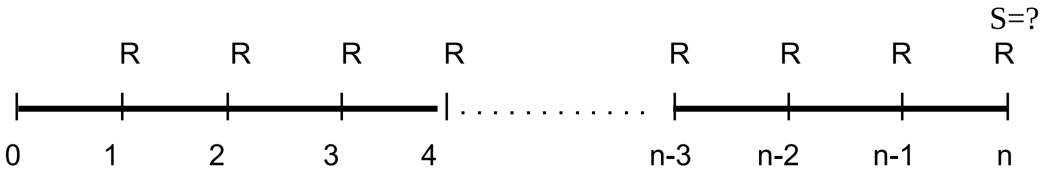
S = monto de una anualidad o valor futuro.
R = pago periódico de una anualidad.
n = numero de cuotas o periodos de pago.
m = número de periodos en los que se divide un año.
i = tasa de interés.
P = Valor actual o presente de una anualidad.

Para el cálculo del monto o valor futuro de una anualidad ordinaria, entendiéndose que éste se ubica al final del último periodo, deducimos la fórmula de la siguiente manera:

Para deducir la formula, partimos de un problema supuesto como el siguiente:
Dado una serie de pagos iguales **R**, al final de cada periodo, ¿cuál será el monto acumulado en **n** periodos de tiempo a una tasa de interés **i** ?

Ilustraremos el problema planteado utilizando la escala de tiempo.

Fig. 12.1



Del gráfico se deduce que S, será la suma de los valores de cada uno de los pagos en forma individual ya que los periodos de tiempo son diferentes para cada uno, y esto lo expresamos de la siguiente manera:

Nº	Renta		Interés
1ra.	R	+	R . i . (n – 1)
2da.	R	+	R . i . (n – 2)
3ra.	R	+	R . i . (n – 3)
.	.		.
.	.		.
n ava.	R	+	R . i .(0)

El monto es la suma de todos los depósitos o pagos más sus correspondientes intereses: Si los intereses lo ordenamos a manera de una progresión aritmética tenemos:

$$S = nR + \left[\frac{Ri(n-1) + Ri(0)}{2}\right]n$$

$$S = nR + \frac{n.R.i.(n-1)}{2}$$

$$S = \frac{2nR + nRi.(n-1)}{2}$$

$$S = \frac{nR[2 + i.(n-1)]}{2}$$

Cuando la tasa de interés está dada en un periodo mayor al periodo de pago la fórmula es afectada por **m**.

$$S = \frac{nR[2m + i(n-1)]}{2m}$$

Ejemplos 12.1.- ¿Qué monto se formará con 10 cuotas mensuales ordinarias de S/. 880 cada una, colocadas al 18% anual de interés simple?

$$S = \frac{10x880[2x12 + 0.18(10-1)]}{2x12}$$

$$S = 9,394$$

Ejemplo 12.2.- Un comerciante deposita en un banco, ordinariamente cada bimestre, la cantidad de S/. 1,200, si el banco paga el 5% trimestral de interés simple, ¿cuánto habrá acumulado en un período de 4 años?

$$S = \frac{24x1,200[2x6 + 0.20(24-1)]}{2x6}$$

$$S = 39,840$$

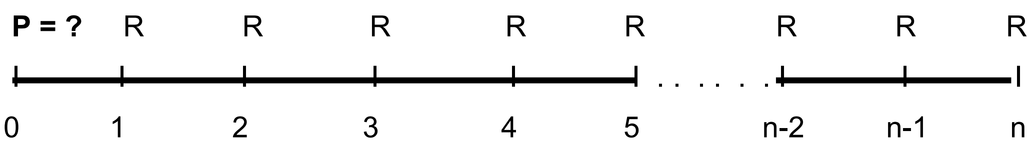
12.4 Valor actual de una anualidad ordinaria a interés simple

Consiste en calcular el valor actual o presente P, de una serie uniforme de pagos ordinarios, durante un determinado número de períodos de tiempo y a una determinada tasa de interés simple**.**

Tomamos como fecha focal el período cero para el proceso de actualización, de manera que el valor obtenido, es el equivalente a la suma de todos los pagos actualizados individualmente.

Esto lo graficamos en la siguiente escala de tiempo..

Fig. 12.2



En el desarrollo de la asignatura hemos tratado sobre el monto bajo dos modalidades: El monto o valor futuro de un capital, que se obtiene mediante el factor simple de capitalización a interés simple.

$$S = P\,(1+i.n)$$

y el monto de una serie de pagos o depósitos, que se obtiene mediante el factor de capitalización de una serie a interés simple:

$$S = \frac{nR[2+i(n-1)]}{2},$$

Igualando los dos montos despejamos **P** y obtenemos la fórmula que nos permite calcular el valor actual de una anualidad.

$$P\,(1+i.n) = \frac{nR[2+i(n-1)]}{2}$$

Despejamos **P** y obtenemos la fórmula que nos permite calcular el valor actual de una anualidad.

$$P = \frac{nR[2+i(n-1)]}{2(1+i.n)}$$

Y en el caso que corresponda:

$$P = \frac{nR[2m+i(n-1)]}{2.(m+i.n)}$$

Ejemplos 12.3 Una persona espera recibir ordinariamente durante los próximos 5 años la cantidad de S/.4,000 nuevos soles anuales, para liquidar una cuenta que una empresa le adeuda; pero existe la alternativa de liquidarse actualmente dicha cuenta al 20% anual de interés simple. Determinar a cuánto asciende la cantidad a recibir.

$$P = \frac{5x4{,}000[2+0.20(5-1)]}{2(1+0.20x5.)}$$

$$P = \frac{56{,}000}{4}$$

$$P = 14{,}000$$

Ejemplo 12.4 Calcular el valor actual de una serie de pagos de S/. 5,000 cada uno, efectuados ordinariamente y en forma trimestral durante 3 años al 16% anual de interés simple.

$$P = \frac{12x5{,}000[2x4 + 0.16(12-1)]}{2.(4+0.16x12)}$$

$$P = \frac{585{,}600}{11.84}$$

$$P = 49{,}459.46$$

12.5. Renta de una anualidad ordinaria a interés simple

Es frecuente la necesidad de conocer el valor de la serie de pagos periódicos necesarios para formar un monto en el futuro o para liquidar una deuda o recuperar un capital colocado en el momento actual, en un determinado período de tiempo y a una determinada tasa de interés.

12.5.1 Renta ordinaria en función del monto

Consiste en determinar el valor de la renta periódica **R**, para en un determinado tiempo disponer de un monto o valor futuro**.**

Partiendo de la fórmula del monto de una anualidad ordinaria despejamos **R**.

$$S = \frac{nR[2+i(n-1)]}{2}$$

$$R = \frac{2S}{n[2+i.(n-1)]}$$

Cuando la tasa de interés está dada, en un periodo mayor al periodo en el que se efectúan los depósitos o pagos, hacemos intervenir en la fórmula a **m**.

$$R = \frac{2mS}{n[2m+i.(n-1)]}$$

Las fórmulas obtenidas nos permiten calcular el valor de la cuota o renta ordinaria cuando se conoce el monto, la tasa de interés y el tiempo.

Ejemplo 12.5 Se desea saber el valor de la cuota, para acumular S/. 12.000 en 8 entregas ordinarias trimestrales, colocadas al 24% de interés simple anual.

$$R = \frac{2x4x12{,}000}{8[2x4 + 0.24(8-1)]}$$

R = 1,461.63

Ejemplo 12.6.- Calcular la cuota ordinaria mensual que debe colocarse durante 20 meses al 22% anual de interés simple para formar un monto de S/. 8, 400.

$$R = \frac{2x12x8{,}400}{20[2x12 + 0.22(20-1)]}$$

R = 357.70

Ejemplo 12.7 Se desea saber cuál será el valor de la cuota ordinaria semestral para acumular la cantidad de S/.101,700, en un período de 5 años a una tasa de interés simple del 25% anual.

$$R = \frac{2x101{,}700}{5[2 + 0.25.(5-1)]}$$

$$R = \frac{203{,}400}{15}$$

R = 13,560

12.5.2 Renta ordinaria en función del valor actual

Consiste en determinar el valor de la renta periódica **R**, que permita recuperar una inversión o liquidar una deuda dada una tasa de interés y un determinado periodo de tiempo**.**

En este caso despejamos **R** de la fórmula del valor actual.

$$P = \frac{nR[2 + i(n-1)]}{2(1 + i.n)}$$

$$nR[2 + i(n-1] = 2P(1 + i.n)$$

$$R = \frac{2P(1 + i.n)}{n[2 + i.(n-1)]}$$

En el caso que la tasa y los pagos no estén dados en la misma unidad de tiempo insertamos en la fórmula el elemento **m**

$$R = \frac{2P(m + i.n)}{n[2m + i.(n-1)]}$$

Ejemplo 12.8 Una persona invierte en un negocio, un capital de S/.14,000 y espera recuperar dicha inversión en un periodo de 2 años. ¿Cuál deberá ser el rendimiento mensual, si la tasa de ganancia es del 2% mensual?

$$R = \frac{2x14{,}000[1 + 0.02.(24-1)]}{24(2 + 0.02x23.)}$$

$$R = \frac{41{,}440}{59.04}$$

R = 701.90

Ejemplo 12.9 Se obtiene un préstamo bancario de S/.55,750 para cancelarse en un periodo de 3 años, con pagos ordinarios trimestrales. Calcular el valor de cada pago si el banco cobra el 16% de interés simple anual.

$$R = \frac{2x55{,}750.(4 + 0.16x12)}{12[2x4 + 0.16.(12-1)]}$$

$$R = \frac{660{,}080}{117.12}$$

R = 5,635.93

12.6. Tasa de una anualidad ordinaria a interés simple

Consiste en determinar la tasa de interés simple a la que se ha colocado una serie de depósitos o pagos y para el efecto se presentan dos casos, en función del monto y en función del valor actual.

Cuando se conoce el monto de una anualidad ordinaria **S**, el número de cuotas **n** y el valor de la serie de pagos **R,** estamos en el primer caso**.**

Cuando se conoce el valor actual **P** de una serie da pagos futuros, el valor de cada pago **R** y el número de cuotas **n,** estamos en el segundo caso.

12.6.1. Tasa de una anualidad ordinaria en función al monto

De $S = \dfrac{nR[2 + i(n-1)]}{2}$

Despejando i

$$2 + i(n-1) = \frac{2S}{nR}$$

$$i(n-1) = \frac{2S}{nR} - 2$$

$$i = \frac{2S}{nR(n-1)} - \frac{2}{n-1}$$

Esta fórmula se utiliza cundo el problema pide calcular la tasa en la misma unidad de tiempo que el periodo de cada pago. (Ejemplo se pide calcular la tasa mensual cuando los pagos también son mensuales).

