POTENCIAS Y RAÍCES (Potenciación y Radicación)

Fuente: Matemáticas Simplificadas de CONAMAT (2ª. ed.); Álgebra Intermedia de Ángel (7ª. ed.); Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica de Swokowski (11ª. ed.).

Potenciación

Es la operación en la cual la cantidad llamada base se debe multiplicar por ella misma las veces que lo indique el exponente. De lo anterior se define:

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}_{n\text{-veces}}$, donde: a es la base y n el exponente.
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

- ¿Cuál es el resultado de $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$?

Solución

La fracción se debe multiplicar 3 veces por ella misma.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

El resultado es $\dfrac{1}{8}$

- Desarrolla 3^{-4}.

Solución

Se aplica la definición y luego se desarrolla 3^4 para obtener el resultado.

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{(3)(3)(3)(3)} = \frac{1}{81}$$

Por consiguiente, $3^{-4} = \dfrac{1}{81}$

- Efectúa $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$.

Solución

El exponente es impar, por consiguiente, el resultado será negativo.

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\left(\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$$

- Desarrolla $(-4+1)^2$.

Solución

Se efectúa la operación encerrada en el paréntesis y después se resuelve la potencia para obtener el resultado.

$$(-4+1)^2 = (-3)^2 = 3^2 = 9$$

Teoremas

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Ejemplo

Demuestra que se cumple $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2}$.

Solución

Se realiza la potenciación $2^3 \cdot 2^2 = (8)(4) = 32$ y $2^{3+2} = 2^5 = 32$

Por lo tanto, se demuestra que $2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$

- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

La ley anterior se usa generalmente cuando m>n. Si m<n se puede usar:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Ejemplo:

$$\frac{2^3}{2^7} = \frac{1}{2^{7-3}} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

- $\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$

Ejemplo

Demuestra que $\left(4^3\right)^2 = 4^{(3)(2)}$.

Solución

Se realiza $\left(4^3\right)^2 = (64)^2 = 4\,096$, además $4^{(3)(2)} = 4^6 = 4\,096$

Por último: $\left(4^3\right)^2 = 4\,096 = 4^{(3)(2)}$

- $(a \cdot b \cdot c)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m$

Ejemplo

Verifica que se cumple $(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

Solución

Se realiza el producto de $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ y después se eleva $(30)^2 = 900$

Además: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$

Entonces, se cumple que $(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Ejemplo

Demuestra que se cumple $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$.

Solución

Primero se eleva $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$; por otro lado, $\frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

Entonces, se verifica que $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

Operaciones

Son aquellas que se realizan con la aplicación de los teoremas de los exponentes.

OS

Realiza la simplificación de $\left(2^3 \cdot 5^{-2}\right)\left(2^{-2} \cdot 5^4\right)$.

Solución

La operación es una multiplicación, entonces los exponentes se suman:

$$\left(2^3 \cdot 5^{-2}\right)\left(2^{-2} \cdot 5^4\right) = 2^{3+(-2)} \cdot 5^{-2+4} = 2^1 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$$

El resultado es 50

¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$?

Solución

Se elevan ambas fracciones, se multiplican y posteriormente se dividen para obtener el resultado.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \frac{1^2}{3^2} \cdot \frac{3^{-3}}{2^{-3}} = \frac{3^{-3}}{3^2 \cdot 2^{-3}} = 3^{-3-2} \cdot 2^3 = 3^{-5} \cdot 2^3 = \frac{1}{3^5} \cdot 2^3 = \frac{8}{243}$$

Simplifica la expresión $\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^{-2}$.

Solución

Se simplifica la operación que encierra el corchete y se eleva al exponente -2 para obtener el resultado final.

$$\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^{-2} = \left[\frac{\frac{1^3}{2^3}}{\frac{2^2}{3^2}}\right]^{-2} = \left[\frac{1^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 2^2}\right]^{-2} = \left[\frac{3^2}{2^5}\right]^{-2} = \frac{\left(3^2\right)^{-2}}{\left(2^5\right)^{-2}} = \frac{3^{-4}}{2^{-10}} = \frac{\frac{1}{3^4}}{\frac{1}{2^{10}}} = \frac{2^{10}}{3^4} = \frac{1024}{81}$$

