MATEMÁTICAS FINANCIERAS

TERCERA EDICIÓN

HÉCTOR MANUEL VIDAURRI AGUIRRE

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

3a. edición

HÉCTOR M. VIDAURRI AGUIRRE

THOMSON

Australia • Brasil • Canadá • España • Estados Unidos • México • Reino Unido • Singapur

THOMSON

Matemáticas financieras. 3a. ed.
Héctor Manuel Vidaurri Aguirre

Director editorial y de producción:
José Tomás Pérez Bonilla

Editor de desarrollo:
Lilia Moreno Olvera

Gerente de produccion:
René Garay Argueta

Editor de producción:
Alejandro A. Gómez Ruiz

Supervisora de manufactura:
Claudia Calderón Valderrama

Diseño de portada:
Daniel Aguilar

Impreso en México
Printed in Mexico
2 3 4 06 05

Para mayor información contáctenos en:
Séneca núm. 53
Col. Polanco
México, D.F., 11560

Puede visitar nuestro sitio en
http://www.thomsonlearning.com.mx

Datos para catalogación bibliográfica:
Vidaurri Aguirre, Héctor Manuel
Matemáticas financieras
ISBN 970-686-368-0
1. Generalidades. 2. Variación proporcional y porcentaje. 3. Sucesiones y series. 4. Interés simple y descuento simple. 5. Interés compuesto e inflación. 6. Anualidades vencidas, anticipadas y diferidas. 7. Amortización y fondos de amortización. 8. Otras anualidades. 9. Bonos y obligaciones. 10. Depreciación.

División Iberoamericana

México y América Central
Thomson Learning
Séneca núm. 53
Col. Polanco
México, D.F., 11560
Tel. 52 (55) 1500 6000
Fax 52 (55) 5281 2656
editor@thomsonlearning.com.mx

El Caribe
Thomson Learning
598 Aldebaran St.
00920, Altamira
San Juan, Puerto Rico
Tel. (787) 641 1112
Fax (787) 641 1119

Cono Sur
Buenos Aires, Argentina
thomson@thomsonlearning.com.ar

América del Sur
Thomson Learning
Calle 39 núm. 24-09
La Soledad
Bogotá, Colombia
Tel. (571) 340 9470
Fax (571) 340 9475
clithomson@andinet.com

España
Paraninfo Thomson Learning
Calle Magallanes núm. 25
28015 Madrid
España
Tel. 34 (0) 91 446 3350
Fax 34 (0) 91 445 6218
clientes@paraninfo.es

Esta obra se imprimió en el 2006
Grupo GEO Impresores, S.A DE C.V.

Acerca del autor

Héctor Manuel Vidaurri Aguirre

Es profesor del Departamento de Matemáticas y Física del Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Occidente (ITESO) y de la Universidad Marista La Salle, en Guadalajara, Jalisco.

Estudió la carrera de Ingeniería Química en la Universidad de Guadalajara; ha trabajado en la industria privada y, como profesor universitario, tiene alrededor de 22 años de experiencia docente, durante los cuales ha impartido las materias de matemáticas financieras, álgebra superior, cálculo diferencial e integral e ingeniería económica en diversas universidades de la ciudad de Guadalajara.

Fue instructor externo de Banca Serfín en las materias de matemáticas financieras y finanzas y es autor de una serie de artículos sobre matemáticas financieras aplicadas publicados en el periódico Mural, de la ciudad de Guadalajara.

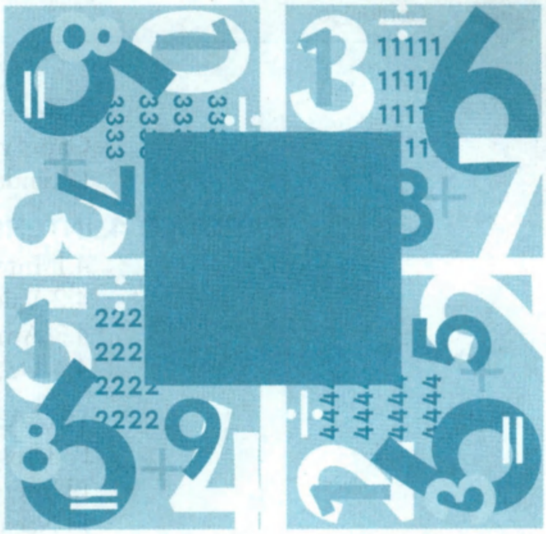
Dedicatoria

A mi querida familia.

