# Tabla de contenido

## RAZONES, PROPORCIONES Y PROPORCIONALIDAD

# 1 RAZONES Y PROPORCIONES

### 1.1 Razones:

Una razón es la comparación entre dos cantidades *a* y *b* mediante el cociente entre ellas.

$$\frac{a}{b}, o\ bien, a{:}b$$

*a* es el antecedente y *b* el consecuente. Se lee: *a* es a *b*.

Ejemplo: El tanto por ciento es una razón de consecuente 100. Por ejemplo, $19\% = \frac{19}{100}$.
El valor de la razón es el cociente entre las cantidades *a* y *b*.

$$19\% = \frac{19}{100} = 0{,}19$$

Ejemplo: El hermano mayor tiene 18 años y el menor 6 años, ¿cuál es la razón entre esas edades?

$$\frac{Hermano\ mayor}{Hermano\ menor} = \frac{18}{6} = 3$$

Esta razón se puede interpretar diciendo que la edad del hermano mayor es 3 veces la del menor o que la edad del hermano menor es la tercera parte de la edad del mayor.

Si los valores de dos razones son iguales, dichas razones se llaman *razones equivalentes*. Por ejemplo, la razón $\frac{2}{4}$ es equivalente a $\frac{5}{10}$, porque $\frac{2}{4} = 0{,}5$ y $\frac{5}{10} = 0{,}5$.

### 1.2 Proporciones:

Una proporción es una igualdad entre dos razones.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ son dos razones iguales, entonces la expresión $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ se denomina proporción y *k* recibe el nombre de Constante de proporcionalidad.

Una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ puede anotarse también: $a{:}b = c{:}d$. Se lee: *a* es a *b* como *c* es a *d*.
*a* y *d* se denominan términos *extremos* y *b* y *c* se llaman términos *medios*.

#### 1.2.1 Propiedad fundamental de las proporciones:

El producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Por ejemplo, la igualdad de las razones $\frac{1}{6} = \frac{3}{18}$ forma una proporción, porque al multiplicar extremos entre sí y medios entre sí se obtiene un mismo valor: $1 \cdot 18 = 6 \cdot 3 \rightarrow 18 = 18$.

### 1.2.2 Proporcionalidad directa:

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando multiplicando una de ellas por un número, la otra queda multiplicada por el mismo número y cuando dividiendo una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número. Por ejemplo, cuando una magnitud aumenta el triple, la otra magnitud también aumenta el triple. O bien, cuando una magnitud disminuye en un tercio, la otra también disminuye en un tercio.

En general, se dice que dos variables x e y son directamente proporcionales si el cociente entre sus valores correspondientes permanece constante.

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \cdots = k$$

Donde k es la constante de proporcionalidad. De esta manera:

$x_1 = ky_1$
$x_2 = ky_2$
$x_3 = ky_3$
$x_n = ky_n$

Ejemplo: Si 20 sacapuntas cuestan \$10.000, entonces 40 sacapuntas costarán \$20.000; Como al multiplicar la cantidad de sacapuntas por 2 ($20 \cdot 2 = 40$), el valor también quedó multiplicado por 2 ($10.000 \cdot 2 = 20.000$), entonces las cantidades son directamente proporcionales.

Ejemplo: Un automóvil recorre 600 Km en 6 horas a velocidad constante; en 2 horas recorrerá un tercio, es decir, 200 Km. Como la cantidad de horas se redujo en un tercio ($\frac{6}{2} = 3$), los kilómetros recorridos también se redujeron en un tercio ($\frac{600}{3} = 200$).

De otra manera, dadas dos magnitudes X e Y, se dice que X es directamente proporcional a Y si y solo si la razón entre un valor cualquiera de X y el correspondiente valor de Y es constante. Esta razón recibe el nombre de *Razón de proporcionalidad*.

Por ejemplo, en la tabla siguiente, $Y = distancia\ recorrida\ por\ un\ móvil\ en\ Km$ y $X = tiempo\ empleado\ en\ horas$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 40 | 80 | 120 | 160 | 200 | 240 |
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Si se calculan las razones $Km/hora$, se aprecia que la velocidad es constante en todos los casos e igual a 4 $Km/h$:

$$v = \frac{distancia\ recorrida}{tiempo} = \frac{40}{1} = \frac{80}{2} = \frac{120}{3} = \frac{160}{4} = \frac{200}{5} = \frac{240}{6} = 4$$

En general, la Razón de proporcionalidad se denota como sigue:

$$\frac{Y}{X} = k \text{ o bien } Y = kX$$

$$\frac{X}{Y} = k \text{ o bien } X = kY$$

Ejemplo: A y B son magnitudes directamente proporcionales. Calcular los valores de x e y de la siguiente tabla:

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | 5 | x | 15 |
| B | 30 | 42 | y |

a) 7 y 90
b) 7 y 60
c) 6 y 72
d) 8 y 90
e) 9 y 54

Solución:

$$\frac{5}{30} = \frac{x}{42}$$

$$30x = 5 \cdot 42 = 210$$

$$x = \frac{210}{30} = 7$$

$$\frac{x}{42} = \frac{15}{y}$$

$$\frac{7}{42} = \frac{15}{y}$$

$7y = 15 \cdot 42 = 630$

$y = \dfrac{630}{7} = 90$

Por tanto, la alternativa correcta es la a): 7 y 90.

#### 1.2.2.1 Ejemplos de magnitudes directamente proporcionales:

- Lo que hay que pagar por ocupar un estacionamiento en un supermercado y la cantidad de horas que se lo utiliza.
- Cantidad de buses del Transantiago y cantidad de personas transportadas.
- La temperatura ambiente y la cantidad de helados que vende el dueño de un kiosco.
- El tiempo disponible de un estudiante y la cantidad de ejercicios de matemática que puede hacer.
- La cantidad de trabajo realizada por un obrero y el salario que recibe por ello.
- A medida que el tiempo transcurre, un automóvil recorre una mayor cantidad de kilómetros.
- La distancia recorrida por un bus y el tiempo utilizado (a velocidad constante).
- El número de obreros empleado en la construcción de una casa y el trabajo realizado en un mismo período de tiempo.
- Cantidad de kilogramos de harina que utiliza una panadería y la cantidad de pan que elabora.
- La cantidad de bencina utilizada por un automóvil y la distancia que recorre.
- La cantidad de hojas de un libro y su peso (masa).
- El número del calzado y el largo del pie de una persona en centímetros.
- En toda reacción química entre las sustancias A y B, la cantidad de sustancia A que interviene en la reacción es directamente proporcional a la cantidad de la sustancia B que interviene en la reacción.

### 1.2.3 **Proporcionalidad inversa**:

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando multiplicando una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número y cuando dividiendo una de ellas por un número, la otra queda multiplicada por el mismo número. Por ejemplo, cuando una magnitud aumenta al doble, la otra disminuye a la mitad. O bien, si la primera magnitud disminuye a la mitad, la otra aumenta al doble.

Ejemplo: Si 6 carpinteros construyen una casa en 30 días, 2 carpinteros la construirán en 90 días. Aquí, la cantidad de carpinteros se dividió entre 3 y la cantidad de días se multiplicó por 3, por lo tanto, las cantidades son inversamente proporcionales.

Se puede plantear como sigue:

| Carpinteros | Días |
|---|---|
| 6 | 30 |
| 2 | x |
| Razón inversa | |

$$\frac{2}{6} = \frac{30}{x}$$

Multiplicando en cruz:

$$2x = 180$$

$$x = 90\ días$$

De otra manera, dadas dos magnitudes *X* e *Y*, se dice que *X* es inversamente proporcional a *y* si y solo si el producto entre un valor cualquiera de *x* y el correspondiente valor de *y* es constante.

En general:

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = \cdots = x_n \cdot y_n = k = constante\ de\ proporcionalidad$$

Por ejemplo, en la tabla siguiente, $y = rapidez\ que\ lleva\ un\ móvil\ en\ Km/h$ y $x = tiempo\ que\ se\ demora\ en\ horas$.

| $y$ | 120 | 90 | 72 | 60 | 45 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 |
| $x \cdot y$ | 360 | 360 | 360 | 360 | 360 | 360 |

Se aprecia que, a menor velocidad del móvil, mayor tiempo empleado y si se calculan los productos $x \cdot y$, se aprecia que todos ellos son iguales a 360:

Ejemplo: Las variables x e y son inversamente proporcionales. Cuando x vale 60, y vale 90. ¿Cuánto vale x, cuando y vale 120?

a) 30
b) 40
c) 45
d) 60
e) 90

Solución:

| x | y |
|---|---|
| 60 | 90 |
| x | 120 |

$$\frac{60}{x} = \frac{120}{90}$$

$$120x = 60 \cdot 90 = 5400$$

$$x = \frac{5400}{120} = 45$$

En consecuencia, la alternativa correcta es la c).

#### 1.2.3.1 Ejemplos de magnitudes inversamente proporcionales:

- Cantidad de obreros empleados en pintar una casa y el tiempo necesario para hacer el trabajo.
- La cantidad de temporeras de un fundo y los días que tardan en hacer la cosecha.
- La rapidez o velocidad de un bus de Santiago a Algarrobo y el tiempo empleado en recorrer la distancia entre ambas localidades.
- Porcentaje de descuento de un artículo y precio por pagar después del descuento.
- Tiempo que tarda una piscina en vaciarse y cantidad de desagües que hay en ella.
- La cantidad de llaves abiertas en un estanque y el tiempo que se demora en llenarse.
- Cantidad de Kg de un producto que se puede comprar con $20.000 y el precio por Kg de ese producto.
- La resistencia eléctrica de un conductor es inversamente proporcional a su sección.

### 1.2.4 Proporciones iteradas o secuencia de razones iguales:

La igualdad de tres o más razones es un conjunto de proporciones iteradas o una secuencia de razones iguales.

Ejemplo:

$$\frac{8}{2} = \frac{16}{4} = \frac{32}{8} = \frac{64}{16} = \frac{24}{6} = k$$

Cada una de las razones vale 4. Por lo que $k = 4$.

La secuencia anterior se puede escribir también como:

$$8 : 16 : 32 : 64 : 24 = 2 : 4 : 8 : 16 : 6$$

### 1.2.5 Propiedad fundamental de las proporciones iteradas

En una secuencia de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como un antecedente cualquiera es a su consecuente respectivo.

Si $\frac{a1}{b1} = \frac{a2}{b2} = \frac{a3}{b3} = \cdots = \frac{an}{bn} = k$ , donde k es el factor de proporcionalidad.