Cuando se tiene que calcular la tasa en una unidad de tiempo mayor al periodo de cada pago insertamos el elemento **m.** (Ejemplo se pide calcular la tasa anual cuando los pagos son mensuales).

$$i = \frac{2mS}{nR(n-1)} - \frac{2m}{n-1}$$

Ejemplo 12.10.- Calcular la tasa anual de interés simple a la que estuvieron colocados 10 depósitos trimestrales ordinarios de S/.1,000 cada uno para capitalizar S/.12,500.

$$i = \frac{2x4x12{,}250}{10x1{,}000(10-1)} - \frac{2x4}{10-1}$$

$$i = 0.20$$
$$i = 20\% \quad \text{annual}$$

Ejemplo. 12.11. Calcular la tasa trimestral de interés simple, a la que se colocaron una serie de depósitos trimestrales, durante dos años, para formar un monto de S/.12,840.

$$i = \frac{2x12,840}{8x1,500(8-1)} - \frac{2}{8-1}$$

$$i = 0.3457 - 0.2857$$
$$i = 0.06$$
$$i = 6\% \quad \text{trimestral}$$

12.6.2 Tasa de una anualidad ordinaria en función al valor actual

En este caso la tasa **i,** lo despejamos de la fórmula del valor actual

$$\text{De} \quad P = \frac{nR[2+i(n-1)]}{2(1+i.n)}$$

$$2P\,(1 + in) = nR[2+i(n-1)]$$
$$2P + 2Pin = 2nR + nRi(n-1)$$
$$2Pin - nRi(n-1) = 2nR - 2P$$
$$i[2Pn - nR(n-1)] = 2(nR - P)$$

$$i = \frac{2(nR-P)}{n[2P-R(n-1)]}$$

Similar al caso anterior, la fórmula obtenida se utiliza cuando el problema pide calcular la tasa en la misma unidad de tiempo que el periodo de cada **R**.

Cuando se tiene que calcular la tasa en una unidad de tiempo mayor al periodo de cada **R** insertamos el elemento **m.**

$$i = \frac{2m(nR-P)}{n[2P-R(n-1)]}$$

Ejemplo 12.12.- Un préstamo de S/ 25,000, se amortizará con pagos vencidos trimestrales de S/. 2,650 en 3 años. Calcular la tasa anual de interés simple que el banco cobra por dicho préstamo.

$$i = \frac{2x4(12x2{,}650 - 25{,}000)}{12[2x25{,}000 - 2{,}650(12-1)]}$$

i = 0.2174

i = 21.74 %

Ejemplos 12.3 Un Comerciante invierte en un negocio un capital de S/.78,600, del cual espera obtener ganancias mensuales de S/.2,800, a fin de recuperar la inversión en 3 años. ¿Cuál será la tasa de ganancia anual?

$$i = \frac{2x12(36x2{,}800 - 78{,}600)}{36[2x78{,}600 - 2{,}800(36-1)]}$$

$$i = \frac{532{,}800}{2'131{,}200}$$

i = 0.25

i = 25% anual

12.7 Listado se fórmulas

FÓRMULA	OBTIENE
$S = \dfrac{nR[2+i.(n-1)]}{2}$	Monto de una anualidad ordinaria
$S = \dfrac{nR[2m+i(n-1)]}{2m}$	Monto de una anualidad ordinaria con el uso de **m**
$P = \dfrac{nR[2+i(n-1)]}{2(1+i.n)}$	Valor actual de una anualidad ordinaria
$P = \dfrac{nR[2m+i(n-1)]}{2.(m+i.n)}$	Valor actual de una anualidad ordinaria con el uso de **m**
$R = \dfrac{2S}{n[2+i.(n-1)]}$	Renta de una anualidad ordinaria en función del monto.
$R = \dfrac{2mS}{n[2m+i.(n-1)]}$	Renta de una anualidad ordinaria en función del monto con el uso de **m**
$R = \dfrac{2P(1+i.n)}{n[2+i.(n-1)]}$	Renta de una anualidad ordinaria en función del valor actual
$R = \dfrac{2P(m+i.n)}{n[2m+i.(n-1)]}$	Renta de una anualidad ordinaria en función del valor actual con el uso de **m**
$i = \dfrac{2S}{nR(n-1)} - \dfrac{2}{n-1}$	Tasa de una anualidad ordinaria en función del monto
$i = \dfrac{2mS}{nR(n-1)} - \dfrac{2m}{n-1}$	Tasa de una anualidad ordinaria en función del monto con el uso de **m**
$i = \dfrac{2(nR-P)}{n[2P-R(n-1)]}$	Tasa de una anualidad ordinaria en función dl valor actual
$i = \dfrac{2m(nR-P)}{n[2P-R(n-1)]}$	Tasa de una anualidad ordinaria en función dl valor actual, con el uso de **m**

12.8. Problemas propuestos

1. Se efectúan depósitos bimestrales ordinarios de S/.1,200 cada uno, durante el plazo de un año, en una cuenta que paga el 24% de interés simple anual. ¿Cuál será el monto al final del periodo?
2. En el plazo de un año se acumuló un monto de S/.7,920, con depósitos ordinarios bimestrales colocados al 24% anual de interés simple. ¿Cuánto se depositó en cada bimestre?
3. Un ahorrista efectúa depósitos vencidos mensuales de S/.750 cada uno, en un banco que paga una tasa de interés simple trimestral del 4.5%. ¿Cuál será el valor acumulado al término de 2 años y 4 meses?
4. En el plazo de un año se acumuló un monto de S/.4,270, con depósitos ordinarios trimestrales de S/.1,000 cada uno. ¿Cuál será la tasa de interés simple trimestral a la que se colocaron dichos depósitos?
5. En un plazo de dos años se requiere acumular un monto de S/.9,120, con depósitos ordinarios trimestrales, colocados al 16 % de interés simple anual. Calcular el valor de cada depósito.
6. Un comerciante invierte en un negocio su capital, del cual espera obtener ganancias mensuales de S/.2,800, estimándose una tasa nominal anual de ganancia del 25%, de manera que se recupere la inversión en 3 años. ¿De cuánto fue la inversión?
7. Calcular el valor presente de una serie de depósitos ordinarios de S/.800 nuevos soles mensuales, durante 3 años, a la tasa del 2% mensual.
8. Una persona invierte en un negocio, un capital de S/.31,000 y espera recuperar dicha inversión en un periodo de 2 años y un mes. ¿Cuál deberá ser el rendimiento mensual, a una tasa de ganancia del 2% mensual?
9. Se obtiene un préstamo bancario de S/.48,375 para cancelarse en un periodo de 2 años y 6 meses, con pagos ordinarios mensuales. ¿Cuál será la renta mensual a pagar si el banco cobra el 24% de interés simple anual?
10. Una empresa obtiene un préstamo de S/.51,750, para ser cancelado con pagos ordinarios mensuales de S/1,900 cada uno, en un periodo de 3 años. ¿Cuál será la tasa de interés mensual a pagar?

C A P Í T U L O XIII

13. ANUALIDADES ANTICIPADAS

Los compromisos de pagos no solamente se efectúan al final de los periodos, sino también a inicio de cada periodo, tal es el caso de los alquileres de terrenos, edificios, oficinas, pago de pensiones de enseñanza, que por lo general se pagan por adelantado y otros de acuerdo a lo convenido entre las partes en cada operación de orden comercial o financiero.

Una anualidad anticipada, es una sucesión de pagos o rentas que se efectúan o vencen a principio de cada período; y se le conoce también con el nombre de anualidad adelantada, de principio de período o de imposición.

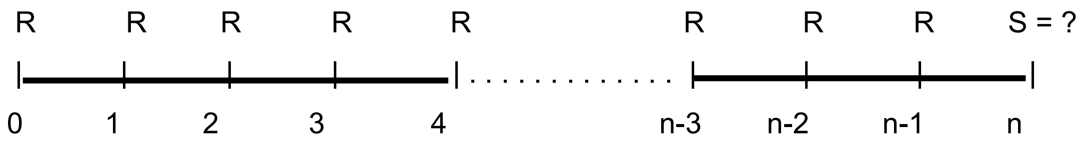
Las anualidades anticipadas empiezan en el periodo cero y terminan al inicio del último periodo, de manera que todas las rentas perciben intereses calculados a interés simple, hasta el término del horizonte temporal.

13.1 Monto de una anualidad anticipada a interés simple

La estructura de la fórmula del monto de una anualidad anticipada, es la misma que la de una anualidad ordinaria, diferenciándose únicamente por la expresión de (n + 1) en vez de (n – 1), en consecuencia para deducir la fórmula procedemos en forma similar a la ordinaria.

Para deducir la fórmula, partimos de un problema supuesto como el siguiente:
Dado una serie de pagos iguales **R**, al inicio de cada periodo ¿cuál será el monto acumulado en **n** periodos de tiempo a una tasa de interés **i** ?
Ilustraremos el problema planteado utilizando la escala de tiempo.

Fig. 13.1



Del gráfico se deduce que **S**, será la suma de los montos de cada uno de los pagos en forma individual ya que los periodos de tiempo son diferentes para cada uno, y esto lo expresamos de la siguiente manera:

Nº	Renta		Interés
1ra.	R	+	R . i .n
2da.	R	+	R . i . (n – 1)
3ra.	R	+	R . i . (n – 2)
.	.		.
.	.		.
n ava.	R	+	R . i .

El monto es la suma de todos los depósitos o pagos más sus correspondientes intereses: Si los intereses lo ordenamos a manera de una progresión aritmética tenemos:

$$S = nR + \left(\frac{R.i.n + R.i}{2}\right).n$$

$$S = nR + \left[\frac{R.i(n+1)}{2}\right].n$$

$$S = nR + \frac{n.R.i.(n+1)}{2}$$

$$S = \frac{2.n.R. + .n.R.i.(n+1)}{2}$$

$$S = \frac{.n.R[2. + .i.(n+1)].}{2}$$

Cuando la tasa de interés está dado en un periodo mayor al periodo de pago la fórmula es afectada por **m**.

$$S = \frac{n.R.[2.m. + .i.(n+1)]}{2m}$$

Ejemplo 13.1.- ¿Qué monto se habrá acumulado en una cuenta de ahorros, en un periodo de 6 meses, si a inicio de cada mes se deposita S/1,000 a una tasa de interés simple del 3% mensual?

$$S = \frac{6x1{,}000[2 + 0.03(6+1)]}{2}$$

S = 6,630

Ejemplo 13.2.- Hoy se apertura una cuenta en un banco con S/1500 y se continúa depositando cada 3 meses durante un año. ¿Cuánto se habrá acumulado durante el periodo a una tasa de interés simple de 18% anual?

$$S = \frac{4x1{,}500[2x4 + 0.18(4+1)]}{2x4}$$

S = 6,675

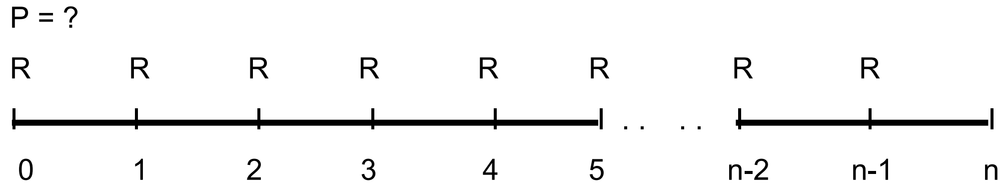
13.2 Valor actual de una anualidad anticipada a interés simple

Consiste en calcular el valor actual o presente P, de una serie uniforme de pagos anticipados, durante un determinado número de períodos de tiempo y a una determinada tasa de interés simple**.**

Tomamos como fecha focal el período cero para el proceso de actualización; de manera que el valor obtenido, es el equivalente a la suma de todos los pagos actualizados individualmente.