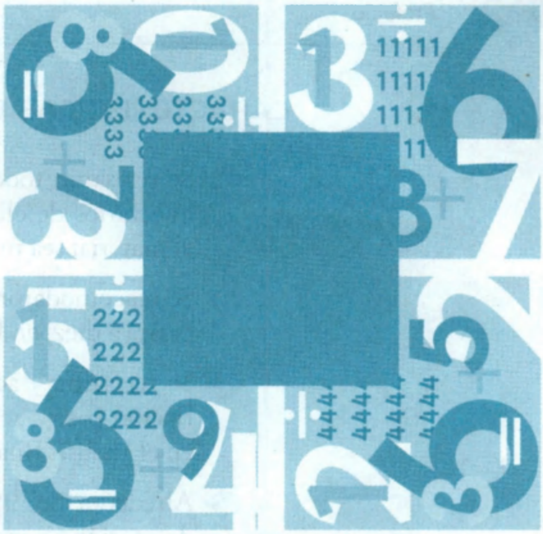
Agradecimientos

- Deseo agradecer al ingeniero Alberto Calva Mercado el haberme permitido reproducir dos de sus excelentes artículos que ha escrito en diversos diarios del país.

- Un agradecimiento especial a la Lic. Lilia Moreno, editora de Thomson, por toda su valiosa ayuda.



Contenido



Prefacio

El ayer es un cheque cancelado;
el mañana un pagaré sin fecha;
el hoy es nuestro único efectivo, por lo tanto,
gastémoslo inteligentemente.

KAY LYOMS

Este texto está dirigido a toda persona interesada en aprender los fundamentos de la matemática financiera, la cual le dará las herramientas necesarias para entender y manejar de manera eficiente el dinero. El libro es útil para estudiantes de preparatoria y licenciatura en las áreas de contabilidad, economía, finanzas, administración de empresas y como auxiliar en los cursos de ingeniería económica y evaluación de proyectos de inversión. Asimismo, es útil como referencia para estudiantes de maestría en las áreas mencionadas.

La matemática financiera es una parte de la matemática aplicada que estudia los modelos matemáticos relacionados con los cambios cuantitativos que se producen en sumas de dinero, llamadas *capitales*. Sobre los inicios de la matemática financiera no se sabe gran cosa, simplemente que ésta ha existido desde tiempo inmemorial. La aritmética comercial estaba bien desarrollada para el 1500 a.C. y parece ser que la matemática financiera se desarrolló como un complemento a las transacciones comerciales. Sin embargo, no se conoce cuándo y quién introduce los conceptos fundamentales en los que se basa. Por ejemplo, del concepto de interés simplemente sabemos que surgió cuando una persona se dio cuenta que si alguien le debía dinero, él debía recibir una compensación por el tiempo que esta persona tardara en cancelar la deuda.

La importancia de la matemática financiera radica en su aplicación a las operaciones bancarias y bursátiles, en temas económicos y en muchas áreas de las finanzas, ya que le permiten al administrador financiero tomar decisiones de forma rápida y acertada. Asimismo, es la base de casi todo análisis de proyectos de inversión, ya que siempre es necesario considerar el efecto del interés que opera en las cantidades de efectivo con el paso del tiempo.

CARACTERÍSTICAS BÁSICAS

- Se revisaron todos los capítulos del texto. Esto trajo como consecuencia que varios de ellos se hayan reescrito nuevamente. Espero que con esto el material sea más claro y útil.
- Se reacomodaron algunos temas, lo que hizo que el número de capítulos bajara a diez, en lugar de los trece de la edición anterior.
- Se revisaron y actualizaron todos los temas especiales. El tema de la inflación pasó a ser tema normal debido a su importancia cada vez mayor en el análisis financiero y económico.
- Alrededor del 95% de los ejemplos resueltos y de los ejercicios de final de sección se modificaron totalmente o se actualizaron. Asimismo, hay varios ejemplos y ejercicios nuevos.
- En algunos capítulos, al final de los ejercicios, se presenta una sección titulada *Ejercicios Especiales*, la cual contiene ejercicios adicionales que complementan el tema o bien son ejercicios un poco más difíciles.
- La mayoría de las fórmulas utilizadas en el texto se demuestran. Esto tiene como objetivo que los lectores no vean las fórmulas como algo que aparece como por arte de magia.
- En algunas secciones se dan referencias adicionales de sitios en Internet que el lector puede visitar para complementar lo dicho en el texto.
- Al final del libro se dan las soluciones de todos los ejercicios propuestos.