Entonces:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n} = \frac{a_p}{b_p} \quad con\ p = 1, \dots, n$$

### 1.2.6 Componer y descomponer una proporción:

Sea la proporción:
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

#### 1.2.6.1 Componer el antecedente:

$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$

Ejemplo: Componer la proporción $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

$$\frac{3+4}{3} = \frac{9+12}{9}$$

$$\frac{7}{3} = \frac{21}{9}$$

$63 = 63$

#### 1.2.6.2 Componer el consecuente:

$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

Ejemplo: Componer $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

$\frac{3+4}{4} = \frac{9+12}{12}$

$\frac{7}{4} = \frac{21}{12}$

$84 = 84$

### 1.2.6.3 Descomponer el antecedente:

$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

Ejemplo: Descomponer la proporción $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

$$\frac{3-4}{3} = \frac{9-12}{9}$$
$$\frac{-1}{3} = \frac{-3}{9}$$

$$-9 = -9$$

### 1.2.6.4 Descomponer el consecuente:

$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

Ejemplo: Descomponer $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

$$\frac{3-4}{4} = \frac{9-12}{12}$$

$$\frac{-1}{4} = \frac{-3}{12}$$

$$\frac{-1}{4} = \frac{-3}{12}$$

$$-12 = -12$$

### 1.2.6.5 Componer y descomponer a la vez:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

Ejemplo: Componer y descomponer a la vez la proporción:

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{3+4}{3-4} = \frac{9+12}{9-12}$$

$$\frac{7}{-1} = \frac{21}{-3}$$

$$\frac{7}{-1} = \frac{21}{-3}$$
$$-21 = -21$$

### 1.2.7 Media proporcional geométrica

En la proporción $a : x = x : b$, donde los términos *medios* son iguales, *x* se denomina media proporcional geométrica y se calcula como la raíz cuadrada del producto de los términos *extremos*:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

$$x^2 = ab$$

$$x = \pm\sqrt{ab}$$

Ejemplo: Calcular la media proporcional geométrica entre 3 y 12.

$$\frac{3}{x} = \frac{x}{12}$$

$$x^2 = 3 \cdot 12 = 36$$

$$x = \sqrt{36} = 6$$

Ejemplo: Calcular la media proporcional geométrica entre 49 y 169.

$$\frac{49}{x} = \frac{x}{169}$$

$$x^2 = 49 \cdot 169 = 8281$$

$$x = \sqrt{8281} = 91$$

### 1.2.8 Cuarta proporcional

Se denomina cuarta proporcional a cualquiera de los términos de una proporción.

Ejemplo: Calcular la cuarta proporcional de 7, 5 y 4

Se forma la proporción:

$\frac{7}{5} = \frac{4}{x}$

$7x = 20$

$x = \frac{20}{7}$

La cuarta proporcional es $\frac{20}{7}$
Comprobación:

$\frac{7}{5} = \frac{4}{\frac{20}{7}}$

$\frac{7}{5} = \frac{28}{20}$

$140 = 140$

### 1.2.9 Tercera proporcional

Se llama tercera proporcional a cualquiera de los extremos de una proporción geométrica.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$$

Donde $a$ es la tercera proporcional entre $b$ y $d$ o bien $d$ es la tercera proporcional entre $a$ y $b$.
Con $b \neq 0;\ d \neq 0$

Ejemplo: Determinar la tercera proporcional entre 4 y 12.

Tomando como término medio el 12, una tercera proporcional es:

$\frac{4}{12} = \frac{12}{x}$

$4x = 12 \cdot 12 = 144$

$x = \frac{144}{4} = 36$

Considerando como término medio el 4, otra tercera proporcional es:

$\frac{12}{4} = \frac{4}{x}$

$$12x = 4 \cdot 4 = 16$$

$$x = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

## 2 EJEMPLOS DE RAZONES, PROPORCIONES Y PROPORCIONALIDAD

Ejemplo: Los ángulos interiores de un triángulo son entre sí como $2:3:4$. Determina la medida de cada ángulo.

Solución:

$\alpha:\beta:\gamma = 2:3:4$

$\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\beta}{3} = \dfrac{\gamma}{4} = k$

$\alpha = 2k$

$\beta = 3k$

$\gamma = 4k$

Pero como, $\alpha + \beta + \gamma = 180$

$2k + 3k + 4k = 180$

$9k = 180 \Longrightarrow k = 20°$

De esta manera:

$\alpha = 2k = 2 \cdot 20 = 40°$
$\beta = 3k = 3 \cdot 20 = 60°$

$\gamma = 4k = 4 \cdot 20 = 80°$

$\alpha + \beta + \gamma = 40º + 60º + 80º = 180º$

Ejemplo: Calcular x, y, z en la serie $x:y:z = 4:7:10$ $si\ x + y - z = 5$.

Solución:

$x:y:z = 4:7:10$

$\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z}{10} = k$

Amplificando por -1 la tercera razón:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{-z}{-10} = k$$

Aplicando la propiedad de la proporción iterada:

$$\frac{x + y - z}{4 + 7 - 10} = k$$

Como x + y –z = 5

$$\frac{5}{4 + 7 - 10} = k$$

$$\frac{5}{1} = k$$

$$5 = k$$

Por lo tanto:

$$x = 4k = 4 \cdot 5 = 20$$

$$y = 7k = 7 \cdot 5 = 35$$

$$z = 10k = 10 \cdot 5 = 50$$

<u>Solución alternativa:</u>

$$x: y: z = 4: 7: 10$$

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{10} = k$$

$$x = 4k$$
$$y = 7k$$
$$z = 10k$$

Como: $x + y - z = 5$.

$$4k + 7k - 10k = 5.$$
$$k = 5$$

$$x = 4(5) = 20$$
$$y = 7(5) = 35$$
$$y = 10(5) = 50$$

Ejemplo: Si $x : y : z = 4 : 3 : 2$ y $2x + 4y - 3z = 28$, entonces el valor de y es:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 6
e) 8

Solución:

$x : y : z = 4 : 3 : 2$

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = k$$

Amplificando la primera razón por 2, la segunda por 4 y la tercera por -3:

$$\frac{2x}{8} = \frac{4y}{12} = \frac{-3z}{-6} = k$$

Aplicando la propiedad de la proporción iterada:

$$\frac{x + y - z}{8 + 12 - 6} = k$$

Como 2x +4 y –3z = 28

$$\frac{28}{8 + 12 - 6} = k$$

$$\frac{28}{14} = k$$

$$2 = k$$

Por lo tanto:

$$x = 4k = 4 \cdot 2 = 8$$

$$y = 3k = 3 \cdot 2 = 6$$

$$z = 2k = 2 \cdot 2 = 4$$

Por tanto, la alternativa correcta es la d).

<u>Solución alternativa:</u>

$x : y : z = 4 : 3 : 2$

$\frac{x}{4} = k \rightarrow x = 4k$

$\frac{y}{3} = k \rightarrow y = 3k$

$\frac{z}{2} = k \rightarrow z = 2k$

Reemplazando en: $2x + 4y - 3z = 28$

$2(4k) + 4(3k) - 3(2k) = 28$

$8k + 12k - 6k = 28$

$14k = 28$

$k = 2$

Como

$y = 3k$

$y = 3 \cdot 2 = 6$

Por consiguiente, la alternativa correcta es la c).

<u>Ejemplo</u>: Si $a : b : c = 1 : 2 : 5$, calcular $A = \frac{2ab - 5c^2}{3bc + a^2}$

Solución:

$a : b : c = 1 : 2 : 5$

$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5} = k$

$a = 1k$

$b = 2k$

$c = 5k$

$$A = \frac{2ab - 5c^2}{3bc + a^2}$$

$$A = \frac{2 \cdot k \cdot 2k - 5 \cdot 5k \cdot 5k}{3 \cdot 2k \cdot 5k + 1k \cdot 1k}$$

$$A = \frac{4k^2 - 125k^2}{30k^2 + k^2}$$

$$A = \frac{-121k^2}{31k^2} = -\frac{121}{31}$$

Ejemplo: La suma, la diferencia y el producto de dos números son entre sí como $5 : 3 : 16$, ¿Cuáles son esos números?

Solución:

Sean $x\ e\ y\ los\ números$

$x + y\ la\ suma\ de\ los\ números$
$x - y\ la\ diferencia\ de\ los\ números$
$xy\ el\ producto\ de\ los\ números$

$(x + y):(x - y):xy = 5:3:16$

Luego se tienen las siguientes identidades:

$$\frac{(x + y)}{5} = \frac{(x - y)}{3} = \frac{xy}{16}$$

Multiplicando cruzado en las dos primeras identidades:

$3(x + y) = 5(x - y)$
$3x + 3y = 5x - 5y$

$3x - 5x = -5y - 3y$

$-2x = -8y$

$2x = 8y$

$x = 4y$

Reemplazando este valor en la segunda y tercera identidad:

$$\frac{(x - y)}{3} = \frac{xy}{16}$$

$$\frac{(4y - y)}{3} = \frac{4y^2}{16}$$
$$\frac{3y}{3} = \frac{4y^2}{16}$$

$48y = 12y^2$

Dividiendo ambos miembros entre 12y:

$$\frac{48y}{12y} = \frac{12y^2}{12y}$$

$4 = y$

Reemplazando en
$x = 4y$
$x = 4 \cdot 4 = 16$

Por tanto: $x = 16 \; e \; y = 4$

<u>Ejemplo</u>: Tres números son entre sí como $5 : 4 : 3$. Si al triple del primero más el quíntuplo del segundo se le resta el doble del tercero, se obtiene 580. Entonces, el número menor es: (Pregunta en Guía de ejercicios Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

A) 20
B) 60
C) 80
D) 100
E) 120

Solución:

$x : y : z = 5 : 4 : 3$

$3x + 5y - 2z = 580$

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = k$$

$x = 5k \implies 3x = 15k$
$y = 4k \implies 5y = 20k$
$z = 3k \implies 2z = 6k$

$15k + 20k - 6k = 580$
$29k = 580$

$k = 20$
$x = 5k = 5 \cdot 20 = 100$
$y = 4k = 4 \cdot 20 = 80$
$z = 3k = 3 \cdot 20 = 60$

Por lo tanto, el número menor es $z = 60$, por lo que la alternativa correcta es B).

Ejemplo: *x* es inversamente proporcional a $y$. Cuando *x* vale 60, *y* vale 90. ¿Cuánto vale *x* cuando *y* vale 120? (Pregunta en Guía de ejercicios Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

A) 30
B) 40
C) 45
D) 60
E) 90

Solución: Se recuerda que dadas dos magnitudes *x* e *y*, se dice que *x* es inversamente proporcional a *y* si y solo si el producto entre un valor cualquiera de *x* y el correspondiente valor de *y* es constante, es decir:

$$xy = k$$

$$xy = k \Rightarrow y = \frac{k}{x}$$

$$90 = \frac{k}{60} \Rightarrow k = 5400$$

Si y = 120

$$120 = \frac{5400}{x} \Rightarrow x = \frac{5400}{120} = 45$$

Por tanto, la alternativa correcta es C).

Ejemplo: La medida de uno de los ángulos interiores de un triángulo es $81^0$. Si las medidas de los otros dos ángulos están en la razón 2 : 1, entonces el menor de los ángulos del triángulo mide: (Pregunta en Guía de ejercicios Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

A) $22^0$
B) $33^0$
C) $66^0$
D) $81^0$
E) $99^0$

Solución: Sean $\alpha\ y\ \beta$ los otros dos ángulos. Entonces:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{1}$$

$$\alpha + \beta + 81 = 180 \Longrightarrow \alpha + \beta = 99$$

$$\alpha = 99 - \beta$$

$$\frac{99 - \beta}{\beta} = \frac{2}{1}$$

$$99 - \beta = 2\beta \Longrightarrow 3\beta = 99 \Longrightarrow \beta = 33$$

$$\alpha + 33 + 81 = 180 \Longrightarrow \alpha = 66$$

Por lo tanto, el ángulo menor es $\beta = 33\ grados$. Alternativa correcta es la B).