Por tanto, el resultado final es $\frac{1024}{81}$

EJERCICIOS DE POTENCIACIÓN

1. $(-5)^2 + (-5^2) - 5^0 = ?$

$(-5)(-5) - (5)(5) - 1 = 25 - 25 - 1 = -1$

2. $3^5 : 3^2 - 3 = ?$

$3^{5-2} - 3 = 3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$

3. $6^3 + 6^3 + 6^3 + 6^3 + 6^3 + 6^3 = 6^3 \cdot 1 + 6^3 \cdot 1 + 6^3 \cdot 1 + 6^3 \cdot 1 + 6^3 \cdot 1 + 6^3 \cdot 1 = ?$

$6^3(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = (6^3)(6) = 6^4$

4. $-4^8 \cdot 4^4 = ?$

$-4^8 \cdot 4^4 = -4^{8+4} = -4^{12}$

5. $(-6)^4 \cdot 6^3 = ?$

$(-1 \cdot 6)^4 \cdot (6)^3 = (-1)^4(6)^4 \cdot (6)^3 = 1 \cdot (6)^7 = (6)^7$

6. $(\frac{(9)^5}{(-9)^3} = ?$

$(\frac{(9)^5}{(-9)^3} = \frac{9^5}{(-1 \cdot 9)^3} = \frac{9^5}{(-1)^3 \cdot (9)^3} = \frac{9^5}{-1 \cdot (9)^3} = -9^2$

RADICACIÓN

Radicación

Operación que permite hallar un valor que multiplicado tantas veces como lo indica el índice, dé el valor que se encuentra dentro del radical, el cual recibe el nombre de radicando. Para lo anterior se define:

- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, donde: a es la base, m el exponente y n el índice.

Cuando a es un número no negativo, n puede ser cualquier índice.
Cuando a es un número negativo, n debe ser un número impar, ya que, si es par, el resultado no pertenece al conjunto de los números reales, sino al de los complejos. Por ejemplo, $\sqrt{-9} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = i \cdot 3 = 3i$

Ahora, para cualquier número real no negativo *a,*

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a^{\frac{n}{n}} = a$$

La expresión anterior es válida si a es no negativo. Si n es un índice par y a es un numero real negativo, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ y no a. Por ejemplo, $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$.

Propiedades de $\sqrt[n]{a}$

Propiedad	Ejemplos	
$(\sqrt[n]{a})^n = a \; si \; \sqrt[n]{a} \; es \; un \; número \; real$	$(\sqrt{3})^2 = 3$	$(\sqrt[5]{-8})^5 = -8$
$\sqrt[n]{a^n} = a \; si \; a \geq 0$	$\sqrt{6^2} = 6$	$\sqrt[3]{5^3} = 5$
$\sqrt[n]{a^n} = a \; si \; a < 0 \; y \; n \; es \; impar$	$(\sqrt[3]{-2})^3 = -2$	$(\sqrt[7]{-2})^7 = -2$
$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert \; si \; a < 0 \; y \; n \; es \; par$	$\sqrt{(-5)^2} = \lvert -5 \rvert = 5$	$\sqrt[6]{(-7)^6 = \lvert -7 \rvert = 7}$

La raíz cuadrada de a^2

Para cualquier número real $a, \sqrt{a^2} = |a|$

Si $a \geq 0, entonces, \sqrt{a^2} = a$

Por ejemplo:
$\sqrt{7^2} = 7$

EJERCICIOS

Aplica la definición de radicación y calcula $\sqrt[4]{625}$.

Solución

Se descompone la base en factores primos y se aplica la definición para obtener el resultado final.

$$\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5^{\frac{4}{4}}=5$$

Encuentra la raíz quinta de $-1\,024$.

Solución

Se descompone $-1\,024$ en sus factores primos y se aplica la definición:

$$\sqrt[5]{-1024}=-\sqrt[5]{1024}=-\sqrt[5]{2^{10}}=-2^{\frac{10}{5}}=-2^2=-4$$

Por consiguiente, el resultado es -4

Teoremas

Los teoremas de los exponentes también se aplican a radicales, ya que se expresan como exponentes fraccionarios.