Esto lo graficamos en la siguiente escala de tiempo.

Fig. 13.2



Para obtener una fórmula que nos permita actualizar una serie de pagos futuros partimos de la fórmula del monto en forma similar a una anualidad ordinaria a interés simple.

$$S = \frac{nR[2+i(n-1)]}{2}$$

El primer miembro de la ecuación está constituido por el monto o valor futuro de un capital y este lo remplazamos por su equivalente P(1+i.n):

$$P\ (1+i.n) = \frac{nR[2+i(n+1)]}{2}$$

Despejamos **P** que representa al valor actual y obtenemos la fórmula buscada.

$$P = \frac{nR[2+i(n+1)]}{2(1+i.n)}$$

Cuando la tasa de interés está dada, en un periodo mayor al periodo en el que se efectúan los depósitos o pagos, en la fórmula interviene el elemento **m**.

$$P = \frac{nR[2m+i(n+1)]}{2.(m+i.n)}$$

Podemos observar que las fórmulas son similares a las ordinaria variando únicamente la expresión (n-1) por (n+1).

Ejemplos 13.3 Un local comercial es alquilado por un año, con pagos anticipados de S/.1, 500 mensuales. El propietario del inmueble solicita se le cancele el total a la firma del contrato, si la tasa de interés es del 2% mensual, cuál será el valor a pagar?

$$P = \frac{12x1{,}500[2+0.02(12+1)]}{2(1+0.02x12.)}$$

$$P = \frac{39{,}950}{2..48}$$

P = 16,403.23

Ejemplo 13.4 Las condiciones de venta de un equipo electrónico son las siguientes: S/.600 al efectuar la compra y 11 cuotas mensuales más de S/.600 cada uno, si la tasa de interés simple es del 24% anual. ¿Cuál será su precio al contado?

$$P = \frac{12x600[2x12 + 0.24(12+1)]}{2.(12 + 0.24x12)}$$

$$P = \frac{195,254}{29.76}$$

$$P = 6,560.95$$

13.3 Renta de una anualidad anticipada a interés simple

Es el pago que por cualquier concepto se realiza periódicamente, en este caso a inicio de cada periodo y esta se presenta de dos maneras según el caso, en función al monto o en función al valor actual.

13.3.1 Renta anticipada en función del monto

Consiste en determinar el valor de la renta anticipada por periodo, que nos permita formar un monto después de haber realizado varios depósitos y capitalizados a una determinada tasa de interés simple.

Partiendo de la fórmula del monto de una anualidad anticipada despejamos **R**.

$$S = \frac{nR[2 + i(n+1)]}{2}$$

$$R = \frac{2S}{n[2 + i.(n+1)]}$$

Al igual que en las anualidades ordinarias hacemos uso de una segunda fórmula, cuando la tasa de interés está dada, en un periodo mayor al periodo en el que se efectúan los depósitos o pagos.

$$R = \frac{2mS}{n[2m + i.(n+1)]}$$

Las fórmulas obtenidas nos permiten calcular el valor de la cuota o renta anticipada cuando se conoce el monto, la tasa de interés y el número de pagos.

Ejemplo 13.5 Se desea saber el valor de la cuota anticipada trimestral necesaria, para acumular S/.30.750 en 8 entregas y a una tasa del 24% de interés simple anual.

$$R = \frac{2x4x30{,}750}{8[2x4+0.25(8+1)]}$$

$$R = \frac{246{,}000}{82}$$

$$R = 3{,}000$$

Ejemplo 13.6.- Se requiere determinar el importe de la cuota uniforme trimestral anticipada, que en el plazo de un año y 6 meses acumule un monto de S/.28,200, si los depósitos devengan un interés del 5% trimestral.

$$R = \frac{2x28{,}200}{6[2+0.05(6+1)]}$$

$$R = \frac{56{,}400}{14.1}$$

$$R = 4{,}000$$

13.3.2 Renta anticipada en función del valor actual

Consiste en determinar el valor de la renta periódica anticipada, que permita recuperar una inversión o liquidar una deuda dada una tasa de interés simple y un determinado periodo de tiempo**.**

En este caso despejamos **R** de la fórmula del valor actual.

$$P = \frac{nR[2+i(n+1)]}{2(1+i.n)}$$

$$nR[2+i(n+1] = 2P(1+i.n)$$

$$R = \frac{2P(1+i.n)}{n[2+i.(n+1)]}$$

En el caso que se requiera aplicamos la fórmula:

$$R = \frac{2P(m+i.n)}{n[2m+i.(n+1)]}$$

Ejemplos 13.7 Una persona invierte en un negocio, un capital de S/.64,000 y espera recuperar dicha inversión en un periodo de 3 años. ¿Cuál deberá ser el rendimiento trimestral, si la tasa de ganancia se estima en el 6% trimestral?

$$R = \frac{2x64,000(1+0.06x12)}{12[2+0.06(12+1)]}$$

$$R = \frac{220,160}{33.36}$$

$$R = 6,599.52$$

Ejemplo 13.8 Se obtiene un préstamo bancario de S/.50,000 para cancelarse en un periodo de 3 años y 6 meses, con pagos anticipados trimestrales. Calcular el valor de cada pago si el banco cobra el 25% de interés simple anual.

$$R = \frac{2x50,000.(4+0.25x14)}{14[2x4+0.25(14+1)]}$$

$$R = \frac{750,000}{164.5}$$

$$R = 4,559.27$$

13.4. Tasa de interés de una anualidad anticipada a interés simple

La tasa de interés es uno de los elementos de mayor importancia, que le dan sentido a las operaciones financieras. El tema consiste en determinar la tasa de interés simple a la que se ha colocado una serie de depósitos o pagos anticipados y se presentan dos casos, en función del monto y en función del valor actual.

Cuando se conoce el monto de una anualidad anticipada, el número de cuotas y el valor de la cuota, estamos en el primer caso.

Cuando se conoce el valor actual de una serie da pagos anticipados, el número de cuotas y el valor de cada cuota, estamos en el segundo caso.

13.4.1 Tasa de una anualidad anticipada en función del monto

Para calcular la tasa, la **i** lo despejamos de la fórmula del monto de una anualidad anticipada, de la siguiente manera:

$$S = \frac{nR[2 + i(n+1)]}{2}$$

$$2 + i\,(n - 1) = \frac{2S}{nR}$$

$$i\,(n + 1) = \frac{2S}{nR} - 2$$

$$i = \frac{2S}{nR(n+1)} - \frac{2}{n+1}$$

El proceso es el mismo que es el mismo que en las anualidades ordinarias con la diferencia de haber insertado el signo (+) en la fórmula, de manera que cuando el problema pide calcular la tasa en la misma unidad de tiempo que el periodo de cada pago. (Ejemplo se pide calcular la tasa mensual cuando los pagos también son mensuales), utilizamos la primera fórmula y; cuando se tiene que calcular la tasa en una unidad de tiempo mayor al periodo de cada pago, insertamos el elemento **m.** (Ejemplo se pide calcular la tasa anual cuando los pagos son mensuales).

$$i = \frac{2mS}{nR(n+1)} - \frac{2m}{n+1}$$

Ejemplo 13.9.- Calcular la tasa mensual de interés simple a la que estuvieron colocados 10 depósitos mensuales anticipados de S/.1,800 cada uno para capitalizar S/.20,870.

$$i = \frac{2x20{,}870}{10x1{,}800(10+1)} - \frac{2}{10+1}$$

$$i = \frac{41{,}940}{198{,}000} - \frac{2}{11}$$

$$i = 0.03$$

$$i = 3\% \text{ mensual}$$

Ejemplo. 13.10. Calcular la tasa trimestral de interés simple, a la que se colocaron una serie de depósitos anticipados de S/.2,000 mensuales, durante dos años, para formar un monto de S/.62,000 i = $\frac{2x12x62{,}000}{24x2{,}000(24+1)}$ - $\frac{2x12}{24+1}$

i = $\frac{1'488{,}000}{1'200{,}000}$ - $\frac{24}{25}$

i = 1.24 - 0.96

i = 0.28

i = 28% annual

i = 7% Trimestral

Otra forma de solucionar el problema para obtener directamente la tasa trimestral, es la siguiente:

i = $\frac{2x3x62{,}000}{24x2{,}000(24+1)}$ - $\frac{2x3}{24+1}$

i = $\frac{372{,}000}{1'200{,}000}$ - $\frac{6}{25}$

i = 0.31 - 0.24

i = 0.07

i = 7% trimestral

13.4.2 Tasa de una anualidad anticipada en función del valor actual

En este caso la tasa **i,** lo despejamos de la fórmula del valor actual de una anualidad anticipada.

$$P = \frac{nR[2+i(n+1)]}{2(1+i.n)}$$

2P (1 + in) = nR$[2+i(n+1)]$

2P + 2Pin = 2nR + nRi(n+1)

2Pin – nRi(n+1) = 2nR – 2P

i$[2Pn-nR(n+1)]$ = 2(nR – P)

$$i = \frac{2(nR-P)}{n[2P-R(n+1)]}$$

La fórmula obtenida nos permite calcular la tasa de interés simple, en la misma unidad de tiempo en la que está dada la cuota.

Cuando se tiene que calcular la tasa de interés en una unidad de tiempo mayor al periodo de la **R,** aplicamos la siguiente fórmula:

$$i = \frac{2m(nR - P)}{n[2P - R(n+1)]}$$

Ejemplo 13.11.- El precio de contado de un artefacto electrodoméstico es de S/.4,625 y se compra el crédito hoy, con una cuota inicial de S/.500 y se suscriben 9 letras con vencimiento mensual de S/.500 cada una. Si el financiamiento es a interés simple, se requiere conocer el valor de la tasa mensual que se aplicó en esta operación comercial.

$$i = \frac{2(10x500 - 4{,}625)}{10[2x4{,}625 - 500(10+1)]}$$

$$i = \frac{750}{37{,}500}$$

i = 0.02

i = 2 % mensual

Ejemplo 13.12 Un comerciante deposita en una entidad bancaria un capital de S/.8,500, dicha entidad le otorga un anticipo de S/.1,000 y convienen en liquidar la cuenta con 9 cuotas bimestrales mas de S/.1,000 cada una. ¿Cuál será la tasa de interés simple anual que otorga el banco?

$$i = \frac{2x6(10x1{,}800 - 8{,}500)}{10[2x8{,}500 - 1{,}000(10+1)]}$$

$$i = \frac{18{,}000}{60{,}000}$$

i = 0.30

i = 30% anual

13.5 Listado de fórmulas

FÓRMULA	OBTIENE
$S = \dfrac{nR\left[2+i.(n+1)\right]}{2}$ $S = \dfrac{nR\left[2m+i(n+1)\right]}{2m}$	Monto de una anualidad anticipada
$P = \dfrac{nR\left[2+i(n+1)\right]}{2(1+i.n)}$ $P = \dfrac{nR\left[2m+i(n+1)\right]}{2.(m+i.n)}$	Valor actual de una anualidad anticipada
$R = \dfrac{2S}{n\left[2+i.(n+1)\right]}$ $R = \dfrac{2mS}{n\left[2m+i.(n+1)\right]}$	Renta de una anualidad anticipada en función del monto.
$R = \dfrac{2P(1+i.n)}{n\left[2+i.(n+1)\right]}$ $R = \dfrac{2P(m+i.n)}{n\left[2m+i.(n+1)\right]}$	Renta de una anualidad anticipada en función del valor actual
$i = \dfrac{2S}{nR(n+1)} - \dfrac{2}{n+1}$ $i = \dfrac{2mS}{nR(n+1)} - \dfrac{2m}{n+1}$	Tasa de una anualidad anticipada en función del monto
$i = \dfrac{2(nR-P)}{n\left[2P-R(n+1)\right]}$ $i = \dfrac{2m(nR-P)}{n\left[2P-R(n+1)\right]}$	Tasa de una anualidad anticipada en función del valor actual