Ejemplo: Una persona compra una pieza de cinta que luego corta en la razón 2:3:6. Si el trozo más largo mide 18 cm. ¿Cuánto mide la pieza de cinta? (Pregunta en Guía de ejercicios Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

A) 24 m
B) 11m
C) 23m
D) 38m
E) 33m

Solución:

$$x : y : z = 2 : 3 : 6$$

Según esta proporción, z es el trozo más largo: z = 18.

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = k$$

$$\frac{z}{6} = k \Longrightarrow \frac{18}{6} = k \Longrightarrow k = 3$$

$$\frac{x}{2} = k \Longrightarrow x = 2k = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\frac{y}{3} = k \Longrightarrow y = 3k = 3 \cdot 3 = 9$$

$$x + y + z = 6 + 9 + 18 = 33$$

Por consiguiente, la alternativa correcta es la E).

Ejemplo: Al dividir 253 en partes proporcionales a los números 2,5,7 y 9, ¿Cuál es la parte menor? (Pregunta en Guía de ejercicios Colegio SG)

A) 11
B) 22
C) 77
D) 99
E) 121

Solución:
Sean $m. n. o, p$ las partes proporcionales:

$N = 253$
$w = 2$
$x = 5$
$y = 7$
$z = 9$

$S = 2 + 5 + 7 + 9 = 23$

$$m = \frac{253}{23} \cdot 2 = 22$$

$$n = \frac{253}{23} \cdot 5 = 55$$

$$p = \frac{253}{23} \cdot 7 = 77$$

$$q = \frac{253}{23} \cdot 9 = 99$$

Por consiguiente, la alternativa correcta es la B).

Ejemplo: Se debe repartir US$45.000 entre los hermanos Manuel y Tomás en partes proporcionales a sus edades. Si éstas son 6 y 9 años, respectivamente, entonces la diferencia positiva de lo que reciben, expresadas en dólares es: (Pregunta en Guía de ejercicios Colegio SG)

A) 5000
B) 9000
C) 15000
D) 27000
E) 36000

Solución:

Sean $m = Manuel\ de\ 6\ años\ y\ n = Tomás\ de\ 9\ años$

$N = 45.000$
$x = 6$
$y = 9$

$S = 6 + 9 = 15$

$$m = \frac{45000}{15} \cdot 6 = 3000 \cdot 6 = 18.000$$

$$n = \frac{45000}{15} \cdot 9 = 27.000$$

La diferencia positiva es $27.000 - 18.000 = 9.000$. Por consiguiente, la alternativa correcta es la B).

<u>Ejemplo</u>: La media proporcional geométrica entre 9 y 16, es: (Pregunta en Guía de ejercicios Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

A) 12
B) 7
C) 144
D) 25
E) Ninguna de las anteriores

Solución:

$\sqrt{9 \cdot 19} = \sqrt{144} = 12$

Por lo tanto, la alternativa correcta es A).

<u>Ejemplo</u>: Si $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, entonces ¿cuáles de las siguientes igualdades es (son) verdadera (s)? (Pregunta en Guía de ejercicios Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

I) $\frac{a+b}{b} = \frac{m+n}{n}$
II) $\frac{a-b}{b} = \frac{m-n}{n}$
III) $\frac{an}{bm} = 1$

Solución: I) es verdadera por el concepto de componer una proporción.

II) También es verdadera por el concepto de descomposición de una proporción.

III) también es verdadera, porque $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Longrightarrow an = bm$ y dividiendo ambos miembros de la igualdad por *bm*, queda $\frac{an}{bm} = 1$. {Por lo tanto, la alternativa correcta es la E).

Ejemplo: Dos personas fueron a cobrar sus sueldos y, considerando ambos, hacen un total de \$17.500. Si se sabe que sus sueldos están en la razón 3 : 4. ¿Cuánto cobró la persona que tiene mayor sueldo? (Pregunta en Guía de ejercicios Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

Solución:

$x : y = 3 : 4$

La persona de mayor sueldo es *y*.

$\frac{x}{3} = k \Longrightarrow x = 3k$

$\frac{y}{4} = k \Longrightarrow y = 4k$

$x + y = 17.500$

$3k + 4k = 17.500$

$7k = 17500 \Longrightarrow k = 2.500$

$x = 3k \Longrightarrow x = 3 \cdot 2.500 = 7.500$

$y = 4k \Longrightarrow y = 4 \cdot 2.500 = 10.000$

*y* representa al sueldo mayor y es 10.000.

Ejemplo: Un rectángulo mide 24 cm de largo y 8 cm de ancho. ¿Cuál es la razón entre el ancho y el largo? (Pregunta en Guía de ejercicios Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

A) $3 : 1$
B) $2 : 3$
C) $1 : 3$
D) $3 : 2$
E) $1 : 6$

Solución: Sea *x* el largo e *y* el ancho.

$$\frac{y}{x} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

Alternativa correcta: C)

Ejemplo: En una bolsa hay m fichas azules y amarillas. Si hay p fichas azules, ¿en qué razón están las amarillas y el total de fichas? (Pregunta en Guía de ejercicios Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

A) $m : p$
B) $p : m$
C) $(m - p) : p$
D) $(m + p) : m$
E) $(m - p) : m$

Solución:

p = fichas azules
m = fichas azules y amarillas

Por lo tanto:

(m – p) = fichas amarillas

La razón solicitada es: $\frac{m-p}{m}$

Alternativa correcta: E)

Ejemplo: Si dos magnitudes a y b son inversamente proporcionales, ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera (s)? (Pregunta en Guía de ejercicios Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

I) $ab = constante$
II) $a/b = constante$
III) El gráfico a versus b corresponde a una línea recta.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y III
E) I, II y III

Solución: Supongamos que a = cantidad de trabajadores y b= cantidad de días necesarios para hacer una obra.

| a (trabajadores) | b (días necesarios) | $a \cdot b$ |
|---|---|---|
| 1 | 32 | 32 |
| 2 | 16 | 32 |
| 4 | 8 | 32 |
| 8 | 4 | 32 |

Cuando las variables consideradas son inversamente proporcionales, se debe cumplir que a*b = k (constante), en el ejemplo, el producto da siempre 32, constante. Por lo tanto, la proposición I) es verdadera.

La proposición II) es falsa porque si $a$ y $b$ son inversamente proporcionales, su producto debe ser constante, no su cociente.

Si se grafica los datos de la tabla se verá que no es una línea recta sino una curva. Por lo tanto, la única alternativa correcta es la A).

Ejemplo: Si una llave llena un estanque en 2 horas y otra lo hace en 3 horas, entonces, ¿en cuántas horas lo llenarán juntas? (Pregunta en Guía de ejercicios Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

A) 5 horas
B) 2,5 horas
C) 1,5 horas
D) 1,2 horas
E) 0,75 horas

Se aplica la que suele denominarse la *fórmula del trabajo en equipo*:

En 1 hora, la primera llave llena la mitad del estanque y la segunda llave llena un tercio del estanque: se escribe, así: Siendo T el tiempo en que se demoran juntas:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

Multiplicando cruzado o elevando a -1 ambos miembros:

$$T = \frac{6}{5} = 1{,}2\ horas$$

Alternativa correcta: D)

Ejemplo: En un curso de 36 alumnos, la mitad son hombres, la sexta parte de las mujeres son altas y la tercera parte de los hombres son bajos. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes es (son) verdadera (s)? Hay exactamente:

I) 12 hombres que no son bajos
II) 3 mujeres que son altas
III) La razón entre los hombres bajos y las mujeres altas es $2 : 1$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I y II
E) I, II y III

(Pregunta en Guía de ejercicios Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

Solución:

Total, alumnos = 36
Hombres: $\frac{1}{2} \cdot 36 = 18$
Mujeres: $\frac{1}{2} \cdot 36 = 18$
Mujeres altas: $\frac{1}{6} \cdot 18 = 3$
Hombres bajos: $\frac{1}{3} \cdot 18 = 6$

I) 18-6=12 hombres que no son bajos. Por lo tanto, I) es verdadera.
II) Ya se calculó que son 3 las mujeres altas. Por consiguiente, II) es verdadera.
III) Hombres bajos/mujeres altas = $\frac{6}{3} = \frac{2}{1}$. Por lo tanto, III) es verdadera.

Entonces, la alternativa correcta es la E).

Ejemplo: ¿Cuál (es) de las siguientes expresiones forma (n) una proporción?

I) $2{,}5 : 1 = 5 : 2$
II) $0{,}3 : 0{,}2 = 2 : 3$
III) $\frac{3}{4} : 2 = \frac{1}{2} : \frac{4}{3}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I y II
E) I y III

Solución:
Se aplica la propiedad fundamental de las proporciones, es decir, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

I) $2{,}5 : 1 = 5 : 2$
$2{,}5 \cdot 2 = 1 \cdot 5$
5 = 5. Por lo tanto, I) es verdadera.

II) $0{,}3 : 0{,}2 = 2 : 3$
$0{,}3 \cdot 3 \neq 0{,}2 \cdot 2$
$0{,}9 \neq 0{,}4$. Por lo tanto, II) es falsa.

III) $\frac{3}{4} : 2 = \frac{1}{2} : \frac{4}{3}$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{12}{12} = \frac{2}{2}$$

1=1. Proposición verdadera.

Por consiguiente, la alternativa correcta es E).

Ejemplo: Las edades de dos personas están en la razón $3 : 4$. Se puede determinar las edades de cada una si,

1) La diferencia entre sus edades es de 5 años
2) Sus edades suman 35 años.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) (1) y (2) juntas
D) (1) o (2), cada una por si sola
E) Se requiere información adicional.

(Pregunta en Guía de ejercicios Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

Solución: Sean *x* e *y* las edades de las personas:

$$x : y = 3 : 4$$

$$\frac{x}{3} = k \Longrightarrow x = 3k$$

$\frac{y}{4} = k \Longrightarrow y = 4k$

1) $y - x = 5 \Longrightarrow 4k - 3k = 5 \Longrightarrow k = 5$

Por tanto, x = 3 · 5 = 15, e y = 4 · 5 = 20

2) $y + x = 35 \;\Longrightarrow 4k + 3k = 35 \Longrightarrow k = 5$

Por tanto,

x = 3 · 5 = 15
y = 4 · 5 = 20

Como en 1) y 2) se obtienen las mismas edades, éstas se pueden calcular con 1) o 2) por si sola. Alternativa correcta es D).

Solución alternativa:

1)

$\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$

y-x = 5
y-5 = x

$\frac{y-5}{y} = \frac{3}{4}$

$4y - 20 = 3y$
$4y - 3y = 20 \Longrightarrow y = 20$
$20 - x = 5 \Longrightarrow x = 15$

2)

$\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$

$x + y = 35$
$x = 35 - y$
$\frac{35 - y}{y} = \frac{3}{4}$

$140 - 4y = 3y$
$140 = 7y \Longrightarrow y = 20$
$x + 20 = 35 \Longrightarrow x = 15$

Ejemplo: Dada la serie de razones $10 : x : 5 = 6 : 3 : y$, el valor de x – y es:

A) 5
B) 3
C) 2
D) -2
E) No se puede calcular

(Ejercicio anillado guías Colegio SG).