- $\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c}=(a\cdot b\cdot c)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}\cdot c^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n\cdot m}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$

LOS

Aplica los teoremas de los exponentes y obtén el resultado de $\sqrt[3]{216}$.

Solución

Se descompone 216 en sus factores primos, se aplica el teorema correspondiente y la definición para obtener el resultado.

$$\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^3}=2^{\frac{3}{3}}\cdot 3^{\frac{3}{3}}=2\cdot 3=6$$

Por tanto, $\sqrt[3]{216}=6$

- ¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$?

Solución

Se descompone la base en factores primos y se aplica el teorema de radicales para obtener el resultado.

$$\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\sqrt[3]{\sqrt{3^6}}=\left(3^6\right)^{\frac{1}{(3)(2)}}=\left(3^6\right)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{6}{6}}=3$$

Por tanto, el resultado de la operación es 3

- Simplifica la expresión $\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}\cdot 2^3}}{\sqrt[4]{32}}$.

Solución

Se transforman los radicales a exponentes fraccionarios y se realizan las operaciones con la aplicación de los respectivos teoremas.

$$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{2}\cdot 2^3}}{\sqrt[4]{32}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^3\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2^5\right)^{\frac{1}{4}}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(2^{\frac{1}{2}+3}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{5}{4}}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(2^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{5}{4}}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2^{\frac{7}{4}}}{2^{\frac{5}{4}}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{7}{4}-\frac{5}{4}}=2^{\frac{2}{2}}=2$$

Por último, el resultado es 2

- ¿Cuál es el resultado de $\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{3^5}\cdot 125^{\frac{1}{2}}\right)$?

Solución

Se descompone 125 es sus factores primos y el radical se expresa como exponente fraccionario, se aplican las leyes de los exponentes y se obtiene el resultado final.

$$\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{3^5}\cdot 125^{\frac{1}{2}}\right)=\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot 3^{\frac{5}{2}}\cdot\left(5^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot 3^{\frac{5}{2}}\cdot 5^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=2^{\frac{1}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)}\cdot 3^{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=2^{-\frac{4}{4}}\cdot 3^{\frac{2}{2}}\cdot 5^{\frac{2}{2}}$$

$$=2^{-1}\cdot 3\cdot 5=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5=\frac{15}{2}$$

Simplificación

Procedimiento que consiste en expresar un radical en su forma más simple. Para simplificar un radical, el exponente de la base debe ser mayor que el índice del radical.

- Simplifica $\sqrt{8}$.

Solución

Se descompone el radicando en factores primos.

$$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}$$

2^3 se expresa como $2^2\cdot 2$ y se aplica el teorema correspondiente de radicales.

$$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=\sqrt{2^2\cdot 2}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

Por consiguiente, la simplificación de $\sqrt{8}$ es $2\sqrt{2}$

- Simplifica $\sqrt{45}$.

Solución

Se descompone el radicando en factores primos y se procede a aplicar los teoremas.

$$\sqrt{45}=\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}$$

Por tanto, $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

- Simplifica $\sqrt[3]{72}$.

Solución

Se descompone la base en factores primos y se simplifica la expresión.

$$\sqrt[3]{72}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^2}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^2}=2\sqrt[3]{9}$$

El resultado es $2\sqrt[3]{9}$

- Simplifica $\frac{1}{2}\sqrt[5]{96}$.

Solución

Se simplifica el radical y el resultado se multiplica por la fracción para obtener el resultado de la operación.

$$\frac{1}{2}\sqrt[5]{96}=\frac{1}{2}\sqrt[5]{2^5\cdot 3}=\frac{1}{2}\sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{3}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt[5]{3}=\sqrt[5]{3}$$

Suma y resta

Estas operaciones se pueden efectuar si y sólo si el índice del radical y el radicando son iguales (radicales semejantes).

$$a\sqrt[n]{d}+b\sqrt[n]{d}-c\sqrt[n]{d}=(a+b-c)\ \sqrt[n]{d}$$

LOS

Efectúa $2\sqrt[3]{5}+11\sqrt[3]{5}$.