13.6. Problemas propuestos

1. ¿Qué monto se habrá acumulado en una cuenta de ahorros, en un periodo de un año y 4 meses si a inicio de cada mes se deposita S/1,200 a una tasa de interés simple del 2.5% mensual?
2. Un comerciante apertura una cuenta en un banco con S/3,500 y continúa depositando cada 3 meses durante un año. y 6 meses ¿Cuánto se habrá acumulado durante el periodo a una tasa de interés simple de 5% trimestral?
3. El alquiler de un local comercial es de S/.3,800, cuyo pago debe efectuarse a inicio de cada mes. El propietario del local le propone al arrendatario cancelar el valor de un año con un solo pago a la firma del contrato, actualizando las cuotas a una tasa de interés simple del 1.8% mensual, de aceptar el arrendatario cuanto tendrá que pagar?
4. ¿Cuál será el precio de contado de un artefacto eléctrico, que se vende al crédito con 18 cuotas mensuales anticipadas de S/.800 cada una, aplicándose una tasa de recargo del 2% mensual?
5. Se requiere acumular en un periodo de 18 meses la cantidad de S/.18,000 con depósitos anticipados bimestrales, para la compra de una camioneta. Se desea determinar el valor del depósito en una cuenta, en la que se percibe el 18% de interés simple anual.
6. En el plazo de un año se acumuló un monto de S/.7,920, con depósitos anticipados bimestrales colocados al 24% anual de interés simple. ¿Cuánto se depositó al inicio de cada bimestre?
7. Un préstamo de S/.15,000, debe cancelarse en el plazo de un año con pagos anticipados mensuales, si la tasa de interés simple mensual es del 2%. ¿Cuál será el valor de cada pago?
8. Comercial del norte vende al crédito refrigeradoras, cuyo valor al contado es de S/.2,000 por unidad, con cuotas anticipadas mensuales durante 6 meses, si la tasa de recargo es del 18% anual. ¿Cuál será el valor de cada cuota?

9. Calcular la tasa trimestral de interés simple, a la que se colocaron una serie de depósitos anticipados trimestrales de de S/.1,500 cada uno, durante 18 meses, para formar un monto de S/.10,260.
10. La ULADECH Católica, con el propósito de dar facilidades a sus alumnos de la Facultad de de Ciencias Contables, ofrece paquetes de estudios por dos ciclos al año incluyendo 8 pensiones de enseñanza y dos matrículas por un valor de S/.1,472.60, pagaderos en 12 meses con cuotas anticipadas mensuales de S/.131.94 cada una. Los padres de familia desean saber el valor de la tasa de interés simple mensual del financiamiento, para comparar con otras alternativas.

C A P Í T U L O XIV

14. ANUALIDADES DIFERIDAS

En las operaciones comerciales y financieras los compromisos de pago no siempre se realizan a su vencimiento, pudiendo postergarse por acuerdo entre las partes contratantes; es así que cuando los pagos de las rentas empiezan después de transcurrido más de un periodo de iniciada la anualidad, estamos ante el caso de una anualidad diferida.

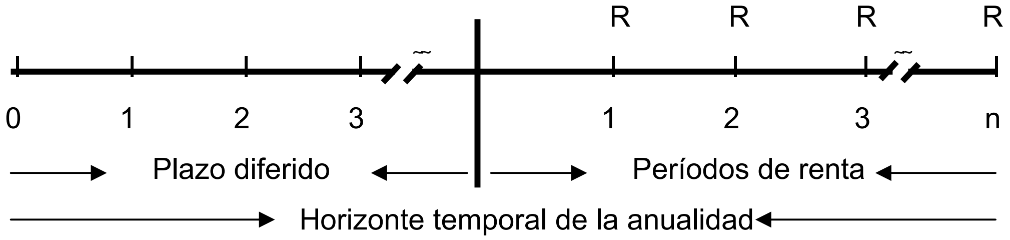
Una anualidad diferida es aquella que, por acuerdo entre las partes contratantes, el primer pago se realiza después de transcurrido un cierto número de períodos de iniciada la vigencia de la anualidad. Es decir, que la fecha inicial de la anualidad no coincide con la fecha del primer pago; en estos casos se dice que la anualidad es diferida.

El tiempo transcurrido entre la fecha de inicio de la anualidad y la fecha del primer pago se denomina Intervalo de Aplazamiento, período de gracia o plazo diferido.

Durante el intervalo de aplazamiento, que es el plazo que media entre el inicio de la anualidad y el primer pago, se utiliza como unidad el tiempo que corresponde a un período de renta.

Consideramos necesario indicar que las anualidades diferidas en el corto plazo son poco usuales, generalmente su aplicación abarca las operaciones de largo plazo, cuando los créditos son de gran envergadura requieren de periodos de gracia.

Fig. 14.1



En el gráfico visualizamos el horizonte temporal fraccionado en dos partes, el plazo diferido y el periodo de renta y a cada uno lo simbolizamos de la siguiente manera:

t = Plazo diferido

k = Periodo de renta

Para determinar el valor del plazo diferido hay que tener presente, que es igual número de periodos contenidos en dicho plazo disminuido en uno (ejemplo: los pagos empiezan a efectuarse a partir del cuarto trimestre, t = 3)

Para determinar el valor de k, se tendrá presente que: al número de periodos de renta se le aumentará en uno (ejemplo se depositaran a partir del cuarto trimestre por espacio de cuatro trimestres más, k = 5).

14.1. Monto de una anualidad diferida a interés simple

Para el cálculo de los valores de las anualidades diferidas no se requieren nuevas fórmulas, se utilizan según sea el caso las descritas en los capítulos anteriores, correspondientes a las anualidades, tanto vencidas como anticipadas.

14.1.1 Monto de una anualidad ordinaria diferida a interés simple

Para determinar el valor del monto, se procede de la misma manera que en una anualidad normal teniendo cuidado en identificar el valor de **k.**

Las fórmulas que se aplican según el caso son:

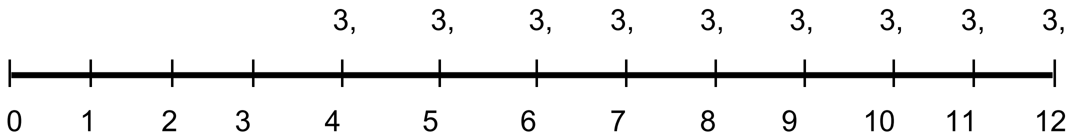
$$S = \frac{kR[2 + i.(k-1)]}{2}$$

$$S = \frac{kR[2m + i.(k-1)]}{2m}$$

Ejemplo 14.1 Calcular el valor futuro de una anualidad ordinaria mensual de S/.3,000 cada uno, si el primer pago se efectúa al término del cuarto mes y se continúa por los meses restantes hasta cumplir el años, a la tasa de interés simple del 18% anual.

En este caso se presentan 9 cuotas ordinarias mensuales, dado a que el periodo de renta **k** es igual al periodo temporal más uno. Es decir del cuarto mes hasta el final del año hay 8 meses al que le aumentamos uno.

Fig. 14.2



$$S = \frac{kR[2m + i.(k-1)]}{2m}$$

$$S = \frac{9x3{,}000[2x12 - 0.18(9-1)]}{2x12}$$

$$S = 28{,}620$$

14.1.2 Monto de una anualidad anticipada diferida a interés simple

En las fórmulas cambia (k + 1) por (k - 1)

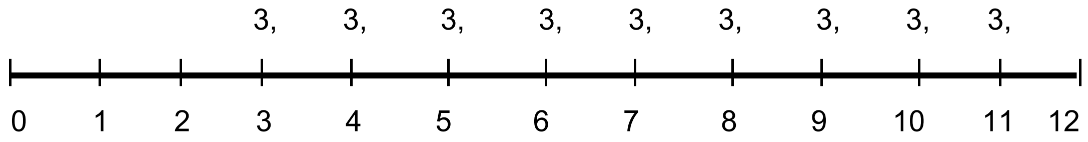
$$S = \frac{kR[2 + i.(k+1)]}{2}$$

$$S = \frac{kR[2m + i.(k+1)]}{2m}$$

Ejemplo 14.2 Calcular el valor futuro de una anualidad anticipada mensual de S/.3,000 cada uno, si el primer pago se efectúa dentro de cuatro meses y se continúa por los meses restantes hasta cumplir el años, a la tasa de interés simple del 18% anual.

En este caso las cuotas se presentan al inicio de cada mes, como se visualizan en el gráfico, luego aplicamos la fórmula del monto de anualidades anticipadas a interés simple y solucionamos el problema.

Fig. 14.3



$$S = \frac{kR[2m + i.(k+1)]}{2m}$$

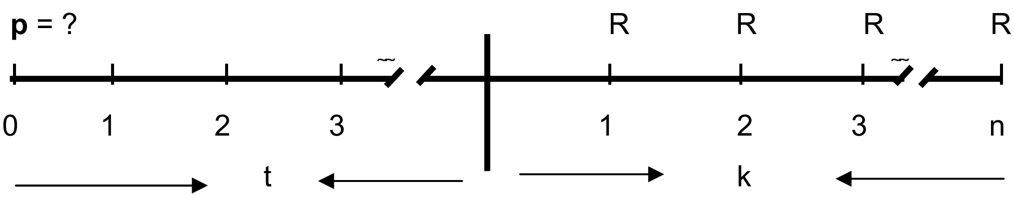
$$S = \frac{9x3{,}000[2x12 - 0.18(9+1)]}{2x12}$$

$$S = 29{,}025$$

14.2 Valor Actual de una anualidad diferida a interés simple

Conocido el valor futuro de una anualidad diferida, la tasa de interés y el número de períodos, determinar el valor actual. Para determinar el valor actual en este tipo de problemas se tendrá en cuenta dos momentos, el periodo de renta y el plazo diferido y esto se visualiza en el gráfico siguiente:

Fig. 14.4



14.2.1 Valor actual de una anualidad ordinaria diferida a interés simple

Para solucionar problemas de este tipo aplicaremos las fórmulas siguientes según el caso:

$$P = \frac{kR[2 + i(k-1)]}{2(1 + i.n)}\left(\frac{1}{1 + i.t}\right)$$

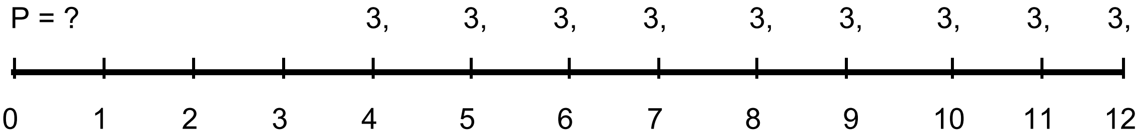
$$P = \frac{kR[2m + i(k-1)]}{2.(m + i.k)}\left[\frac{m}{m + i.t}\right]$$

Ejemplo 14.3 Calcular el valor actual de una anualidad ordinaria mensual de S/.3,000 cada uno, si el primer pago se efectúa dentro de cuatro meses y se continúa por los meses restantes hasta cumplir el años, a la tasa de interés simple del 18% anual.