Solución:

$$\frac{10}{6} = k$$

$$\frac{x}{3} = k \Rightarrow x = 3k \Rightarrow x = 3 \cdot \frac{10}{6} = 5$$

$$\frac{5}{y} = k \Rightarrow \frac{5}{y} = \frac{10}{6} \Rightarrow 10y = 30 \Rightarrow y = 3$$

Por consiguiente, x – y = 5 – 3 = 2. Alternativa correcta es C).
Solución alternativa:

$$\frac{10}{6} = \frac{x}{3} \Rightarrow 6x = 30 \Rightarrow x = 5$$

$$\frac{10}{6} = \frac{5}{y} \Rightarrow 10y = 30 \Rightarrow y = 3$$

$$x - y = 5 - 3 = 2$$

Ejemplo: Se sabe que *ab* es directamente proporcional con *c*. Si tanto *a* como *b* aumentan en un 10%, ¿qué sucede con c?

A) Aumenta en un 10%
B) Disminuye en un 10%
C) Aumenta en un 20%
D) Disminuye en un 20%
E) Aumenta en un 21%

(Ejercicio anillado guías Colegio SG).

Solución:

Hay que recordar que dos cantidades x e y son directamente proporcionales si $\frac{x}{y} = k$
Aquí x = ab, e y = c

$$\frac{ab}{c} = k$$

*a* aumentado en 10% es: $a + 0{,}10$a
*b* aumentado en 10% es: $b + 0{,}10b$

$$\frac{(a + 0{,}10a)(b + 0{,}10b)}{c}$$
$$\frac{a(1 + 0{,}10)b(1 + 0{,}10)}{c}$$

$$\frac{1{,}21ab}{c}$$

Para que esta razón se mantenga constante = k, el consecuente debe multiplicarse por 1,21, es decir, c debe aumentar en 21%.

c aumentado en 21% es $c + 0{,}21c = c\,(1 + 0{,}21) = 1{,}21c$

De esta manera, la razón se mantiene constante:

$$\frac{1{,}21ab}{1{,}21c} = \frac{ab}{c} = k$$

Por lo tanto, la alternativa correcta es E).

<u>Ejemplo</u>: Repartir $15.000 entre Juan José y José Pablo, inversamente proporcional a sus edades, 8 y 12 años, respectivamente>

Método 1:

Sea *a* lo que recibe Juan José y *b* lo que percibe José Pablo.

$$\frac{a}{\frac{1}{8}} = \frac{b}{\frac{1}{12}} = \frac{a + b}{\frac{1}{8} + \frac{1}{12}} = \frac{15.000}{\frac{3+2}{24}} = \frac{15.000}{\frac{5}{24}} = \frac{(15.000)(24)}{5} = 72.000$$

$8a = 12b = 72.000$

$8a = 72.000 \Rightarrow a = \frac{72.000}{8} = \$9.000$

$12b = 72.000 \Rightarrow b = \frac{72.000}{12} = \$6.000$

Es decir, Juan José recibe $9.000 y José Pablo $6.000.

Método 2:

$\frac{x}{8} + \frac{x}{12} = 15.000$

$\frac{3x + 2x}{24} = 15.000$

$\frac{5x}{24} = 15.000$

$5x = (15.000)(24) = 360.000$

$x = \frac{360.000}{5} = 72.000$

$Juan\ José = \frac{72.000}{8} = \$9.000$

$José\ Pablo = \frac{72.000}{12} = \$6.000$

<u>Ejemplo</u>: Carlos tiene 40 años y Luis 60 años. ¿Hace cuántos años sus edades fueron como 3: 5?

<u>Solución:</u> Como se pregunta hace cuántos años, tanto a 40 como a 60 habrá que restarle una cantidad de años desconocida, x.

$\frac{40 - x}{60 - x} = \frac{3}{5}$

$200 - 5x = 180 - 3x$
$20 = 2x$

$x = 10$

Es decir, hace 10 años sus edades fueron como $3\!:5$.

Comprobación:

Hace 10 años, Carlos tenía $40 - 10 = 30$ y Luis tenía $60 - 50$.

$$\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

Ejemplo: El producto de dos números es 250 y están en la relación de 5 es a 2. Hallar el doble del mayor.

Sea
$x = número\ mayor$
$y = número\ menor$

Se plantea un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{5}{2} \\ xy &= 250 \end{aligned}\right\}$$

$$5y = 2x$$

$$y = \frac{2x}{5}$$

Sabiendo que
$xy = 250$

$$x \cdot \frac{2x}{5} = 250$$

$$2x^2 = 250 \cdot 5$$
$$x^2 = \frac{1250}{2}$$
$$x^2 = 625$$

$$x = \sqrt{625} = 25$$

Por tanto, el doble del número mayor es $25 \cdot 2 = 50$

Ejemplo: El producto de los términos extremos de una proporción es 36 y la suma de los términos medios es 12. Hallar la diferencia entre los términos medios.

Sea la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$ad = 36$
$b + c = 12$
Pero
$ad = bc = 36$

Se plantea el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} b + c = 12 \\ bc = 36 \end{array}\right\}$$

$$b = \frac{36}{c}$$

$$\frac{36}{c} + c - 12 = 0$$

$$36 + c^2 - 12c = 0$$

$$c^2 - 12c + 36 = 0$$

$$c = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2}$$

$$c = \frac{12 \pm 0}{2} = 6$$

Como:
$b + c = 12$
$b + 6 = 12$
$b = 12 - 6 = 6$

Por tanto, la diferencia entre los términos medios es $6 - 6 = 0$

Ejemplo: El promedio de dos números es 3. Si se duplica el primero y se quintuplica el segundo, el nuevo promedio es 9. Calcular la razón de los números originales.
Sean x e y los números originales.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+y}{2}=3\\[2ex]\dfrac{2x+5y}{2}=9\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y=6\\2x+5y=18\end{array}\right\}$$

$x = 6 - y$

$2(6 - y) + 5y = 18$

$12 - 2y + 5y = 18$

$12 + 3y = 18$

$3y = 6$

$\boldsymbol{y = 2}$

$x = 6 - y$
$x = 6 - 2$

$\boldsymbol{x = 4}$

En consecuencia, la razón de los números originales es: $\frac{x}{y} = \frac{4}{2} = 2$

# 3 REGLA DE TRES SIMPLE

## 3.1 Concepto:

Es la operación que se utiliza para encontrar el cuarto término de una proporción. A la parte que contiene los datos se acostumbra a denominar *supuestos* y a la que contiene el dato desconocido se le llama *pregunta*.

Ejemplo: Si 10 calculadoras cuentas $50.000, ¿cuánto cuestan 20 calculadoras?

Supuesto: 10 calculadoras cuentas $50.000
Pregunta: ¿cuánto cuestan 20 calculadoras?

| Calculadoras | Valor $ |
|---|---|
| 10 | 50.000 |
| 20 | x |
| Directa | |

Como al aumentar la cantidad de calculadoras el valor total también aumenta, esas cantidades son directamente proporcionales.

$$\frac{10}{20} = \frac{50.000}{x}$$

Se multiplica en cruz:

$$10x = 20 \cdot 50.000$$
$$10x = 1.000.000$$

$$x = \frac{1.000.000}{10} = 100.000$$

Las 20 calculadoras cuentas $100.000.

## 3.2 Ejercicios de regla de tres simple

Ejercicio: (Regla de tres simple inversa)

A la velocidad de $30\,\frac{Km}{h}$ un automóvil emplea 8 ¼ horas en ir de una ciudad a otra. ¿Cuánto tiempo menos se hubiera tardado si la velocidad hubiera sido triple? (Aritmética de Baldor, p. 529).

| Velocidad | Horas |
|---|---|
| 30 | 8,25 |
| 90 | x |
| Inversa | |

Solución razonada:

Si el automóvil va a $30\,\frac{km}{h}$ significa que en 1 hora recorre 30 Km, por lo que en 8,25 horas recorrerá $8{,}25 \cdot 30 = 247{,}5\ Km$. Ahora, si en 1 hora se recorren 90 Km, para recorrer 660 km se necesitará $\frac{247{,}5}{90} = 2{,}75\ horas$.

Solución alternativa:

Identificación de proporcionalidades:

Como a mayor velocidad del automóvil se incurrirá en menos tiempo para hacer el recorrido, la relación es inversa.

Planteamiento aritmético:

$$\frac{90}{30} = \frac{8{,}25}{x}$$

Se multiplica en cruz:

$$90x = 30 \cdot 8{,}25$$

$$x = \frac{30 \cdot 8{,}25}{90}$$

$$x = 2{,}75$$

Si la velocidad se triplica el automóvil se demora 2,75 horas en vez de 8,75 horas.

Ejercicio: (Regla de tres simple inversa)

Una guarnición de 1300 hombres tiene víveres para 4 meses. Si quiere que los víveres duren 10 días más, ¿Cuántos hombres habrá que rebajar de la guarnición? (Aritmética de Baldor, p. 529)

| Hombres | Meses en días |
|---|---|
| 1300 | 120 |
| x | 130 |
| | Inversa |

Solución:

Identificación de proporcionalidades:

Como a más hombres, menos tiempo duraran los víveres, la relación entre ambas variables es inversa.

Planteamiento aritmético:

$$\frac{130}{120} = \frac{1300}{x}$$

Se multiplica en cruz:

$$130x = 1300 \cdot 120$$

$$x = \frac{1300 \cdot 120}{130}$$

$$x = 1200$$

Como había 1300 hombres en la guarnición, éstos se deben disminuir en $1300 - 1200 = \mathbf{100}$ hombres.

Ejercicio: (regla de tres simple directa)

La sombra de un hombre en una cierta hora es 5 m, teniendo una estatura de 1,80 m. ¿Cuánto medirá una jirafa si da una sombra de 12,5 m? (Prueba Colegio SG, 8º Básico).

Solución:

| Sombra (m) | Estatura (m) |
|---|---|
| 5 | 1,80 |
| 12,5 | x |
| Directa | |

Solución:

Identificación de proporcionalidades:

Como a mayor estatura mayor sombra, la relación entre ambas variables es directa.

Planteamiento aritmético:

$$\frac{5}{12,5} = \frac{1,80}{x}$$

Se multiplica en cruz:

$$5x = 12.5 \cdot 1,80$$

$$x = \frac{12,5 \cdot 1,80}{5}$$

$$x = 4,5$$

Si la jirafa da una sombre de 12,5 metros es porque su estatura es de 4,5 m.

Ejercicio: (regla de tres simple directa)

En una fábrica una máquina produce 2000 pernos por cada 50 Kg de acero utilizado. A esta tasa, ¿Cuántos pernos producirá la máquina si se utilizan 225 Kg de acero? (Pregunta en Guía de ejercicios Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

A) 2.225
B) 4.500
C) 8.000
D) 9.000
E) 11.250

Solución:

| Pernos | Acero (Kg) |
|---|---|
| 2000 | 50 |
| x | 225 |
| | Directa |

Solución:

Identificación de proporcionalidades:

Como a mayor cantidad de pernos se requerirá de una mayor cantidad de acero, la relación entre ambas variables es directa.

Planteamiento aritmético:

$$\frac{50}{225} = \frac{2000}{x}$$

Se multiplica en cruz:

$$50x = 2000 \cdot 225$$

$$x = \frac{2000 \cdot 225}{50}$$

$$x = 9000$$

Si la máquina utiliza 225 Kg de acero producirá 9000 pernos. Por consiguiente, la alternativa correcta es la D).