Solución

Los radicales son semejantes, por tanto se realizan las operaciones con los números que les anteceden (coeficientes del radical).

$$2\sqrt[3]{5}+11\sqrt[3]{5}=(2+11)\sqrt[3]{5}=13\sqrt[3]{5}$$

Entonces, el resultado es: $13\sqrt[3]{5}$

¿Cuál es el resultado de la operación $3\sqrt{2}+7\sqrt{2}-4\sqrt{2}$?

Solución

Al ser semejantes los radicales, se efectúan las operaciones con los coeficientes.

$$3\sqrt{2}+7\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(3+7-4)\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

El resultado es: $6\sqrt{2}$

Si los radicandos son diferentes, no se pueden sumar o restar los radicales de primera instancia, entonces se simplifican; si resultan semejantes se efectúan las operaciones, de lo contrario, se dejan indicadas.

LOS

¿Cuál es el resultado de $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}$?

Solución

Se simplifican los radicales y se realiza la operación.

$$\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}=\sqrt{2^2\cdot 5}+\sqrt{3^2\cdot 5}-\sqrt{2^4\cdot 5}=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-2^2\sqrt{5}=(2+3-4)\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

Por tanto, el resultado es $\sqrt{5}$

Efectúa $\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{56}$.

Solución

Se simplifican los radicales, se realizan las operaciones y se obtiene el resultado final.

$$\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{56}=\sqrt[3]{3^3\cdot 7}+\sqrt[3]{2^3\cdot 7}=3\sqrt[3]{7}+2\sqrt[3]{7}=5\sqrt[3]{7}$$

Realiza $\frac{2}{15}\sqrt{405}-\frac{1}{6}\sqrt{128}-\frac{1}{10}\sqrt{125}+3\sqrt{32}$.

Solución

Se simplifican los radicales, se multiplican por las cantidades que les anteceden y se simplifican las fracciones:

$$\begin{aligned}\frac{2}{15}\sqrt{405}-\frac{1}{6}\sqrt{128}-\frac{1}{10}\sqrt{125}+3\sqrt{32}&=\frac{2}{15}\sqrt{3^4\cdot 5}-\frac{1}{6}\sqrt{2^6\cdot 2}-\frac{1}{10}\sqrt{5^2\cdot 5}+3\sqrt{2^4\cdot 2}\\&=\frac{2}{15}\left(3^2\sqrt{5}\right)-\frac{1}{6}\left(2^3\sqrt{2}\right)-\frac{1}{10}\left(5\sqrt{5}\right)+3\left(2^2\sqrt{2}\right)\\&=\frac{18}{15}\sqrt{5}-\frac{8}{6}\sqrt{2}-\frac{5}{10}\sqrt{5}+12\sqrt{2}\\&=\frac{6}{5}\sqrt{5}-\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+12\sqrt{2}\end{aligned}$$

Se agrupan los radicales semejantes y se realizan las operaciones para obtener el resultado.

$$\begin{aligned}&=\frac{6}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+12\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}\\&=\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{5}+\left(12-\frac{4}{3}\right)\sqrt{2}=\frac{7}{10}\sqrt{5}+\frac{32}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es $\frac{7}{10}\sqrt{5}+\frac{32}{3}\sqrt{2}$

Multiplicación

Multiplicación de radicales con índices iguales. Cuando los índices de los radicales son iguales, se multiplican los radicandos y de ser posible se simplifica el resultado.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c}$$

LOS

Efectúa $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$.

Solución

Se multiplican ambos factores:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{(3)(5)}=\sqrt{15}$$

Por consiguiente, el resultado de la operación es $\sqrt{15}$

¿Cuál es el resultado del producto $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$?

Solución

Se realiza el producto y se simplifica el resultado.

$$\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{(6)(3)(2)}=\sqrt{36}=\sqrt{2^2\cdot3^2}=\sqrt{2^2}\,\sqrt{3^2}=2\cdot3=6$$

El resultado del producto es 6

Multiplicación de radicales con índices diferentes. Para multiplicar radicales con índices diferentes se busca un índice común, que resulta del mínimo común múltiplo de los índices de los radicales y recibe el nombre de "mínimo común índice".

.OS

¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}$?