Para solucionar el problema utilizamos la fórmula del valor actual de una anualidad ordinaria para el periodo de renta y el factor simple de actualización a interés simple para el plazo diferido con la intervención de **m**.

El valor del plazo diferido, es igual al periodo temporal disminuido en uno, en este caso, **t** = 4 – 1

Fig. 14.5



$$P = \frac{kR[2m + i.(k-1)]}{2.(m + i.k)}\left[\frac{m}{m + i.t}\right]$$

$$P = \frac{9x3,000[2x12 + 0.18(9-1)]}{2.(12 + 0.18x9)}\left[\frac{12}{12 + 0.18x3}\right]$$

P = 25,215.86 (0.956937799)

P = 24,130.00

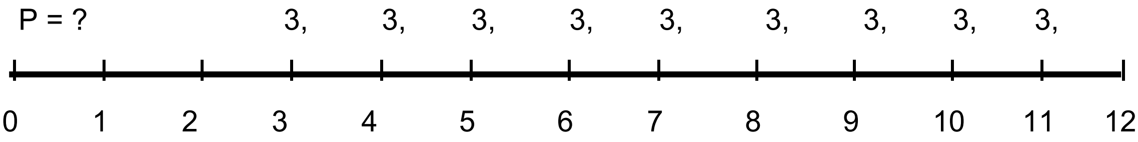
14.2.2 Valor Actual de una anualidad anticipada diferida a interés simple

Las fórmulas son las utilizadas en las anualidades ordinarias disminuyendo en un periodo el valor del plazo diferido con respecto a la ordinaria.

Ejemplo 14.4 Calcular el valor actual de una anualidad anticipada mensual de S/.3,000 cada uno, si el primer pago se efectúa al inicio del cuarto mes y se continúa por los meses restantes hasta cumplir el año, a la tasa de interés simple del 18% anual.

Para solucionar el problema utilizamos la fórmula del valor actual de una anualidad ordinaria para el periodo de renta y el factor simple de actualización a interés simple para el plazo diferido, con aplicación del criterio de disminuir una vez más en una unidad el plazo diferido (t – 1).

Fig. 14.6



$$P = \frac{kR[2m + i(k-1)]}{2.(m + i.k)}\left[\frac{m}{m + i.t}\right]$$

$$P = \frac{9x3{,}000[2x12 + 0.18.(9-1)]}{2.(12 + 0.18x9)}\left[\frac{12}{12 + 0.18x2}\right]$$

$$P = 24{,}481.42$$

14.3 Renta de una anualidad diferida a interés simple

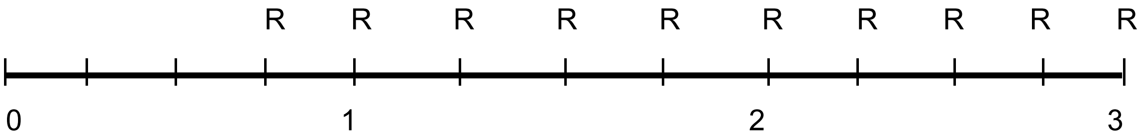
Consiste en calcular el valor de la serie uniforme de pagos de una anualidad diferida, y al igual que en las anualidades no diferidas se presentan dos casos.

14.3.1 Renta de una anualidad ordinaria diferida en función del monto

Consiste en determinar el valor de cada pago vencido de una anualidad diferida y esto se obtiene con la fórmula de su similar ordinaria y no diferida.

Ejemplo 14.5 Al término de un horizonte temporal de 3 años se requiere acumular S/.24,050, con cuotas trimestrales vencidas, cuya primera cuota se efectúa al término del tercer trimestre, en un banco que paga una tasa del 4.5%. de interés simple trimestral ¿Cuál será el valor de cada cuota?

Fig. 13.7



$$R = \frac{2S}{n[2+i.(n-1)]}$$

$$R = \frac{2x24{,}050}{10[2+0.045.(10-1)]}$$

$$R = \frac{48{,}100}{24.05}$$

R = 2,000

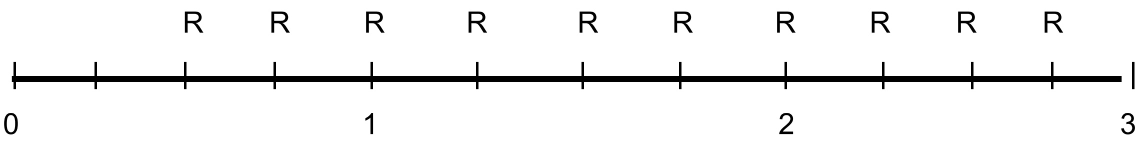
14.3.2 Renta de una anualidad anticipada diferida en función del monto

Consiste en determinar el valor de cada pago anticipado de una anualidad diferida y esto se obtiene con la fórmula de su similar anticipada y no diferida.

$$R = \frac{2S}{n[2+i.(n+1)]}$$

Ejemplo 14.6 Al término de un horizonte temporal de 3 años se requiere acumular S/.24,950, con cuotas trimestrales anticipadas, cuya primera cuota se efectúa al inicio del tercer trimestre, en un banco que paga una tasa del 4.5%. de interés simple trimestral ¿Cuál será el valor de cada cuota?

Fig. 14.8



$$R = \frac{2x24,950}{10[2+0.045.(10+1)]}$$

$$R = \frac{49,900}{24.95}$$

$$R = 2,000$$

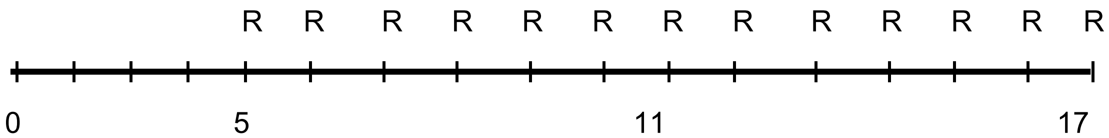
14.3.3 Renta de una anualidad ordinaria diferida en función del Valor Actual

Consiste en calcular la renta uniforme diferida ordinaria cuando se conoce el valor actual, la tasa de interés y el tiempo de una anualidad, que puede ser ordinaria o anticipada.

Ejemplo 14.7 Un ahorrista deposita S/.10,000 en un banco que paga el 18% de interés simple anual, a fin de que dentro de 5 meses empiece a recibir una renta ordinaria mensual durante un año más, Hallar la renta mensual a recibir.

Para dar solución al problema, analizamos los períodos, el plazo diferido y el periodo de renta, luego capitalizamos o trasladamos el depósito hasta un periodo antes de la primera renta en este caso al cuarto mes, utilizando el factor simple de capitalización, y por el resto del período utilizaremos la fórmula correspondiente al cálculo de la renta ordinaria en función al valor actual por 13 meses

Fig. 14.9



$$R = P\left(1+\frac{i.t}{m}\right)\frac{2(m+i.k)}{k[2m+i.(k-1)]}$$

$$R = 10,000\left(1+\frac{0.18x4}{12}\right)\frac{2(12+0.18x13)}{13[12+0.18.(13-1)]}$$

$$R = 10,600 \times 1.06\,\frac{28.68}{184.08}$$

$$R = 1651.50$$

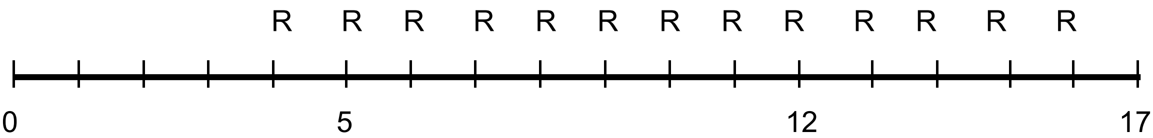
14.3.4 Renta de una anualidad anticipada diferida en función del valor actual

Consiste en determinar el valor de cada pago anticipado, dado un valor actual, una tasa de interés un plazo diferido y un periodo de renta.

Ejemplo 14.8 Un ahorrista deposita S/.10,000 en un banco que paga el 18% de interés simple anual, a fin de que al inicio del quinto mes, empiece a recibir una renta anticipada mensual durante un año más. Hallar la renta mensual a recibir.

Para dar solución al problema observamos que el plazo diferido a disminuido en un periodo con respecto a la renta ordinaria y todo lo demás permanece constante. En consecuencia el valor de **t** disminuye en una unidad y tenemos:

Fig. 14.10



$$R = P\left(1+\frac{i.t}{m}\right)\frac{2(m+i.k)}{k[2m+i.(k-1)]}$$

$$R = 10{,}000\left(1+\frac{0.18x3}{12}\right)\frac{2.(12+0.18x13)}{13[12+0.18.(13-1)]}$$

$$R = 10{,}600 \text{ x } 1.045\ \frac{28.68}{184.08}$$

$$R = 1628.13$$

14.4 Listado de fórmulas

FÓRMULA	OBTIENE
$S = \dfrac{kR[2+i.(k-1)]}{2}$ $S = \dfrac{kR[2m+i.(k-1)]}{2m}$	Monto de una anualidad ordinaria diferida
$S = \dfrac{kR[2+i.(k+1)]}{2}$ $S = \dfrac{kR[2m+i(k+1)]}{2m}$	Monto de una anualidad anticipada diferida
$P = \dfrac{kR[2+i(k-1)]}{2(1+i.n)}\left(\dfrac{1}{1+i.t}\right)$ $P = \dfrac{kR[2m+i(k-1)]}{2.(m+i.k)}\left[\dfrac{m}{m+i.t}\right]$	Valor actual de una anualidad ordinaria diferida
$R = \dfrac{2S}{k[2+i.(k-1)]}$ $R = \dfrac{2mS}{k[2m+i.(k-1)]}$	Renta de una anualidad ordinaria en función del monto.
$R = \dfrac{2S}{k[2+i.(k-1)]}$ $R = \dfrac{2mS}{k[2m+i.(k-1)]}$	Renta de una anualidad anticipada en función del monto.
$R = P\,(1+i.t)\,\dfrac{2(+i.k)}{k[2+i.(k-1)]}$ $R = P\left(1+\dfrac{i.t}{m}\right)\dfrac{2(m+i.k)}{k[2m+i.(k-1)]}$	Renta de una anualidad ordinaria en función del valor actual

14.5 Problemas propuestos

1. Calcular el valor futuro de una anualidad ordinaria trimestral de S/.4,000 cada uno, si el primer pago se efectúa al término de seis meses y se continúa por espacio de tres años, a la tasa de interés simple del 5% trimestral.
2. Calcular el valor futuro de una anualidad anticipada bimestral de S/.3,500 cada uno, si el primer pago se efectúa dentro de 8 meses y se continúa por espacio de dos años y 10 meses, a la tasa de interés simple del 24% anual.
3. Calcular el valor actual de una anualidad ordinaria mensual de S/.2,500 cada uno, si el primer pago se efectúa dentro de cinco meses y se continúa por espacio de año y medio, a la tasa de interés simple del 18% anual.
4. Calcular el valor actual de una anualidad anticipada semestral de S/.6,000 cada uno, si el primer pago se efectúa al inicio del séptimo mes y se continúa pagando por espacio de 4 años y 9 meses, a la tasa de interés simple del 12% semestral.
5. Con el propósito de acumular un monto de S/.25,000 para emprender un negocio al término de 2 años, con cuotas mensuales vencidas, cuya primera cuota debe efectuarse al término del quinto mes, en un banco que paga una tasa del 4.5%. de interés simple trimestral. ¿Cuál será el valor de cada cuota?
6. Al término de un horizonte temporal de 4 años se requiere acumular S/.44,950, con cuotas mensuales anticipadas, cuya primera cuota se efectúa al inicio del octavo trimestre, en un banco que paga una tasa del 5%. de interés simple trimestral ¿Cuál será el valor de cada cuota?
7. Un comerciante invierte S/.24,000 en un negocio cuyo rendimiento anual se estima en el 30%, cuyo rendimiento mensual e empezará a obtener ordinariamente a partir de quinto mes por espacio de un año más, Hallar la renta mensual a recibir.
8. Un persona otorga un préstamo por S/.30,000 con un periodo de gracia de seis meses a una tasa de interés simple del 30 % anual. El préstamo debe revertirse con pagos anticipados mensuales por espacio de un año y medio más, Hallar la renta mensual a recibir.