Ejercicio: (regla de tres simple inversa)

Un ciclista se demora 8 horas en recorrer el camino de Antofagasta a Calama a una rapidez constante de 30 Km/h. ¿A qué rapidez deberá ir para demorar 5 horas? (Pregunta en Guía de ejercicios sobre Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

A) $19\ Km/h$
B) $40\ Km/h$
C) $48\ Km/h$
D) $50\ Km/h$
E) $90\ Km/h$

Solución:

| Horas | Rapidez (Km/h) |
|---|---|
| 8 | 30 |
| 5 | x |
| Inversa | |

Solución:

Identificación de proporcionalidades:

Como a mayor velocidad del automóvil se incurrirá en menos tiempo utilizado en hacer el recorrido, esa relación es inversa.

Planteamiento aritmético:

$$\frac{5}{8} = \frac{30}{x}$$

Se multiplica en cruz:

$5x = 8 \cdot 30$

$x = \frac{8 \cdot 30}{5}$

$x = 48$

Para demorarse 5 horas el ciclista debe aumentar su rapidez a $\mathbf{48\frac{Km}{h}}$. Por tanto, la alternativa correcta es la C).

<u>Ejemplo:</u> (regla de tres simple directa)

Si dos ciudades se encuentran a 180 Km de distancia, entonces en un mapa a escala $1 : 6000$ estarán:

A) 1 m
B) 3m
C) 10 m
D) 30 m
E) 300 m

(Pregunta en Guía de ejercicios sobre Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

La escala en un mapa es una razón donde el antecedente indica el valor del plano y el consecuente el valor en la realidad. La escala $\mathbf{1 : 6000}$ significa que 1 unidad del mapa equivale a 6000 unidades de la realidad (la unidad de la realidad, en este ejemplo, es el Km). Por lo tanto, se puede formar la siguiente regla de tres simple:

| Mapa | Realidad (Km) |
|---|---|
| 1 | 6000 |
| x | 180 |
| | Directa |

Solución:

Identificación de proporcionalidades:

Como a mayor distancia en el plano, mayor distancia en la realidad, la relación entre ambas variables es directa.
Planteamiento aritmético:

$\frac{1}{x} = \frac{6000}{180}$

Se multiplica en cruz:

$6000x = 1 \cdot 180$

$x = \frac{1 \cdot 180}{6000}$

$x = 0{,}03$

La distancia en el plano de las dos ciudades será de $\boldsymbol{0{,}03Km, o\ 30m}$. Por consiguiente, la alternativa correcta es la D).

<u>Ejercicio</u>: (regla de tres simple directa)

En un mapa, la distancia entre dos ciudades es de 6,1 cm. Si la escala del mapa es 1:2500000, ¿Cuál es la distancia real entre ellas?

Solución:

| | |
|---|---|
| 1 | 2500000 |
| 6,1 | x |
| Directa | |

Identificación de proporcionalidades:

Como hay una proporcionalidad directa:

$\frac{1}{6{,}1} = \frac{2500000}{x}$

$x = 2500000 \cdot 6$

$x = 15.250.000\ cm = 152.500\ m = 152{,}5\ Km$

<u>Ejercicio</u>: (regla de tres simple inversa)

Un automovilista recorre un camino a $50Km/h$ demorándose 2 horas en llegar a la ciudad de destino. ¿Cuánto tiempo tardará en hacer el mismo trayecto a una velocidad de 100Km/h?

Solución:

| Velocidad $\frac{\boldsymbol{Km}}{\boldsymbol{h}}$ | Tiempo empleado (horas) |
|---|---|
| 50 | 2 |
| 100 | x |
| Inversa | |

Solución razonada:

Si en 1 hora el automovilista recorre $50Km$, en 2 horas recorrerá $50 \cdot 2 = 100\ Km$, por lo que si va ahora a $100\frac{Km}{h}$ se demorará solo 1 hora en recorrerlo.

Solución alternativa:

Identificación de proporcionalidades:

Como a mayor velocidad, menor tiempo, la relación entre ambas variables es inversa.

Planteamiento aritmético:

$$\frac{100}{50} = \frac{2}{x}$$

Se multiplica en cruz:

$$100x = 50 \cdot 2$$

$$x = \frac{50 \cdot 2}{100}$$

$$x = 1$$

El automóvil, al aumentar la velocidad de $50Km/h$ a $100Km/h$ el tiempo empleado se redujo de 2 horas a 1 hora.

<u>Ejercicio</u>: (regla de tres simple directa)

Un automóvil gasta 9 litros de gasolina cada $120Km$. Si en el estanque le quedan 6 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorre?
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 138.

Solución:

| Gasolina (litros) | Camino recorrido (Km) |
|---|---|
| 9 | 120 |
| 6 | x |
| Directa | |

Solución:

Identificación de proporcionalidades:

Como a mayor distancia recorrida, mayor consumo de gasolina, la relación entre ambas variables es directa.

Planteamiento aritmético:

$$\frac{9}{6} = \frac{120}{x}$$

Se multiplica en cruz:

$$9x = 120 \cdot 6$$
$$x = \frac{120 \cdot 6}{9}$$

$$x = 80$$

Con 6 litros de gasolina, el automóvil podrá recorrer $\boldsymbol{80Km}$.

<u>Ejercicio</u>: Un grupo de 45 estudiantes contrata un autobús para ir a un evento y calculan que cada uno debe pagar \$50; finalmente solo asisten 30 estudiantes, cuanto deberá pagar cada uno?
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 139

Solución razonada:

Para resolver este problema, primero hay que calcular el costo total del autobús. Si 45 estudiantes iban a pagar \$50 cada uno, el costo total es: $45 \cdot 50 = 2250$. Como la cantidad de estudiantes que realmente asistieron fueron 30, y el costo pactado del traslado fue de 2250, cada uno de ellos deberá pagar: $\boldsymbol{\frac{2250}{30} = \$75.}$

<u>Ejercicio</u>: (regla de tres simple inversa)

Si 4 hombres terminan un trabajo en 63 días ¿cuántos más deben añadirse a los primeros para concluir el mismo trabajo en 28 días?
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 138

Solución:

| Hombres | Días |
|---|---|
| 4 | 63 |
| x | 28 |
| | Inversa |

<u>Solución:</u>

Identificación de proporcionalidades:
Como a mayor número de hombres el trabajo se hará en menos tiempo, la relación entre ambas variables es inversa.

Planteamiento aritmético:

$$\frac{4}{x} = \frac{28}{63}$$

Se multiplica en cruz:

$$28x = 63 \cdot 4$$

$$x = \frac{63 \cdot 4}{28}$$

$$x = 9$$

Para hacer el trabajo en 28 días se necesitan 9 hombres, es decir $\mathbf{9 - 4 = 5}$ adicionales para concluir el mismo trabajo.

# 4 REGLA DE TRES COMPUESTA

## 4.1 Concepto:

Se utiliza cuando se tiene más de cuatro cantidades directa o inversamente proporcionales.

Ejemplo: Si 24 motocicletas repartidoras de pizzas gastan $27.360 en bencina durante 30 días trabajando 8 horas diarias, ¿cuánto dinero se deberá pagar por concepto de bencina para 18 motocicletas que trabajan 10 horas diarias durante 6 meses? (considere meses de 30 días).

Supuesto: 24 motocicletas repartidoras de pizzas gastan $27.360 en bencina durante 30 días trabajando 8 horas diarias.
Pregunta: ¿cuánto dinero se deberá pagar por concepto de bencina para 18 motocicletas que trabajan 10 horas diarias durante 6 meses?

| Motocicletas | Gasto en $ | Días | Horas |
|---|---|---|---|
| 24 | 27360 | 30 | 8 |
| 18 | x | 180 | 10 |
| Razón directa | | Razón directa | Razón directa |

Identificación de proporcionalidades: Hay que ver si hay una relación directa o inversa de cada una de las variables con respecto a la que tiene la incógnita:

- A mayor cantidad de motocicletas mayor gasto: Razón directa
- A mayor cantidad de días mayor gasto: Razón directa
- A mayor cantidad de horas de uso mayor gasto: Razón directa

Planteamiento aritmético:

Se multiplican las razones que se forman y se igualan a la razón donde está la incógnita:

$$\frac{24}{18} \cdot \frac{30}{180} \cdot \frac{8}{10} = \frac{27360}{x}$$

$$\frac{5760}{32400} = \frac{27360}{x}$$

$$5760x = 27360 \cdot 32400 = 886464000$$

$$x = \frac{886464000}{5760} = 153900$$

El costo en bencina solicitado es de $153.900.

Solución razonada:

1. Costo de bencina por motocicleta por día:

$Costo\ total = 27{,}360$ (para 24 motocicletas durante 30 días)

$Costo\ por\ día = \frac{27360}{30} = 912$ (costo diario para las 24 motocicletas)

$Costo\ diario\ por\ motocicleta$: $\frac{912}{24} = 38$

2. Costo por hora por motocicleta:

$$\frac{38}{8} = 4{,}75$$

El costo diario para 10 horas:

$$4{,}75 \cdot 10 = 47{,}5$$

3. Costo total para 18 motocicletas trabajando 10 horas diarias:

$$18 \cdot 47{,}5 = 855$$

4. Costo total para 6 meses (180 días):

$$855 \cdot 180 = 153.900$$

Por tanto, el costo total por concepto de bencina para 18 motocicletas que trabajan 10 horas diarias durante 6 meses es $153.900.

### 4.2 Ejercicios de regla de tres compuesta

Ejercicio: Cinco obreros trabajando seis horas diarias construyen un muro en dos días. ¿Cuánto tardarán cuatro obreros trabajando siete horas diarias?

Solución:

| Obreros | Horas | Días |
|---|---|---|
| 5 | 6 | 2 |
| 4 | 7 | x |
| Inversa | Inversa | |

Identificación de proporcionalidades:

- Hay una relación inversa entre la cantidad de obreros y el número de días, es decir, si aumenta el número de obreros se demorarán menos días en terminar la obra. Por ello, hay una relación inversa.
- Hay una relación inversa entre las variables horas y días, porque mientras más horas se trabajen menos días se demorarán los obreros en hacer la obra.

Planteamiento aritmético:

Se multiplican las razones, pero invertidas, porque son razones inversas, y se igualan a la razón donde está la incógnita:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{28}{30} = \frac{2}{x}$$

$$28x = 30 \cdot 2$$

$$28x = 60$$

$$x = \frac{60}{28} = 2{,}14$$

Los obreros se demorarán 2,14 días trabajando 7 horas diarias.

<u>Ejercicio</u>: Cinco autobuses transportan 800 pasajeros en cuatro viajes. ¿Cuántos viajes son necesarios para transportar 400 pasajeros usando dos buses?

Solución:

| Autobuses | Pasajeros | Viajes |
|---|---|---|
| 5 | 800 | 4 |
| 2 | 400 | x |
| Inversa | Directa | |

Identificación de proporcionalidades:

- Hay una relación inversa entre la cantidad de autobuses y el número de viajes, es decir, si aumenta el número de autobuses se necesitan menos viajes.
- Entre las variables pasajeros y viajes hay una relación directa, porque mientras más sea la cantidad de pasajeros, más viajes se necesitará hacer.

Planteamiento aritmético:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{800}{400} = \frac{4}{x}$$

$$\frac{1600}{2000} = \frac{4}{x}$$

$$1600x = 2000 \cdot 4$$

$$1600x = 8000$$

$$x = \frac{8000}{1600} = 5$$

Para transportar 400 pasajeros con dos buses se necesita hacer 5 viajes.