Solución

El mínimo común índice es 6, entonces los índices de los radicales se convierten a dicho índice.

$$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\times2]{(2)^2}=\sqrt[6]{2^2}\quad\text{además}\quad\sqrt{5}=\sqrt[2\times3]{(5)^3}=\sqrt[6]{5^3}$$

Se efectúa el producto y se observa que no se puede simplificar el radical, por consiguiente se desarrollan las potencias y se realiza la multiplicación.

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{2^2\cdot5^3}=\sqrt[6]{4\cdot125}=\sqrt[6]{500}$$

Finalmente, el resultado es $\sqrt[6]{500}$

Efectúa $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}$.

Solución

Se descompone 8 en factores primos y el mínimo común índice es 4, por lo tanto, al transformar los radicales se obtiene:

$$\sqrt[2\times2]{(2)^2}=\sqrt[4]{2^2}\quad\text{y}\quad\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}$$

Se efectúa la multiplicación y se simplifica el resultado.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{2^2\cdot2^3}=\sqrt[4]{2^5}=\sqrt[4]{2^4\cdot2}=\sqrt[4]{2^4}\,\sqrt[4]{2}=2\sqrt[4]{2}$$

Finalmente, el resultado de la operación es $2\sqrt[4]{2}$

División

División de radicales con índices iguales. Para efectuar la división se aplica el siguiente teorema:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

PLOS

- Realiza $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$.

Solución

Los radicales son de igual índice, entonces se dividen los radicandos.

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{10}{2}}=\sqrt{5}$$

El resultado de la operación es $\sqrt{5}$

- ¿Cuál es el resultado de $\frac{6\sqrt{28}}{\sqrt{63}}$?

Solución

Se simplifican los radicales y se realiza la operación.

$$\frac{6\sqrt{28}}{\sqrt{63}}=\frac{6\sqrt{2^2\cdot 7}}{\sqrt{3^2\cdot 7}}=\frac{6\sqrt{2^2}\sqrt{7}}{\sqrt{3^2}\sqrt{7}}=\frac{6(2)}{3}\sqrt{\frac{7}{7}}=\frac{12}{3}\sqrt{1}=4(1)=4$$

Por tanto, el cociente es 4

Para introducir una cantidad a un radical, se debe elevar la cantidad a un exponente igual al índice del radical.

Ejemplo

Realiza $\frac{\sqrt{48}}{2}$.

Solución

El divisor se expresa como $2=\sqrt{2^2}$ y se realiza la operación para obtener el resultado.

$$\frac{\sqrt{48}}{2}=\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{2^2}}=\sqrt{\frac{48}{2^2}}=\sqrt{\frac{48}{4}}=\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

División de radicales con índices diferentes. Se transforman los radicales a un índice común y después se realiza la división.

Halla el cociente de $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}}$.

Solución

Se transforman los índices de los radicales a 12 y se realiza la operación.

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[4\times 3]{\left(2^3\right)^3}}{\sqrt[3\times 4]{\left(2^2\right)^4}}=\frac{\sqrt[12]{2^9}}{\sqrt[12]{2^8}}=\sqrt[12]{\frac{2^9}{2^8}}=\sqrt[12]{2^{9-8}}=\sqrt[12]{2}$$

El resultado de la operación es $\sqrt[12]{2}$

¿Cuál es el resultado de $\frac{6\sqrt{12}+2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}$?

Solución

Se divide cada término del numerador entre el denominador y se obtiene:

$$\frac{6\sqrt{12}+2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{\frac{12}{3}}+\frac{\sqrt[3\times 2]{(2\cdot 3)^2}}{\sqrt[2\times 3]{3^3}}=3\sqrt{4}+\frac{\sqrt[6]{2^2\cdot 3^2}}{\sqrt[6]{3^3}}$$

$$=3(2)+\sqrt[6]{\frac{2^2\cdot 3^2}{3^3}}=6+\sqrt[6]{2^2\cdot 3^{-1}}=6+\sqrt[6]{2^2\cdot\frac{1}{3}}=6+\sqrt[6]{\frac{4}{3}}$$

Ejemplo: $\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{2}}}}}$

Fuente: Libro de Rupín, Muñoz y Jiménez, p. 47, 6g.