C A P Í T U L O XV

15. AMORTIZACIONES

Todo empresario, administrador de negocios o específicamente todo ente económico se podrá ver abocado en algún momento a conseguir los fondos necesarios para financiar las operaciones corrientes del negocio que gestiona, es decir debe tomar decisiones de financiación.

En el proceso de financiamiento se puede optar por varias formas y fuentes que más convengan a la institución, tales como la generación interna de fondos, a partir de las operaciones normales del negocio, la obtención de préstamos, o el aumento del capital a través de nuevas aportaciones o venta de acciones.

En el presente capítulo se pretende ilustrar al lector sobre las principales formas de financiación utilizando pasivos, así como sobre el manejo de dichas fuentes, teniendo como objetivo principal enseñar a calcular el costo efectivo de la financiación buscando con ello entregar al estudiante una herramienta financiera básica para la toma de decisiones.

15.1 El préstamo

El préstamo es una operación por la cual una entidad financiera pone a disposición del cliente una cantidad determinada de dinero mediante un contrato. En un préstamo el usuario adquiere una obligación de revertir el dinero en un plazo de tiempo establecido y de pagar los intereses y comisiones que dicha operación genere.

Se dice también que el préstamo es la operación financiera de prestación única y contraprestación múltiple. En ella, la entidad financiera o prestamista entrega una cantidad de dinero al cliente o prestatario que lo recibe y se compromete a devolver el capital prestado en el periodo o periodos previamente establecidos los mismos que figuran en el contrato y a pagar los intereses y gastos que esta irrogue.

15.2 El crédito

El crédito es una operación mediante el cual una entidad financiera pone a disposición del cliente una cierta cantidad de dinero y durante un periodo determinado.

En un crédito el cliente administra el uso del dinero, pudiendo retirar todo o parte del valor del crédito, de acuerdo a sus requerimientos de liquidez y devolverlo de la manera que este considere pertinente, con un solo pago o por partes, tanto el principal como los intereses y comisiones que se generen a consecuencia de la mencionada operación financiera.

En una operación de crédito el usuario solo paga intereses sobre el capital utilizado y el resto del dinero, está a disposición del cliente, pero si no se ha hecho uso de este, no genera ninguna obligación por concepto de intereses..

Vencido el plazo del crédito está permitido la renegociar o ampliación del periodo de vencimiento.

La razón de ser del crédito, es cubrir los gastos corrientes o extraordinarios, en momentos de falta de liquidez. El crédito se puede administrar mediante una cuenta corriente o una tarjeta de crédito.

Es frecuente confundir los términos crédito y préstamo, pero de acuerdo a las definiciones son notoriamente diferentes y para mayor claridad presentamos las diferencias.

15.3 Diferencias entre crédito y préstamo

A menudo se confunden los términos mencionados, utilizándose sin distinción para referirnos a uno y otro término. Lo cierto es que son diferentes, por lo que presentamos los siguientes conceptos o diferencias:

- En el préstamo la entidad financiera pone a disposición del cliente una cantidad fija y este adquiere la obligación de devolver dicha cantidad de devolver dicha cantidad más los intereses y comisiones en el plazo o plazos pactados.
- En el crédito la entidad financiera pone a disposición del cliente, en una cuenta de crédito, una cantidad de dinero de acuerdo a la calificación y solvencia del mismo para hacer uso de de ella de la manera que crea conveniente.
- El préstamo suele ser una operación de mediano o largo plazo y la amortización se realiza mediante cuotas periódicas, que pueden ser mensuales trimestrales o de cualquier otra duración.
- Por lo general los préstamos requieren de garantías personales (avales) o garantías reales (prendas no fungibles o hipotecas).
- En el préstamo, la cantidad concedida se carga en la cuenta del cliente y esta genera intereses desde el inicio de la operación aunque el titular de la cuenta aun no haga uso del dinero.

15.4 Amortización del préstamo

Amortización es el proceso financiero mediante el cual se extingue, gradualmente, una deuda por medio de pagos periódicos, que pueden ser de igual o diferente valor.

En las amortizaciones de una deuda, cada pago o cuota que se entrega incluye el interés del periodo y parte del principal, que permite reducir el importe de la deuda.

De acuerdo a la definición de la amortización presentada líneas arriba, entendemos que amortizar es pagar gradualmente una deuda y con varias cuotas. Pero dados los diferentes casos que se presentan en la liquidación de una deuda surgen otras definiciones como la siguiente:
Amortización es el pago parcial o total del principal de un préstamo. Esto implica que cancelar una deuda al término de su vencimiento con un solo pago también es amortización
En consecuencia, según la modalidad que se opte para cancelar una deuda, es posible admitir diversas interpretaciones de amortización, y esto implica, diferentes formas de cancelar una deuda, es decir la devolución del capital inicial llamado también el principal.

Consideramos importante presentar un ejemplo de las variadas situaciones que pueden estudiarse en la Matemática Financiera. La forma como se resuelve el siguiente modelo, es sólo una de las variadas soluciones con las que se puede dar respuesta, ya que en la Matemática Financiera existen diversas formar de dar solución a un problema, llegando siempre a la misma respuesta

15.5 Sistemas de amortización

Existe un sinnúmero de formas de amortizar un préstamo debido a que deudores y acreedores pueden pactar libremente las condiciones, entre esas formas se tienen:

15.5.1 Un pago único al final del periodo del préstamo

En este primer caso durante el periodo se van generando los intereses pero no se hace ningún pago hasta el final del plazo otorgado para el préstamo, a esta modalidad se le conoce como amortización con carencia o pago diferido.

Ejemplo 15.1: Obtenemos un préstamo de S/.100,000 a una tasa de interés del 9% trimestral para ser cancelado en el periodo de un año con un pago único.
Los intereses se van generando de acuerdo a los periodos convenidos y estos se suman al capital al final del horizonte temporal del préstamo, para ser cancelados con un solo pago.

El interés por periodo es:

$$I = P.i$$

$$I = 100{,}000 \times 0.09$$

$$I = 9{,}000$$

La cuota a pagar al final del periodo de deuda es equivalente al monto:

$$R_t = S$$

$$R_t = P(1 + i\ .\ n)$$

El horizonte temporal del préstamo es de cuatro trimestres, con un solo pago al final del cuarto trimestre

$$R_4 = 100{,}000\ (1 + 0.09 \times 4)$$

$$R_4 = 136{,}000$$

Cuadro 15.1

CUADRO DE AMORTIZACIÓNES A LA DEUDA

n	R	I	A	P
0				100,000
1	0	9,000	0	100,000
2	0	9,000	0	100,000
3	0	9,000	0	100,000
4	136,000	9,000	100,000	0,00

15.5.2 Préstamo con pagos periódicos de los interese y un reembolso único del principal al final del plazo.

Este tipo de amortización se le conoce como el método americano y se caracteriza por lo siguiente:

- Sólo se realiza una amortización de capital total al vencimiento del préstamo.
- En las cuotas periódicas durante la vigencia del préstamo tan sólo se pagan los intereses del periodo.

Los intereses devengados por periodo, que a su vez constituyen las cuotas periódicas hasta el periodo (n-1) están dadas por:

$I = P\,i\,n$

I = Interés del periodo

P = Capital inicial, préstamo o principal

i = Tasa de interés

n = Número de periodos o tiempo

S = Monto o valor futuro del capital

t = Periodo específico

La última cuota de pago será igual al valor del préstamo más el interés devengado en el último periodo.

$$S = P + I$$
$$S = P + p\,i\,t$$
$$S = p\,(1 + i.t)$$

Luego $R_t = S_t$

Ejemplo 15.2: Un banco concede un préstamo de S/.300,000 al 15% de interés simple anual reembolsable en un plazo de 5 años. Formular el cuadro de amortización, liquidando la deuda con un pago único al final del plazo.

Para estructurar el cuadro, además de los ya conocidos se emplearán los siguientes símbolos:

R = Renta o cuota de pago por periodo
A = Amortización del principal o de la deuda

$$A_t = P$$
$$A_5 = 300{,}000$$

$$I = 300{,}000 \times 0.15 \times 1$$
$$I = 45{,}000$$

Pago al final del plazo del préstamo:

$$R_5 = 300{,}000\,(1 + 0.15 \times 1)$$
$$R_5 = 345{,}000$$

Cuadro 15.2

CUADRO DE AMORTIZACIÓNES A LA DEUDA

n	R	I	A	P
0				300,000
1	45,000	45,000	0	300,000
2	45,000	45,000	0	300,000
3	45,000	45,000	0	300,000
4	45,000	45,000	0	300,000
5	345,000	45,000	300,000	0,00

15.5.3 Amortización del capital con cuotas constantes e intereses sobre saldos

En este caso las cuotas de amortización al principal son constantes, pero las cuotas de pago por periodo son decrecientes y como el interés se obtiene sobre el saldo del principal obligatoriamente también estos son decrecientes. Cuando los intereses se obtienen sobre el saldo, se denominan intereses al rebatir.

Para ilustrar este sistema de amortización hacemos uso de los datos del problema planteado en el caso anterior.

Ejemplo 15.3: Un banco concede un préstamo de S/.300,000 al 15% de interés anual reembolsable en un plazo de 5 años. Formular el cuadro de amortización, de acuerdo al sistema propuesto, con cuotas de pagos periódicos decrecientes y cuotas de amortización constantes.

$$A = \frac{P}{n}$$

$$A = \frac{300,000}{5}$$

$$A = 60,000$$

El interés por periodo se determina sobre el saldo del principal, tal es así que para el primer periodo el interés es:

$I = P_1.i$

$I = 300{,}000 \times 0.15$

$I = 45{,}000$

$R = I + A$

$R_1 = 45{,}000 + 60{,}000$

$R_1 = 105{,}000$

$P_1 = P - A_1$

$P_1 = 300{,}000 - 60{,}000$

$P_1 = 240{,}000$

Cuadro 15.3

CUADRO DE AMORTIZACIONES A LA DEUDA

n	R	I	A	P
0				300,000
1	105,000	45,000	60,000	240,000
2	96,000	36,000	60,000	180,000
3	87,000	27,000	60,000	120,000
4	78,000	18,000	60,000	60,000
5	69,000	9,000	60,000	0,000

Para una mayor ilustración del caso presentamos un segundo ejemplo:

Ejemplo 15.4 Se obtiene un préstamo bancario por S/.30,000 al 18% de interés simple anual al rebatir. Si el préstamo se debe liquidar con pagos trimestrales ordinarios decrecientes y cuotas de amortización a la deuda constante, en un periodo de 2 años, calcular la renta periódica a pagar y formular el cuadro de amortizaciones.