<u>Ejercicio</u>: Se emplean 10 hombres durante 5 días, trabajando 4 horas diarias, para cavar una zanja de 10 metros de largo, 6 metros de ancho y 4 metros de profundidad. ¿Cuántos días necesitarán 6 hombres, trabajando 3 horas diarias, para cavar otra zanja de 15 metros de largo, 3 metros de ancho y 8 metros de profundidad, en un terreno de doble dificultad?

Solución:

| Hombres | Días | Horas | Metros largo | Metros ancho | Metros profundidad | Dificultad |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 5 | 4 | 10 | 6 | 4 | 1 |
| 6 | x | 3 | 15 | 3 | 8 | 2 |
| Inversa | | Inversa | Directa | Directa | Directa | Directa |

Identificación de proporcionalidades:

- A más hombres trabajando, menos días. Relación inversa.
- A más horas diarias de trabajo, menos días se tardaría. Relación inversa.
- A más metros de largo, más días. Relación directa.
- A más metros de ancho, más días. Relación directa.
- A más metros de profundidad, más días. Relación directa.
- A más dificultad, más días. Relación directa.

Planteamiento aritmético:

Paso 5: $\boldsymbol{\frac{6}{10} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{x}}$

$$\frac{4320}{28800} = \frac{6}{x}$$

$4320x = 28899 \cdot 6$

$x = \frac{172800}{4320}$

$x = 40$

Se necesitarán 40 días.

Ejercicio: 8 hombres han cavado en 20 días una zanja de 50 metros de largo, 4 metros de ancho y 2 metros de profundidad. ¿En cuánto tiempo hubieran cavado la zanja 6 hombres menos? (Aritmética de Baldor, p. 530).

Solución:

| Hombres | Días | Metros largo | Metros ancho | Metros profundidad |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 20 | 50 | 4 | 2 |
| 2 | x | 50 | 4 | 2 |
| Inversa | | Directa | Directa | Directa |

Identificación de proporcionalidades:

- A más hombres trabajando, menos días.  Relación inversa.
- A más metros de largo, más días. Relación directa.
- A más metros de ancho, más días. Relación directa.
- A más metros de profundidad, más días. Relación directa.

Planteamiento aritmético:

Paso 5: $\mathbf{\frac{2}{8} \cdot \frac{50}{50} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{2}{2} = \frac{20}{x}}$

$\frac{800}{3200} = \frac{20}{x}$

$800x = 3200 \cdot 20$

$x = \frac{64000}{800} = 80$

Se necesitarán 80 días para hacer la excavación.

Ejercicio:

Si nueve personas ensamblan 3 máquinas en 4 días, ¿Cuántos días demorarán 15 personas en ensamblar 5 máquinas en condiciones similares de trabajo? (Prueba Colegio San Gabriel_8º Básico)

Solución:

| Personas | Máquinas | Días |
|---|---|---|
| 9 | 3 | 4 |
| 15 | 5 | x |
| Directa | inversa | |

Identificación de proporcionalidades:

- A mayor cantidad de máquinas por ensamblar, más días. Relación directa.
- Cuantas más personas, menos días. Relación inversa.

Planteamiento aritmético:

$$\frac{9}{15} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{x}$$

$$\frac{45}{45} = \frac{4}{x}$$

$$45x = 180$$

$$x = \frac{180}{45} = 4$$

La demora es de 4 días.

Ejercicio: Para construir una piscina se han necesitado 6 obreros trabajando 12 horas diarias durante 5 días. ¿Cuántos días necesitarán 2 obreros trabajando 4 horas diarias para hacer una piscina de las mismas características? (Prueba Colegio SG _8º Básico)

Solución:

| Obreros | Horas diarias trabajadas | Tiempo (Días) |
|---|---|---|
| 6 | 12 | 5 |
| 2 | 4 | x |
| Inversa | Inversa | |

Identificación de proporcionalidades:

- A mayor cantidad de obreros, menos días. Relación inversa.
- A más horas diarias, menos días. Relación inversa.

Planteamiento aritmético:

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{12} = \frac{5}{x}$$

$$\frac{8}{72} = \frac{5}{x}$$
$$8x = 72 \cdot 5$$

$$x = \frac{360}{8} = 45$$

Se necesitarán 45 días.

Ejercicio: En una clínica hay 14 pacientes internados, 6 Kg de naranjas alcanzan para 3 días. Si el número de pacientes aumenta a 21 ¿Cuántos Kg de naranjas se ocuparán en 5 días? (Prueba Colegio SG_8º Básico)

| Pacientes | Cantidad de naranjas (Kg) | Días |
|---|---|---|
| 14 | 6 | 3 |
| 21 | x | 5 |
| Directa | Directa | |

Identificación de proporcionalidades:

- A mayor cantidad de pacientes, más naranjas. Relación directa.
- A más días, más cantidad de naranjas. Relación directa.

Planteamiento aritmético:

$$\frac{14}{21} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{x}$$

$$\frac{42}{105} = \frac{6}{x}$$

$$42x = 105 \cdot 6$$

$$x = \frac{630}{42} = 15$$

Se ocuparán 15 Kg de naranjas.

Ejercicio: 2 pintores demoran 3 horas en pintar una muralla de 120 $m^2$. Trabajando con igual rendimiento, 3 pintores pintarán una muralla de 150 $m^2$ en:

A) 75 minutos
B) 1 hora, 30 minutos
C) 2 horas
D) 150 minutos
E) 3 horas

(Pregunta en Guía de ejercicios Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

Solución:

| Pintores | Tiempo (Horas) | Área ($m^2$) |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 120 |
| 3 | x | 150 |
| Inversa | | Directa |

Identificación de proporcionalidades:

- A mayor cantidad de pintores, menos horas. Relación inversa.
- A más $m^2$, más pintores se necesitan. Relación directa.

Planteamiento aritmético:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{120}{150} = \frac{3}{x}$$

$$\frac{360}{300} = \frac{3}{x}$$
$$360x = 300 \cdot 3$$

$$x = \frac{900}{360}$$

$$x = 2{,}5 \ o \ 150 \ minutos$$

La alternativa correcta es la D).

Ejercicio:

10 obreros construyen una casa en 6 meses trabajando un cierto números de horas al día. ¿Cuánto tiempo se demorarán 12 obreros en construir una casa idéntica, trabajando el mismo número de horas al día? (Pregunta en Guía de ejercicios Razones y Proporciones de puntajenacional.cl)

Solución:

| Obreros | Meses | Horas |
|---|---|---|
| 10 | 6 | a |
| 12 | x | a |
| Inversa | | Inversa |

Identificación de proporcionalidades:

- A mayor cantidad de obreros, menos meses. Relación inversa.
- A más horas diarias, menos meses. Relación inversa.

Planteamiento aritmético:

$$\frac{12}{10} \cdot \frac{a}{a} = \frac{6}{x}$$

$$\frac{12}{10} = \frac{6}{x}$$

$$12x = 60$$
$$x = \frac{60}{12} = 5$$

Los 12 obreros se demorarán 5 meses.

Ejercicio: En un campamento de verano, 68 niños han gastado $340.000 en 10 días. ¿Cuánto dinero gastarán, en iguales condiciones, 14 niños durante el mismo tiempo? (Pregunta en manual de preparación PSU matemática, p. 47. Editorial sm.)

Solución:

| Niños | Gasto $ | Tiempo (Días) |
|---|---|---|
| 68 | 340000 | 10 |
| 14 | x | 10 |
| Directa | | Directa |

Identificación de proporcionalidades:

- A mayor cantidad de niños, más gasto. Relación directa.
- A más días, más gasto. Relación directa.

Planteamiento aritmético:

$$\frac{680}{140} = \frac{340000}{x}$$

$$680x = 47600000$$

$$x = \frac{47600000}{680} = 70000$$

El gasto será de $70.000.

Ejercicio: 5 panaderos fabrican en 8 horas 10 Kg de pan. ¿Cuántos panaderos se necesitan para fabricar 15 Kg de pan en 6 horas? (Pregunta en Manual de preparación PSU matemática, p. 50. Editorial sm).

Solución:

| Panaderos | Tiempo (Horas) | Pan (Kg) |
|---|---|---|
| 5 | 8 | 10 |
| x | 6 | 15 |
| | Inversa | Directa |

Identificación de proporcionalidades:

- Trabajar menos horas supone más panaderos. Relación inversa.
- Producir más pan, requiere de más panaderos. Relación directa.

Planteamiento aritmético:

$$\frac{6}{8} \cdot \frac{10}{15} = \frac{5}{x}$$

$$\frac{60}{120} = \frac{5}{x}$$

$$60x = 600$$

$$x = 10$$

Se necesitarán 10 panaderos

## 5 REPARTICIÓN PROPORCIONAL

Es una regla por medio de la cual se divide un número N en partes m, n, p, proporcionales a otros números dados x, y, z.

### 5.1 **Caso: Repartición en proporcionalidad directa**:

$$\frac{m}{x} = \frac{n}{y} = \frac{p}{z} = \frac{m+n+p}{x+y+z} = \frac{N}{S}$$

Donde N es el número propuesto.
$S = x + y + z$, es decir, la suma de los números dados

Lo que corresponde a cada parte, m, n, p, se determina despejando estas variables en la ecuación anterior:

$$m = \frac{N}{S} \cdot x$$

$$n = \frac{N}{S} \cdot y$$

$$p = \frac{N}{S} \cdot z$$

Ejemplo: Repartir 91000 en forma proporcional a los números 7, 3, 10.

$N = 91000$
$x = 7$
$y = 3$
$z = 10$
$S = 7 + 3 + 10 = 20$

$$m = \frac{91000}{20} \cdot 7 = 31.850$$

$$n = \frac{91000}{20} \cdot 3 = 13.650$$

$$p = \frac{91000}{20} \cdot 10 = 45.500$$

Ejemplo: Tres personas, m, n, p crean una microempresa aportando el mismo capital durante 2,3,5 años respectivamente. Si las utilidades obtenidas son \$7.000.000, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

$N = 7.000.000$
$x = 2$
$y = 3$
$z = 5$
$S = 2 + 3 + 5 = 10$

$$m = \frac{7000000}{10} \cdot 2 = \$1.400.000$$

$$n = \frac{7000000}{10} \cdot 3 = \$2.100.000$$

$$p = \frac{7000000}{10} \cdot 5 = \$3.500.000$$

Alternativamente, se puede seguir el siguiente procedimiento:

Las utilidades se pueden representar por $2x: 3x: 5x,$ ya que $2x: 3x: 5x = 2: 3: 5$

$2x + 3x + 5x = 7.000.000$
$10x = 7.000.000$
$$x = \frac{7.000.000}{10} = 700.000$$

$2x = 700.000 \cdot 2 = 1.400.000$
$3x = 700.000 \cdot 3 = 2.100.000$
$5x = 700.000 \cdot 5 = 3.500.000$

Ejemplo: Las edades de tres hermanas, María, Carmen y Sofía son entre sí como $2: 5: 3$. Si sus edades suman 30 años, entonces la edad de Sofía es:

$a)$ 15 $años$
$a)$ 9 $años$
$a)$ 6 $años$
$a)$ 3 $años$
$a)$ 1 $año$

$N = 30\ años$
$x = 2$
$y = 5$
$z = 3$

$S = 2 + 5 + 3 = 10$

$$m = \frac{30}{10} \cdot 2 = 6\ años$$

$$n = \frac{30}{10} \cdot 5 = 15\ años$$

$$p = \frac{30}{10} \cdot 3 = 9\ años$$

La edad de Lucía es 9 años (alternativa b)

Ejemplo: De una mezcla de cemento, arena y grava, en la proporción $1:2:3$, han de obtenerse $70m^3$ de hormigón. ¿Cuántos $m^3$de cada componente son necesarios si hay una merma en volumen de un 20% al hacer la mezcla?