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{2}}}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{\frac{1}{2}}}=(2^{\frac{1}{2}})/(\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}}=(2^{\frac{1}{2}})(2^{-\frac{1}{6}})=2^{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{6}\right)}=2^{\frac{3-1}{6}}=2^{\frac{2}{6}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2^1}=\sqrt[3]{2}$$

Ejemplo: $\frac{a-b}{\sqrt[3]{(a-b)^2}}$

Fuente: Desafío, Libro de Rupín, Muñoz y Jiménez, p. 47, 13c).

Solución:

$$\frac{a-b}{\sqrt[3]{(a-b)^2}}=\frac{a-b}{(a-b)^{\frac{2}{3}}}=(a-b)^{1-\frac{2}{3}}=(a-b)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a-b}$$

Racionalización

Racionalizar es representar una fracción en otra equivalente que contenga una raíz en el numerador, cuyo numerador o denominador sea un número racional respectivamente.

Racionalización del denominador. Dada una expresión de la forma $\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}$, se racionaliza de la siguiente manera:

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}=\frac{c}{a}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}$$

Transforma $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en otra expresión equivalente que carezca de raíz en el denominador.

Solución

La fracción $\frac{1}{\sqrt{3}}$ se multiplica por $\sqrt{3^{2-1}}=\sqrt{3}$ tanto denominador como numerador.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por tanto, la expresión equivalente a $\frac{1}{\sqrt{3}}$ es $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Racionaliza la expresión $\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Solución

Se debe separar la expresión en raíces y se multiplican por $\sqrt{5^{2-1}}=\sqrt{5}$ tanto numerador como denominador, para obtener el resultado:

$$\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

Finalmente, el resultado de la racionalización es $\frac{\sqrt{10}}{5}$

Racionalización de un denominador binomio. Para racionalizar una fracción cuyo denominador es un binomio $(a\pm b)$ y alguno o ambos elementos tienen una raíz cuadrada, se multiplica por el conjugado del binomio $(a\mp b)$.

$$\frac{c}{a\pm b}=\frac{c}{a\pm b}\cdot\frac{a\mp b}{a\mp b}=\frac{c\cdot(a\mp b)}{a^2-b^2}$$

OS

Racionaliza la expresión $\frac{3}{1+\sqrt{2}}$.

Solución

Se multiplica el numerador y el denominador de la expresión por $1-\sqrt{2}$, que es el conjugado del denominador $1+\sqrt{2}$

$$\frac{3}{1+\sqrt{2}}=\frac{3}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{3-3\sqrt{2}}{(1)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{3-3\sqrt{2}}{1-2}=\frac{3-3\sqrt{2}}{-1}=3\sqrt{2}-3$$

La expresión equivalente a la propuesta es $3\sqrt{2}-3$

Racionaliza la expresión $\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Solución

Se multiplica por el conjugado del denominador y se simplifica para obtener el resultado.

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{5-3}=\frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{2}$$

Racionaliza $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Solución

Se multiplica al numerador y denominador por $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$, y se efectúa la simplificación.

$$\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{6\left(\sqrt{3}\right)^2+3\sqrt{6}-4\sqrt{6}-2\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{18-\sqrt{6}-4}{12-2}=\frac{14-\sqrt{6}}{10}$$

Racionalización de un numerador. Dada una expresión de la forma $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{c}$, el numerador se racionaliza de la siguiente forma:

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{c}=\frac{\sqrt[n]{a^m}}{c}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}}{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^n}}{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{a}{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}$$

LOS

Racionaliza el numerador de $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Solución

Se multiplica el numerador y denominador de la fracción por $\sqrt{2^{2-1}}=\sqrt{2}$ y se obtiene el resultado.

$$\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2^2}}{3\sqrt{2}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}$$

¿Cuál es la expresión equivalente que resulta al racionalizar el numerador de $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}}$?

Solución

Se multiplica por $\sqrt[4]{3^{4-1}}=\sqrt[4]{3^3}$ ambos elementos de la fracción para obtener el resultado.

$$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}}=\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}}=\frac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{5\cdot 3^3}}=\frac{3}{\sqrt[4]{5\cdot 27}}=\frac{3}{\sqrt[4]{135}}$$

Ejemplo: $\frac{1}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{1024b^{10}}}}$

Fuente: Libro de Rupín, Muñoz y Jiménez, p. 47, 6e.