Cuadro 15.4

N	R	I	A	P
0				30,000.00
1	5,100.00	1,350.00	3,750.00	26,750.00
2	4,931.25	1,181.25	3,750.00	22,500.00
3	4,762.50	1,015.50	3,750.00	18,750.00
4	4,593.75	843.75	3,750.00	11,250.00
5	4,425.00	675.00	3,750.00	7,500.00
6	4.256.25	506.25	3,750.00	3,750.00
7	4,087.50	337.50	3,750.00	0.00
8	3,918.75	168.75	3,750.00	
	36,075.00	6,075.00		

Promedio de pago trimestral = $\dfrac{36{,}075}{8}$ = 4,509.38

15.5.4 Amortización con cuotas ordinarias constantes

La fórmula para el cálculo de la renta periódica es la siguiente:

$$R = \frac{2P(1+i.n)}{n\left[2+i.(n-1)\right]}$$

Ejemplo 15.5 Se obtiene un préstamo bancario por S/.30,000 al 18% de interés simple anual, para ser revertido con pagos trimestrales ordinarios en un periodo de dos años. Calcular la renta periódica a pagar y formular el cuadro de amortizaciones.

$$R = \frac{2x30{,}000(1+0.045x8)}{8\left[2+0.045(8-1)\right]}$$

$$R = \frac{81{,}600}{18.52}$$

$$R = 4{,}406.05$$

El resultado es la renta a pagar al final de cada trimestre, pero al formular el cuadro de amortizaciones existe un pequeño desajuste, dado a que pagadas todas las cuotas queda un saldo por pagar de S/.37.88, debido a que no se cumple el supuesto que en todas las cuotas se amortiza el principal, puesto que este queda saldado en el periodo 7, en consecuencia el saldo por pagar lo cargamos a la última cuota.

Cuadro 15.5

CUADRO DE AMORTIZACIONES A LA DEUDA

n	R	I	Pago Intereses	A	P
0					30,000.00
1	4,406.05	1,350.00		4,406.05	25,593.95
2	4,406.05	1,151.73		4,406.05	21,187.90
3	4,406.05	953.46		4,406.05	16,781.85
4	4,406.05	755.18		4,406.05	12,375.80
5	4,406.05	556.91		4,406.05	7,969.75
6	4,406.05	358.64		4,406.05	3,563.70
7	4,406.05	160.37	842.35	3,563.70	0.00
8	4,443.93	0.00	4,443.93	0.00	
	35,286.28	5,286.28	5,286.28		

Dado a que la amortización del préstamo no se da en todos los periodos y la última cuota no alcanza para pagar los intereses devengados durante el horizonte temporal, modificamos la fórmula.

$$R = \frac{2P(1+i.X)}{2.n + i.X.(X-1)}$$

X = Número de cuotas que incluyen el pago a la deuda, en este caso son 7

$$R = \frac{2x30,000(1+0.045x7)}{2x8 + 0.045x7x6}$$

$$R = \frac{78,900}{17.89}$$

R = 4,410.28

Con la nueva cuota de pago trimestral formulamos el cuadro de amortizaciones.

Cuadro 15.6

CUADRO DE AMORTIZACIONES A LA DEUDA

n	R	I	Pago Intereses	A	P
0					30,000.00
1	4,410.28	1,350.00		4,410.28	25,589.72
2	4,410.28	1,151.54		4,410.28	21,179.44
3	4,410.28	953.07		4,410.28	16,769.16
4	4,410.28	754.61		4,410.28	12,358.88
5	4,410.28	556.15		4,410.28	7,948.60
6	4,410.28	357.69		4,410.28	3,538.32
7	4,410.28	159.22	871.96	3,538.32	0.00
8	4,410.28	0.00	4,410.28	0.00	
	35,286.28	5,282.29	5,282.24		

Existe un pequeño desajuste de 0.05 y esto es por el redondeo de los decimales.

15.6. Problemas propuestos

1. Un comerciante obtiene un préstamo de S/.200,000 a una tasa de interés simple del 5% trimestral para ser cancelado en el plazo de 2 años, con un solo pago al final del periodo, calcular el valor de la amortización final y formular el cuadro.

2. Un banco otorga un préstamo S/.30,000 para ser cancelado en el periodo de un año y seis meses, con pagos de los intereses en forma trimestral a la tasa del 20% anual y el préstamo deberá ser cancelado al final plazo concedido. Formular el cuadro de amortizaciones.

3. Un comerciante obtiene un préstamo por S/.10,000, el mismo que debe ser liquidado en un periodo de un año con amortización del principal en cuotas bimestrales iguales y los intereses calculados sobre el saldo, a una tasa de interés simple del 24% anual. Calcular la renta trimestral a pagar y formular el cuadro de amortizaciones.

4. Se obtiene un préstamo bancario por S/.50,000 al 28% de interés simple anual al rebatir con pagos semestrales durante 4 años, con cuotas semestrales constantes. Calcular la renta periódica a pagar y formular el cuadro de amortizaciones.

5. Se obtiene un préstamo bancario por S/.50,000 al 30% de interés simple anual, para ser revertido con pagos uniformes semestrales ordinarios en un periodo de cuatro años. Calcular la cuota a pagar por periodo y formular el cuadro de amortizaciones.

C A P Í T U L O XVI

16. INTERÉS COMPUESTO

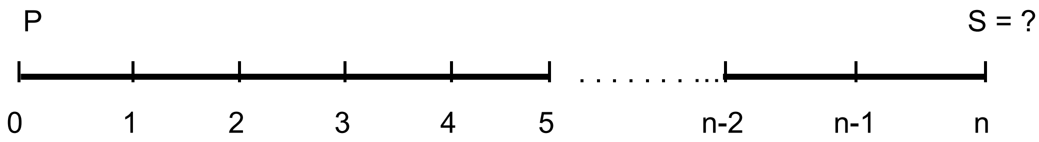
16.1 Concepto

Se entiende por interés compuesto, cuando los intereses calculados al final de cada período no se retiran sino que se suman al capital (se capitalizan) para formar un nuevo capital y sobre la base de este, calcular el intereses del siguiente período y así sucesivamente durante el horizonte temporal.

16.2 Cálculo del Monto

En cualquier inversión o colocación de dinero se espera recibir, el capital más sus intereses. Se compran bonos, acciones u otros títulos, para recibir después de un determinado periodo de tiempo una cantidad mayor. En este caso el monto es igual a la suma del capital más el interés, calculado a una tasa de interés (i) en (n) periodos de tiempo; operación que lo ilustramos en la escala de tiempo:

Fig. 16.1



Elementos que intervienen

P = Valor, actual, presente o capital

S = Valor futuro o monto

I = Intereses durante el tiempo de duración de la operación

n = Número de periodos

i = Tasa de interés

m = Frecuencia de capitalización

Para el cálculo del monto hacemos uso de la expresión $(1+i)^n$ que toma el nombre de Factor Simple de Capitalización, simbólicamente lo podemos expresar por **FSC.**

El FSC es el monto a interés compuesto, generado por una unidad monetaria, durante **n** períodos de tiempo y a una tasa de interés **i** por período. Dicho factor tiene por función llevar al futuro cualquier valor presente o traer al presente cualquier valor del pasado.
El monto o valor futuro de una cantidad se obtiene multiplicando el capital por el factor simple de capitalización.

$$S = P(1+i)^n$$

Ejemplo 16.1.- Se deposita en un banco de Ahorros S/.5,000 a interés compuesto a la tasa de 18% anual. ¿A cuánto asciende el disponible al final de 4 años?

$$S = P(1+i)^n$$
$$S = 5{,}000(1+0.18)^4$$
$$S = 5{,}000(1.93877776)$$
$$S = 9{,}693.89$$

En las operaciones de carácter financiero a interés compuesto, la capitalización de los intereses no siempre se realiza a plazos anuales, sino que pueden ser semestrales, trimestrales, mensuales e incluso en periodos de tiempo más cortos y en estos casos interviene el elemento (m) frecuencia de capitalización.

Cuando la operación financiera, está afectada por una tasa nominal (**j**), que puede ser: tasa nominal anual con capitalización mensual; una tasa nominal trimestral con capitalización mensual o también la capitalización puede estar dado en un período mayor al de la tasa nominal, como el siguiente: Una tasa nominal mensual con capitalización trimestral. Es necesario determinar previamente la tasa efectiva (**i**) por periodo de capitalización.

Si la tasa nominal esta dado en un periodo mayor al de la capitalización, la tasa efectiva se obtiene dividiendo la tasa nominal por la frecuencia de capitalización (**m**)

$$i = \frac{j}{m}$$

Si la tasa nominal está dada en un periodo menor a la frecuencia de capitalización, la tasa efectiva por periodo de capitalización se obtiene multiplicando la tasa nominal por los periodos necesarios para igualar al periodo de capitalización.

$$i = j.n$$

Para ilustrar mejor este caso, suponemos una tasa nominal mensual del 2% y una frecuencia de capitalización trimestral. La tasa efectiva trimestral se obtendrá de la siguiente manera:

$$i = 0.02 \times 3$$

$$i = 0.06 \quad \text{tasa efectiva trimestral}$$

Ejemplo 16.2.- Un banco paga el l6% de interés compuesto anual y si depositamos S/.2,000, de cuanto se dispondrá al término de 5 años, si la frecuencia de capitalización es trimestral?

$$S = 2{,}000\,(1.04)^{20}$$

$$S = 4{,}382.25$$

16.3 Cálculo del interés compuesto:

Hemos visto que una inversión colocada a interés compuesto a una tasa dada, se convierte en una cantidad mayor llamada monto a un plazo determinado.