$N = 70m^3/(1 - 0{,}20) = 87{,}5m^3$. Dado que se quiere obtener $70m^3$de hormigón se necesita calcular el volumen total que se tiene que preparar antes de considerar la merma.
$x = 1$
$y = 2$
$z = 3$
$S = 1 + 2 + 3 = 6$

Para obtener $70m^3$ se necesita:

$$m = \frac{87{,}5}{6} \cdot 1 = 14{,}58\ m^3\ de\ cemento$$

$$n = \frac{87{,}5}{6} \cdot 2 = 29{,}17m^3\ de\ arena$$

$$p = \frac{87{,}5}{6} \cdot 3 = 43{,}75\ m^3\ de\ grava$$

Ejemplo: Repartir una herencia de \$60.000.000 entre tres hijos, A, B y C, en proporción directa a sus edades que son, respectivamente, 10, 20, 30 años.

Solución:

$N = \$60.000.000$
$S = 10 + 20 + 30 = 60\ años$

$x = 10$

$y = 20$
$z = 30$

$$A = \frac{60000000}{60} \cdot 10 = 1000000 \cdot 10 = \$10.000.000$$

$$B = \frac{60000000}{60} \cdot 20 = 1000000 \cdot 20 = \$20.000.000$$

$$C = \frac{60000000}{60} \cdot 30 = 1000000 \cdot 30 = \$30.000.000$$

Comprobación de la proporcionalidad directa:

La edad del hijo de 20 años es el doble de la edad del hijo de 10 años y el monto que recibe el hijo de 20 años ($20.000.000), es también el doble de lo que recibe el de 10 años ($20.000.000 versus $10.000.000).

La edad del hijo de 30 años es el triple de la edad del hijo de 10 años y el monto que recibe el hijo de 30 años ($30.000.000), es también el triple de lo que recibe el de 10 años ($30.000.000 versus $10.000.000).

<u>Ejemplo</u>: La construcción de una ciclovía en Santiago costó $40.548.000, cantidad que han de financiar tres municipios proporcionalmente al número de sus habitantes. El primer municipio tiene 129.000, el segundo 216.000 y el tercero 309.000 habitantes. ¿qué cantidad debe pagar cada municipio?

Solución:

$N = \$40.548.000$
$S = 129000 + 216000 + 309000 = 654.000\ habitantes$

$x = 129000$
$y = 216000$
$z = 309000$

$$A = \frac{40548000}{654000} \cdot 129000 = 62 \cdot 129000 = \$7.998.000$$

$$B = \frac{40548000}{654000} \cdot 216000 = 62 \cdot 216000 = \$13.392.000$$

$$C = \frac{40548000}{654000} \cdot 309000 = 62 \cdot 309000 = \$19.158.000$$

Comprobación de la proporcionalidad directa:

Los habitantes del segundo municipio son 1,674 veces los del primer municipio ($216.000/129.000 = 1{,}674$) y el monto que debe pagar es también 1,674 veces mayor ($13.392.000/7.998.000 = 1{,}674$).
Los habitantes del tercer municipio son 2,395 veces los del primer municipio ($309.000/129.000 = 2{,}395$) y el monto que debe pagar es también 2,395 veces mayor ($19.158.000/7.998.000 = 2{,}395$).

Ejemplo: Una sociedad de responsabilidad limitada formada por 4 socios (A, B, C, D) han obtenido una utilidad de US$232.500. Si el primero invirtió US$7.000 durante 3 años, el segundo US$5.000 durante 2 años y medio, el tercero $3.000 durante 2 años y el cuarto $12.000 durante 3 años y 2 meses, ¿cuánto corresponde a cada uno?

Solución:

$N = US\$232.500$
Aportes:

$Socio\ A = 7000 \cdot 3\ años = US\$21.000$
$Socio\ B = 5000 \cdot 2{,}5\ años = US\$12.500$

$Socio\ C = 3000 \cdot 2\ años = US\$6.000$
$Socio\ D = 12000 \cdot \left(3 + \frac{2}{12}\right) años \approx US\$38.000$

$S = 21000 + 12500 + 6000 + 38000 = US\$77.500$

$w = 21.000$
$x = 12.500$
$y = \ \ 6.000$
$z = 38.000$

$$A = \frac{232.500}{77.500} \cdot 21.000 = 3 \cdot 21000 = US\$63.000$$

$$B = \frac{232500}{77.500} \cdot 12.500 = 3 \cdot 12500 = US\$37.500$$

$$C = \frac{232.500}{77.500} \cdot 6.000 = 3 \cdot 6000 = US\$18.000$$

$$D = \frac{232.500}{77500} \cdot 38.000 = 3 \cdot 38000 = US\$114.000$$

Ejemplo: En su testamento, un padre que tiene tres hijos decide repartir su herencia en proporción a sus edades. Al hijo mayor, que tiene 30 años, le asigna $27.000.000. ¿Cuánto dará a sus otros dos hijos si sus edades son 25 años y 23 años y cuál es el monto total de la herencia por repartir?

Solución:

Paso 1: Como el hijo mayor de 30 años recibe $27.000.000, lo que corresponde por cada año es:

$$\frac{27000000}{30} = \$900.000$$

Paso 2: Lo que recibirá cada uno de sus otros hijos:

- Hijo de 25 años: $25 \cdot 900000 = \$22.500.000$
- Hijo de 13 años: $23 \cdot 900000 = \$20.700.000$

Paso 3: Valor total de la herencia:

$$27.000.000 + 22.500.000 + 20.700.000 = \$70.200.000$$

Comprobación:

$N = 70.200.000.$
$x = 30$
$y = 25$
$z = 23$
$S = 30 + 25 + 23 = 78$

Herencia del hijo de 30 años, m:

$$m = \frac{70.200.000}{78} \cdot 30 = \$27.000.000$$

Herencia del hijo de 25, años, n:

$$n = \frac{70.200.000}{78} \cdot 25 = \$22.500.000$$

Herencia del hijo de 23 años, z:

$$p = \frac{70.200.000}{78} \cdot 23 = \$20.700.000$$

## 5.2 Caso: Repartición en proporcionalidad inversa

Las incógnitas son: m, n, p:

$$\frac{m}{\frac{1}{x}}=\frac{n}{\frac{1}{y}}=\frac{p}{\frac{1}{z}}=\frac{m+n+p}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

Ejemplo: Se repartieron $2.800.000 a cuatro personas de 4, 6, 10 y 15 años. ¿Cuánto le tocó a cada una si se dividió inversamente proporcional a sus edades?

Solución:

$$\frac{m}{\frac{1}{4}}=\frac{n}{\frac{1}{6}}=\frac{p}{\frac{1}{10}}=\frac{q}{\frac{1}{15}}=\frac{m+n++p+q}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}$$

El MCM de $4,6,10,15\ =\ 60$

$$\frac{m}{\frac{1}{4}}=\frac{n}{\frac{1}{6}}=\frac{p}{\frac{1}{10}}=\frac{q}{\frac{1}{15}}=\frac{m+n++p+q}{\frac{15}{60}+\frac{10}{60}+\frac{6}{60}+\frac{4}{60}}=$$

$$m+n+p+q=2.800.000$$

$$\frac{15}{60}+\frac{10}{60}+\frac{6}{60}+\frac{4}{60}=\frac{35}{60}$$

$$\frac{m}{\frac{1}{4}}=\frac{n}{\frac{1}{6}}=\frac{p}{\frac{1}{10}}=\frac{q}{\frac{1}{15}}=\frac{2.800.000}{\frac{35}{60}}=4.800.000$$

$$4m=6n=10p=15q=4.800.000$$

$4m=4.800.000 \Longrightarrow m=\$1.200.000$
$6n=4.800.000 \Longrightarrow n=\$800.000$
$10p=4.800.000 \Longrightarrow p=\$480.000$
$15q=4.800.000 \Longrightarrow q=\$320.000$

Se comprueba la proporcionalidad inversa viendo que la edad de la segunda persona es mayor en 1,5 veces la edad de la primera (6/5=1,5), en tanto que lo que recibe la primera es 1,5 veces lo que recibe la segunda (1200000/800000=1,5).

Ejemplo: Tres trabajadores, A, B y C, van a hacer un cierto trabajo, por el que se les va a pagar $2.200.000. Pero A se ausenta 2 días, B, 4 días y C, 6 días. ¿Cuánto debe recibir cada uno?

Solución:

$$\frac{m}{\frac{1}{2}} = \frac{n}{\frac{1}{4}} = \frac{p}{\frac{1}{6}} = \frac{m + n + +p}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}}$$

El MCM de 2,4,6 $= 12$

$$\frac{m}{\frac{1}{2}} = \frac{n}{\frac{1}{4}} = \frac{p}{\frac{1}{6}} = \frac{m + n + p}{\frac{6}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12}}$$

$m + n + p = 2.200.000$

$$\frac{6}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{m}{\frac{1}{2}} = \frac{n}{\frac{1}{4}} = \frac{p}{\frac{1}{6}} = \frac{2.200.000}{\frac{11}{12}} = 2.400.000$$

$2m = 4n = 6p = 2.400.000$

$2m = 2.400.000 \Longrightarrow m = \$1.200.000$
$4n = 2.400.000 \Longrightarrow n = \$600.000$
$6p = 2.400.000 \Longrightarrow p = \$400.000$

Se comprueba la proporcionalidad inversa viendo que la ausencia del trabajador B es el doble de la del trabajador A, en tanto que la remuneración del trabajador B es la mitad de la del trabajador A.

Ejemplo: Repartir \$100.000 entre tres personas A, B, C en razón inversa a sus edades 8, 6, 24 años, respectivamente:

Solución:

$$\frac{m}{\frac{1}{8}} = \frac{n}{\frac{1}{6}} = \frac{p}{\frac{1}{24}} = \frac{m + n + p}{\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}}$$

El MCM de 8,6,24 $= 24$

$$\frac{m}{\frac{1}{8}} = \frac{n}{\frac{1}{6}} = \frac{p}{\frac{1}{24}} = \frac{m + n + p}{\frac{3}{24} + \frac{4}{24} + \frac{1}{24}}$$

$$m + n + p = 100.000$$
$$\frac{3}{24} + \frac{4}{24} + \frac{1}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{m}{\frac{1}{8}} = \frac{n}{\frac{1}{6}} = \frac{p}{\frac{1}{24}} = \frac{100.000}{\frac{1}{3}} = 300.000$$

$$2m = 6n = 24p = 300.000$$

$8m = 300.000 \Longrightarrow m = \$37.500$ es lo que recibe la persona A.
$6n = 300.000 \Longrightarrow n = \$50.000$ es lo que recibe la persona B.
$24p = 300.000 \Longrightarrow p = \$12.500$ es lo que recibe la persona C.