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{1024b^{10}}}}=\frac{1}{\sqrt[15]{1024b^{10}}}=\frac{1}{\sqrt[15]{2^{10}b^{10}}}=\frac{1}{\sqrt[15]{(2b)^{10}}}=\frac{1}{(2b)^{\frac{10}{15}}}=\frac{1}{(2b)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(2b)^2}}$$

Para racionalizar, se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{2b}$ (no por $\sqrt[3]{(2b)^2}$), para que en el denominador se obtenga $\sqrt[3]{(2b)^3}=(2b)^{\frac{3}{3}}=2b$ (así desaparece la raíz del denominador).

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(2b)^2}}*\frac{\sqrt[3]{2b}}{\sqrt[3]{2b}}=\frac{\sqrt[3]{2b}}{\sqrt[3]{(2b)^3}}=\frac{\sqrt[3]{2b}}{2b}$$

<u>Nota importante</u>: En general, dada una expresión de la forma $\frac{c}{\sqrt[n]{(a)^m}}$, se racionaliza de la siguiente manera:

$$\frac{c}{\sqrt[n]{(a)^m}}=\frac{c}{\sqrt[n]{(a)^m}}*\frac{\sqrt[n]{(a)^{n-m}}}{\sqrt[n]{(a)^{n-m}}}=\frac{c\sqrt[n]{(a)^{n-m}}}{\sqrt[n]{(a)^{n+m-m}}}=\frac{c\sqrt[n]{(a)^{n-m}}}{\sqrt[n]{(a)^n}}=\frac{c\sqrt[n]{(a)^{n-m}}}{a}=\frac{c^n}{a}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}$$

Ejemplo: Racionalizar el denominador de $\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Fuente: Desafío, libro de Rupín, Muñoz y Jiménez, p. 47, 13a.

Solución: Se multiplica el numerador y denominador de la fracción por el denominador, cambiando en este solo el signo del último término.

$$\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}*\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{2-\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{5}-\sqrt{2}\sqrt{3}+3+\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt{5}-\sqrt{3}\sqrt{5}-5}=\frac{3\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{-2\sqrt{2}\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{-2\sqrt{6}}=\frac{3\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}\right)}{-2\sqrt{6}\left(\sqrt{6}\right)}=\frac{3\left(\sqrt{12}-\sqrt{18}-\sqrt{30}\right)}{-12}$$

$$=\frac{-3\left(\sqrt{12}-\sqrt{18}-\sqrt{30}\right)}{12}=\frac{-\left(\sqrt{12}-\sqrt{18}-\sqrt{30}\right)}{4}=\frac{-\left(\sqrt{(4)(3)}-\sqrt{(9)(2)}-\sqrt{30}\right)}{4}$$

$$=\frac{-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{4}$$

Racionalización de un numerador binomio. Para racionalizar un numerador binomio que contenga 1 o 2 raíces cuadradas en el numerador, se efectúa el mismo procedimiento que se empleó para racionalizar un denominador.

$$\frac{a\pm b}{c}=\frac{a\pm b}{c}\cdot\frac{a\mp b}{a\mp b}=\frac{a^2-b^2}{c\cdot(a\mp b)}$$

LOS

- Racionaliza el numerador de $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

Solución

Se multiplican los elementos de la fracción por $1-\sqrt{2}$ que es el conjugado del numerador.

$$\frac{1+\sqrt{2}}{3}=\frac{1+\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{3\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{1-2}{3\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{-1}{3\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{-1}{3-3\sqrt{2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}-3}$$

Por consiguiente, el resultado de la racionalización es $\frac{1}{3\sqrt{2}-3}$

- Racionaliza el numerador de $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

Solución

Se multiplica numerador y denominador por $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ que es el conjugado del numerador, se efectúan las multiplicaciones y se obtiene el resultado.

$$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}\cdot\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{4\left(\sqrt{3}\right)^2-\mathbf{2}\sqrt{15}-2\sqrt{15}+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{4(3)-5}{4(3)-4\sqrt{15}+5}$$

$$=\frac{12-5}{12-4\sqrt{15}+5}=\frac{7}{17-4\sqrt{15}}$$

Jerarquía de operaciones

Indica el orden en el que se deben realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz, así como signos de agrupación. De esta forma se garantiza que se obtendrá el resultado correcto.