La diferencia entre dicho monto y el capital inicial, constituye el incremento o interés, que podemos representarlo por: I = S - P

La relación anterior nos indica que para determinar el interés, es necesario primero determinar el monto, para luego sustraer el capital. Pero se puede determinar directamente deduciendo la siguiente fórmula:

De: $I = S - P$

Reemplazamos S por $P(1+i)^n$ y obtenemos

$$I = P\,(1+i)^n - P$$

Sacando factor común tenemos:

$$I = P\left[(1+i)^n - 1\right]$$

Ejemplo 16.3.- Determinar el interés compuesto de S/. 20,000. impuesto al 14% durante 4 años.

$$I = P\,[(1+i)^n - 1]$$
$$I = 20{,}000\,[(1+0.14)^4 - 1]$$
$$I = 20{,}000\,[(1.14)^4 - 1]$$
$$I = 20{,}000\,[(1.28896016 - 1)]$$
$$I = 20{,}000\,(0.28896016)$$
$$I = 13{,}779.20$$

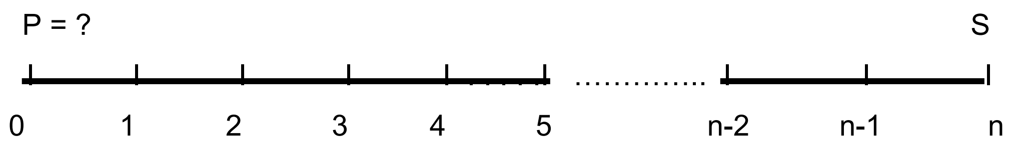
Ejemplo 16.4.- Determinar el interés compuesto de un depósito a plazo fijo de S/.24,000 efectuado en un banco, al 20% anual, capitalizable semestralmente, durante 5 años.

$$I = P\,[(1+i)^n - 1]$$
$$I = 24{,}000\,(1.10)^{10} - 1$$
$$I = 24{,}000\,(2.59374246 - 1)$$
$$I = 24{,}000\,(1.59374246)$$
$$I = 38{,}249.82$$

16.4 Valor Actual

El valor actual o presente de un dinero, a recibirse en una fecha futura, es el valor equivalente al dinero que se recibirá en dicha fecha, pero en el momento actual y esto lo visualizamos gráficamente.

Fig. 16.2



Para calcular el capital o valor actual de una cantidad futura o monto, a un determinado período de tiempo y una tasa de interés, se hace uso del factor simple de actualización FSA, que se deduce a partir de la fórmula del monto.

$$S = P\,(1+i)^n$$

Lo que buscamos es el valor actual y lo obtenemos despejando **P**:

$$P = S\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

El factor entre corchetes es el factor simple de actualización. El factor simple de actualización, es el valor actual de una unidad monetaria a una tasa de interés **i** por período durante **n** períodos y su función es traer al presente cualquier cantidad futura o llevar al pasado cualquier cantidad actual.

Ejemplo16.5.- Una persona recibirá dentro de 5 años la cantidad de S/. 10,000 y si la tasa de interés anual vigente es del 18% con capitalización bimestral. ¿Cuál será el valor actual de dicha cantidad?

Empleando la segunda fórmula:

$$P = 10{,}000\left[\frac{1}{(1.03)^{30}}\right]$$

$$P = 10{,}000 \times 0.411986759$$

$$P = 4{,}119.87$$

Ejemplo 16.6 Hallar el valor presente de S/. 18,000 pagaderos dentro de 3 años a la tasa anual del 16% capitalizable trimestralmente.

Remplazando datos en la fórmula:

$$P = 18{,}000\left[\frac{1}{(1+0.04)^{12}}\right]$$

$$P = 18{,}000 \times 0.624597049$$
$$P = 11{,}242.75$$

Ejemplo 16. 7 .- Hace 18 meses se depositó en un banco un capital al 24 % anual con capitalización mensual y en la fecha se dispone de un fondo de S/. 6,800. ¿Cuál fue el valor del depósito?

$$P = 6{,}800\left[\frac{1}{(1.02)^{18}}\right]$$
$$P = 6{,}800 \times 0.700159375$$
$$P = 4{,}761.08$$

16.5 Cálculo del número de periodos o tiempo

La variable tiempo **n**, es otro elemento determinante en el manejo de las operaciones financieras. El símbolo **n** indica el número de unidades de tiempo a la que hace referencia la tasa; esto implica, que si la tasa es anual **n** es el número de años, si la tasa es trimestral **n** es el número de trimestres y así sucesivamente.

El tiempo es el periodo en el que se genera y se capitaliza el interés y puede ser un año, un semestre, un trimestre, un mes o cualquier otro periodo de tiempo, según se establezca los periodos de capitalización de los intereses.

Para deducir la fórmula, partimos de la fórmula del monto

$$S = P\,(1+i)^n$$

Aplicando logaritmos

$$\text{Log } S = \text{Log } P + n \text{ Log } (1+i)$$

Transponiendo términos

$$\text{Log } P + n \text{ Log } (1+i) = \text{Log } S$$

Despejando n

$$n = \frac{\text{Log}S - \log P}{\log(1+i)}$$

Ejemplos 16.8.- ¿Qué, tiempo será necesario para que un capital de S/.8,500 soles colocado al 20% de interés compuesto anual se convierta en S/. 17,625.60

$$n = \frac{\text{Log}17{,}625.60 - \log 8{,}500}{\log(1.20)}$$

n = 4 años

Ejemplos 16.9.- ¿Qué tiempo será necesario para que un capital de S/.9,967 soles colocado al 20% de interés compuesto anual con capitalización trimestral se convierta en S/. 17,899.30?

$$n = \frac{\text{Log}17{,}899.30 - \log 9{,}967}{\log(1.05)}$$

n = 12. Trimestres

$$n = \frac{12}{4}$$

n = 3 años

Dado a que la tasa esta expresado en trimestres, el número de periodos también resulta ser trimestres. Para convertirlo a años se tiene que dividir entre cuatro trimestres que tiene el año y nos da como resultado tres años.
Para que el resultado nos dé directamente en años, en la fórmula lo hacemos intervenir la frecuencia de capitalización **m,** de la siguiente manera:

$$n = \frac{\text{Log}17{,}899.30 - \log 9{,}967}{m\log(1.05)}$$

Luego tenemos:

$$n = \frac{\text{Log}17{,}899.30 - \log 9{,}967}{4\log(1.05)}$$

n = 3 años

16.6 Cálculo de la tasa de interés

La tasa, tanto por ciento o tipo de interés, es el número de unidades, que produce como rédito una inversión por cada unidad monetaria o cada cien unidades según el caso y por unidad de tiempo, que generalmente es un año.
Para deducir la fórmula de la tasa de interés, partimos de la fórmula del monto a interés compuesto.

$S = P(1+i)^n$

Transponiendo términos:

$P(1+i)^n = S$

Despejamos $(1+i)^n$

$$(1+i)^n = \frac{S}{P}$$

$$1 + i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1$$

Ejemplo: 16.10.- Si la cantidad de 10,000 impuesto a una tasa de interés anual con durante 4 años, se convierte en S/. 20,736 ¿cuál será la tasa a la que se capitalizó?

$$i = \sqrt[4]{\frac{20,336}{10,000}} - 1$$

$i = 0.20$

$i = 20\%$ anual

Si la frecuencia de capitalización de los intereses se da en periodos menores, la tasa también estará expresada en dicho periodo.

Ejemplos 16.11.- Si la cantidad de 10,000 impuesto a una tasa de interés anual con capitalización trimestral durante 4 años, se convierte en S/. 21,828.75 ¿cuál será la tasa a la que se capitalizó?

$$i = \sqrt[16]{\frac{21,828.75}{10,000}} - 1$$

$i = 0.05$

$i = 5\%$ trimestral

Si la tasa es del 5 por ciento trimestral, la tasa nominal equivalente anual será del 20 por ciento.

$i = 5\% \times 4$

$i = 20\%$ anual

16.7 Listado de fórmulas

FÓRMULA	OBTIENE
$S = P(1+i)^n$	Monto a interés compuesto
$I = P\left[(1+i)^n - 1\right]$	Interés a interés compuesto
$P = I\left[\frac{1}{(1+i)^n - 1}\right]$	Valor actual o capital en función al interés compuesto
$P = S\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right]$	Valor actual valor presente o capital.
$n = \frac{LogS - \log P}{\log(1+i)}$	Número de periodos o tiempo
$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1$	Tasa de interés efectiva

16.8. Problemas propuestos

1. Determinar el monto a pagar dentro de un año y seis meses, de un depósito efectuado por S/.12,000 en una cuenta que paga el 3% de interés compuesto bimestral.
2. Hallar el valor futuro de una colocación de S/.1 6,000 en una cuenta que paga el 6% semestral en un periodo de 3 años.
3. Un ahorrista desea saber cuánto recibirá por concepto de intereses, si deposita a plazo fijo S/.32,000, a una tasa de interés compuesto del 18% anual con capitalización mensual, en un periodo de 2 años.
4. Calcular el interés producido por un capital de S/. 12,000, a una tasa efectiva trimestral del 4.5%, en un período de un año y 9 meses.
5. Carlos invirtió S/.120,000 a 8 años, cobrando una tasa de interés del 15% con capitalización semestral. ¿Cuánto ganó de intereses?
6. La señora Liz Cristóbal, debe S/.16,000 cantidad que deberá pagar dentro de 4 años, si la tasa es del 16% anual y la capitalización trimestral. ¿Cuál es el valor presente de la deuda?
7. Una persona coloca un capital al 24% anual y en un periodo de 3 años logra acumular la cantidad de S/.9,000. ¿Cuál será el valor del capital?
8. Hallar la cantidad que es necesario colocar en una cuenta que paga el 15% con capitalización trimestral, genere un interés de S/.20.000 al cabo de 10 años.
9. Una empresa obtuvo un préstamo hace un año y 6 meses, para cancelarse ahora, si la cantidad a pagar asciende a S/.18,960 incluido el 20% anual con capitalización trimestral por concepto de intereses. ¿Cuál fue el valor del préstamo?
10. ¿Qué, tiempo será necesario para que un capital de S/.5,500 soles colocado al 20% anual con capitalización semestral se convierta en S/. 9,625?.
11. Determinar el tiempo requerido para acumular S/.15,600, si se depositó en una cuenta al 24% anual con capitalización trimestral la cantidad de S/.12,800.

12. ¿Cuál fue la tasa de interés a la que se pactó una inversión de S/.10,000, si al cabo de 5 años se recibieron S/.14,815.44 si la capitalización de los intereses es anual?
13. Determinar la tasa de interés compuesto anual, a la que se impuso un capital de S/.9,680 para convertirse en 12,260 en un periodo de 4 años.
14. Se coloca la cantidad de 14,000 a una tasa de interés compuesto anual capitalizable mensualmente, logrando acumular la cantidad de S/.18,680 en un periodo de 4 años. Determinar la tasa mensual a la que se colocó dicho capital.
15. ¿Cuál es más conveniente: invertir en una sociedad maderera que garantiza duplicar el capital invertido cada 10 años, o depositar en una cuenta de ahorros que ofrece el 6% capitalizable trimestralmente?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALIAGA VALDEZ, Carlos — Matemáticas Financieras. Un enfoque práctico. Colombia, 2002.
- ALIAGA VALDEZ, Carlos — Matemática Financiera. Texto problemas y casos. Universidad del Pacífico. Lima, 2002.
- ALVARES ARANGO, Alberto — Matemáticas Financieras. 3ra. edición. Colombia, 2005
- DÍAZ MATA, Alfredo
- AGUILERA G., Víctor Manuel — Matemáticas Financieras. 2da. Edición. Editorial Mc. Graw Hill. 1998
- DÁVILA ATENCIO, Fernando — Fundamentos de Matemática Financiera. 2da. Edición. Editorial San Marcos. Lima - Perú, 2002
- HÉCTOR MONTOYA, Wiliams — Matemáticas Financieras y Actuariales por Computadora. Instituto de investigación El Pacífico. Perú.
- PORTUS GOVINDEN, Lincoyán — Matemática Financiera. 4ta. Edición, Editorial Mc Graw Hill.1998
- QUISPE QUIROZ, Ubaldo — Matemática Financiera. 4ta. edición. Edit. San Marcos. Lima - Perú, 2002