### 5.3 Caso: Reparto proporcional mixto:

En algunos problemas intervienen más de dos variables y se combinan las variaciones proporcionales directa e inversa. Se dice que una variable varía juntamente con dos o más variables, si es directamente proporcional a su producto.
El caso en cuestión es aquel en el que, en el mismo problema, la cantidad por repartir se distribuye directamente proporcional a ciertos datos, e inversamente proporcional a otros datos.

Ejemplo:

Una microempresa otorga a sus tres trabajadores de 25, 30 y 40 años un bono por cumplimiento de metas ascendente a \$6.000.000. Sus sueldos mensuales son \$1.400.000, \$1.600.000 y \$1.800.000, respectivamente. El reparto se hará directamente proporcionalmente a la edad e inversamente proporcional al sueldo de cada trabajador.

Solución:

| Edad | Sueldo \$ |
|---|---|
| 25 | 1.400.000 |
| 30 | 1.600.000 |
| 40 | 1.800.000 |

Definir la fórmula de distribución:

Sea $B_i$ el bono de cada trabajador, donde $i = 1, 2, 3,$ $E_i$ su edad y $S_i$ su sueldo. El factor de proporcionalidad $P_i$ se obtiene multiplican la edad por el sueldo, teniendo presente que los datos de esta última variable son inversamente proporcionales:

$$P_i = E_i \cdot \frac{1}{S_i}$$

$$P_i = \frac{E_i}{S_i}$$

Calcular el factor $P_i$ para cada trabajador:

Para el trabajador de 25 años y sueldo $1.400.000:

$$P_1 = 25 \cdot \frac{1}{1400000} = \frac{25}{1400000} \approx 0{,}000017857$$

Para el trabajador de 30 años y sueldo $1.600.000:

$$P_2 = 30 \cdot \frac{1}{1600000} = \frac{30}{1600000} \approx 0{,}000018750$$

Para el trabajador de 40 años y sueldo $1.800.000:

$$P_3 = 40 \cdot \frac{1}{1800000} = \frac{40}{1800000} \approx 0{,}000022222$$

Determinar el importe de cada bono:

Suma de los factores ($P_T$):

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 0{,}000017857 + 0{,}000018750 + 0{,}000022222 = 0{,}000058829$$

Bonos por trabajador:

Bono trabajador $B_1$: $\frac{P_1}{P_T} = \frac{0{,}000017857}{0{,}000058829} \cdot 6000000 = \$1.822.656$

Bono trabajador $B_2$: $\frac{P_2}{P_T} = \frac{0{,}000018750}{0{,}000058829} \cdot 6000000 = \$1.912.055$

Bono trabajador $B_3$: $\frac{P_3}{P_T} = \frac{0{,}000022222}{0{,}000058829} \cdot 6000000 = \$2.265.289$

Bono total por repartir: $1.822.656 + 1.912.055 + 2.265.289 = \$6.000.000$

<u>Ejemplo</u>:

Una empresa constructora ha recibido un pago de 120.000 dólares por la finalización de un proyecto. Este dinero debe ser repartido entre sus tres trabajadores de acuerdo con los siguientes criterios:

1. Parte proporcional directa: El 40% del dinero se repartirá en función de los años de experiencia de cada trabajador que son: 4, 6 y 10 años.
2. Parte proporcional inversa: El 60% restante se distribuirá de manera inversamente proporcional a la cantidad de atrasos incurridos en el último año. Los atrasos de los trabajadores fueron 10, 15 y 5, respectivamente.

Solución:

Paso 1: Reparto proporcional directo: 40% del total. Se calcula en función de los años de experiencia.

- Monto por repartir en función de la experiencia: $120000 \cdot 0{,}40 = \$48.000$
- Se reparte los \$48.000 de manera proporcional a 4, 6 y 10

$$A_1 = \frac{4}{20} \cdot 48000 = 9600$$

$$A_2 = \frac{6}{20} \cdot 48000 = 14400$$

$$A_1 = \frac{10}{20} \cdot 48000 = 24000$$

Comprobación: $9600 + 14400 + 24000 = 48.000$

Paso 2: Reparto proporcional inverso. Se calcula en función de los días de atraso.

- Monto por repartir: $120000 \cdot 0{,}60 = \$72000$
- Se toman los valores inversos: $\frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{5}$
- Se calcula el mínimo común múltiplo:

$$\frac{1}{10} = 0{,}1; \frac{1}{15} = 0{,}0667; \frac{1}{5} = 0,2$$

Suma: $0{,}1 + 0{,}0667 + 0{,}2 = 0{,}3667$

- Se distribuye el monto en función de estas fracciones:

$$B_1 = \frac{0{,}1}{0{,}3667} \cdot 72000 = 19.634{,}58$$

$$B_2 = \frac{0{,}0667}{0{,}3667} \cdot 72000 = 13.096{,}27$$

$$B_3 = \frac{0,2}{0,3667} \cdot 72000 = 39269,16$$

Comprobación: $19.634,58 + 13.096,27 + 39269,16 = 72.000$

- Paso 3: Suma de ambos repartos, directo e inverso:

$Trabajador$ 1 = 9.600 + 19634,58 = 29.234,58
$Trabajador$ 2 = 14.400 + 13096,27 = 27.496,26
$Trabajador$ 3 = 24.000 + 39.269,16 = 63.269,16

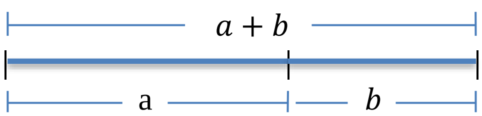
Comprobación total por repartir: $29.234,58 + 27.496.26 + 63.269.16 = 120.000$

# 6 PROPORCIÓN ÁUREA

## 6.1 Concepto

Cuando la relación entre dos partes de un todo es igual al siguiente número irracional: $1{,}61803398874989\ldots$ , ese todo tiene la proporción áurea y se representa con la letra griega Phi en honor al escultor griego Fidias: $\phi = 1{,}61803398874989\ldots \approx 1{,}6180$.

Supóngase un segmento de recta que se divide en dos partes $a$ y $b$ de manera que la longitud de la parte $a$ entre la parte $b$ sea igual al número áureo, automáticamente se cumplirá que la longitud completa, entre la parte más larga, también tendrá como resultado el número áureo.




Sea:
$a = segmento\ mayor$ y $b = segmento\ menor.$
$a + b = segmento\ total.$

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

La proporción anterior se lee: El trazo mayor $a$ es al menor $b$, como la suma de ambos trazos $a + b$, es al mayor $a$. Esta proporción es áurea si ambas razones entregan un mismo número. Si es así, ese número es el *Número áureo.*

<u>Ejemplo</u>: Supóngase un trazo de recta que mide 100 mm y que se divide en dos partes que miden: $a = 61{,}803$ y $b = 38{,}197$.

Veamos si se cumple la proporción anterior. Si se obtiene el mismo número en ambas razones, se comprueba que es una proporción áurea.

$$\frac{a}{b} = \frac{61{,}803}{38{,}197} \approx 1{,}6180$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{61{,}803 + 38{,}197}{61{,}803} = \frac{100}{61{,}803} \approx 1{,}6180$$

El número de oro es $\phi \approx 1{,}6180$. Es un número irracional con una cantidad infinita de decimales. La letra griega se llama Fi en honor al escultor griego Fidias cuyas obras de arte guardaban proporciones áureas.

En cambio, si ese trazo de recta se divide en dos partes: $a = 60\ mm$ y $b = 40\ mm$ se verá que no es una proporción áurea, porque ambas razones no entregan el mismo número.

$$\frac{a}{b} = \frac{60}{40} = 1{,}5$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{6o+40}{60} = \frac{100}{61{,}803} \approx 1{,}67$$

¿Cómo se llega al valor $\phi = 1{,}61803398874989 \ldots$?

$$\phi = \frac{a}{b}$$
$$a = \phi \cdot b$$

Pero también:

$$\phi = \frac{a+b}{a}$$

$$\phi = \frac{\phi \cdot b + b}{\phi \cdot b} = \frac{b(\phi + 1)}{\phi \cdot b} = \frac{\phi + 1}{\phi}$$

Multiplicando ambos miembros por $\phi$:

$$\phi^2 = \phi + 1$$
$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

Resolviendo:

$$\phi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Considerando solo el signo + y operando:

$\phi = 1{,}61803398874989$ ...

También se llega al número áureo mediante la serie de Fibonacci, que es una expresión numérica donde la suma de los dos números anteriores da como resultado el tercer número:

1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233, 377,610 ...
1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610 ...

Se forman las siguientes razones desde dos serie de Fibonacci desplazando los números de la segunda de ellas una posición a la derecha:

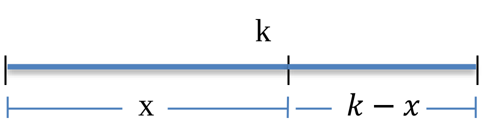
$$\frac{2}{1} = 2; \frac{3}{2} = 1{,}5; \frac{5}{3} = 1{,}6667\ldots; \frac{8}{5}; 1{,}6000; \frac{13}{8} = 1{,}6250\ldots; \frac{21}{13} = 1{,}6153\ldots; \frac{34}{21} = 1{,}6190\ldots; \frac{55}{34} = 1{,}6176\ldots; \frac{89}{55} = 1{,}6181; \frac{144}{89} = 1{,}6179\ldots; \frac{233}{144} = 1{,}6180\ldots; \frac{377}{233} = 1{,}6180\ldots; \frac{610}{377} = 1{,}6180\ldots$$

Como se ve, a medida que se van calculando más razones se comienza a repetir el mismo número, 1,6180… que es el número áureo.

Euclides lo llamó Razón media y extrema.
Luca Pacioli lo llamó La divina proporción (Pacioli era monje y dijo que este número era único, como Dios).
Martín Ohm lo denominó Sección dorada.

<u>Aplicación</u>: En diseños arquitectónicos y, en general, está presente en obras de arte como las de Leonardo Da Vince (La Gioconda o la Última Cena), de Velásquez (Las Meninas) y composiciones musicales de Debussy y Mozart.

### 6.2 Longitud del segmento áureo




$$\frac{k}{x} = \frac{x}{k - x}$$

$$x^2 = k(k - x)$$
$$x^2 = k^2 - kx$$
$$x^2 + kx - k^2 = 0$$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4k^2}}{2}$$

Como x es un segmento, se considera solo el signo positivo:

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{5k^2}}{2}$$

$$x = \frac{-k + k\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{k\sqrt{5} - k}{2}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{k(\sqrt{5} - 1)}{2}}$$

Ejemplo: Calcular el segmento áureo si el trazo completo mide 20 cm

$$x = \frac{k(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

$$x = \frac{20(\sqrt{5} - 1)}{2} = 10\left(\sqrt{5} - 1\right) = 10(2{,}2361 - 1) = 10 \cdot 1{,}2361 \approx 12{,}4cm$$

Comprobación: El cociente entre el segmento mayor y el menor debe ser igual al número de oro, es decir, 1,6180. Efectivamente:

Segmento mayor: 12,361
Segmento menor: 20-12,361=7,639

$$\frac{Segmento\ mayor}{Segmento\ menor} = \frac{12{,}361}{7{,}639} = 1{,}618 \ldots$$

Archivo: proporcionalidad.docx