Orden de las operaciones. Dada una expresión que involucre diferentes operaciones, se realizan en el siguiente orden:

- Potencias y raíces. Si se tiene la potencia o la raíz de una suma o resta, estas operaciones se resuelven primero.
- Multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
- Sumas y restas de izquierda a derecha.

<u>Observación</u>: Se suele recomendar proceder respetando esta jerarquía de operaciones, aunque no tiene por qué ser necesariamente así.

Efectúa la operación $6^2 \div 9 \times 4 + \sqrt{16} \times 3 - 10 \div 5$.

Solución

Se desarrolla la potencia y se extrae a la raíz:

$$6^2 \div 9 \times 4 + \sqrt{16} \times 3 - 10 \div 5 = 36 \div 9 \times 4 + 4 \times 3 - 10 \div 5$$

Se realizan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha, finalmente se efectúan las sumas y restas de izquierda a derecha y se obtiene el resultado.

$$= 4 \times 4 + 12 - 2$$
$$= 16 + 12 - 2 = 26$$

¿Cuál es el resultado de $\sqrt{5^2 - 3^2} \times 2^2 + \sqrt[3]{8} \times \sqrt{81} \div 18 + \sqrt{18 \times 8}$?

Solución

Se desarrollan las potencias, se realizan las operaciones dentro de los radicales y se extraen las raíces:

$$\sqrt{5^2 - 3^2} \times 2^2 + \sqrt[3]{8} \times \sqrt{81} \div 18 + \sqrt{18 \times 8} = \sqrt{25 - 9} \times 4 + 2 \times 9 \div 18 + \sqrt{144}$$
$$= \sqrt{16} \times 4 + 2 \times 9 \div 18 + \sqrt{144}$$
$$= 4 \times 4 + 2 \times 9 \div 18 + 12$$

Se efectúan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha. Finalmente, se suman las cantidades y se obtiene el resultado.

$$= 16 + 18 \div 18 + 12$$
$$= 16 + 1 + 12$$
$$= 29$$

Realiza $-\sqrt{9} - \left\{ 4^2 + 3 \left[\sqrt[3]{27} + 4 \times 6 \right] - 2^3 \right\}$.

Solución

Se desarrollan las potencias y se extraen las raíces:

$$-\sqrt{9} - \left\{ 4^2 + 3 \left[\sqrt[3]{27} + 4 \times 6 \right] - 2^3 \right\} = -3 - \{16 + 3\ [3 + 4 \times 6] - 8\}$$

Se realiza la multiplicación:

$$= -3 - \{16 + 3\ [3 + 24] - 8\}$$

Se efectúan los pasos correspondientes para eliminar los signos de agrupación y obtener el resultado:

$$= -3 - \{16 + 3\ [27] - 8\}$$
$$= -3 - \{16 + 81 - 8\} = -3 - \{89\}$$
$$= -3 - 89 = -92$$

El resultado de la operación es –92

Realiza $\sqrt{\frac{2}{3}\div\left(\frac{17}{27}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\div\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\right)}-\frac{3}{5}\times\left(\frac{7}{8}+\frac{13}{8}\right)$.

Solución

Se realizan las operaciones encerradas en los paréntesis:

$$\frac{17}{27}-\frac{1}{3}=\frac{17-9}{27}=\frac{8}{27}$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{4-1}{24}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{7}{8}+\frac{13}{8}=\frac{7+13}{8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$$

Los valores obtenidos se sustituyen y se realizan las multiplicaciones y divisiones:

$$=\sqrt{\frac{2}{3}\div\left(\frac{8}{27}\right)+\frac{1}{2}\div\left(\frac{1}{8}\right)}-\frac{3}{5}\times\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{54}{24}+\frac{8}{2}}-\frac{15}{10}$$

Pero $\frac{54}{24}=\frac{9}{4}$, $\frac{8}{2}=4$ y $\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$, entonces:

$$=\sqrt{\frac{9}{4}+4}-\frac{3}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{9+16}{4}}-\frac{3}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{25}{4}}-\frac{3}{2}$$

Se obtiene la raíz cuadrada y se realiza la resta:

$$=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Por tanto, el resultado es 1