CAPÍTULO 1

Generalidades

Objetivos

Al finalizar el estudio de este capítulo el alumno podrá:

- Explicar y utilizar las reglas de prioridad de las operaciones aritméticas.
- Utilizar adecuadamente la calculadora.
- Explicar y utilizar los logaritmos.

1.1 La calculadora y las operaciones aritméticas

La invención de los circuitos integrados y del diodo emisor de luz (LED por sus siglas en inglés) hizo posible la aparición de las calculadoras electrónicas portátiles hacia 1972, aproximadamente, aunque con grandes limitaciones en cuanto a las operaciones que podían efectuar. Posteriormente, los avances en el desarrollo de los *chips* junto con la invención de las pantallas de cristal líquido (LCD por sus siglas en inglés), que sustituyó a los LED, permitieron que las calculadoras electrónicas evolucionaran hasta convertirse en una poderosa herramienta de cálculo.

De entonces a la fecha, la calculadora se ha convertido, junto con la computadora, en una herramienta básica de las actividades laborales, académicas y de la vida cotidiana. La calculadora es una herramienta útil empleada para efectuar los cálculos aritméticos tediosos; puede utilizarse para comprender mejor ciertos conceptos matemáticos y desarrollar cierta habilidad en el área. Sin embargo, la calculadora no sustituye el razonamiento ni interpreta resultados, estas actividades continúan siendo exclusivas del ser humano.

En este capítulo se verán algunos aspectos básicos del empleo de las calculadoras en general; sin embargo, no se pretende reproducir un manual de instrucciones. El lector debe estudiar el manual del usuario de su calculadora.

Las calculadoras electrónicas se clasifican en cuatro tipos:

- Calculadoras básicas.
- Calculadoras científicas.
- Calculadoras financieras.
- Calculadoras graficadoras.

La **calculadora básica**, llamada también estándar, es aquella que permite obtener únicamente sumas, restas, multiplicaciones y divisiones; asimismo, es posible efectuar cálculos de porcentajes y de raíces cuadradas. Cuenta con una memoria volátil y algunas tienen la tecla de cambio de signo.

La **calculadora científica** posee las mismas funciones que la básica y, además, permite realizar el cálculo de funciones logarítmicas, exponenciales, trigonométricas, estadísticas, etcétera. Cuenta al menos, con una memoria constante y algunas son modelos programables.

La **calculadora financiera** posee varias de las características de la científica, además está programada para llevar a cabo la resolución de problemas de interés compuesto, anualidades, amortizaciones, etcétera.

La **calculadora graficadora** cuenta con todas las características de una calculadora científica avanzada, se puede programar y tiene una pantalla rectangular que permite la representación gráfica de funciones en dos y/o tres dimensiones. Algunas graficadoras están programadas para llevar a cabo la resolución de problemas financieros.

Con el fin de aprovechar al máximo este libro, se recomienda que el lector tenga una calculadora, bien sea científica, financiera o graficadora.

Cada tecla de las calculadoras científicas, financieras y graficadoras llevan a cabo más de una función. La función marcada sobre la tecla recibe el nombre de **función primaria** y las funciones impresas arriba de las teclas se llaman **funciones secundarias**. Las funciones secundarias se eligen presionando antes la **tecla de cambio** y después la de la función deseada. La tecla de cambio varía con la marca y modelo de calculadora, algunas vienen marcadas como 2nd, en otras como Shift, o bien, INV.

Para utilizar otras funciones, la calculadora debe ponerse en determinado modo de funcionamiento mediante la tecla Mode. Como el uso de esta tecla varía con la marca y modelo de calculadora, el lector debe consultar el manual de su calculadora.

Con respecto a la forma como las calculadoras llevan a cabo las operaciones aritméticas, se tiene:

- Lógica algebraica.
- Lógica aritmética.
- Lógica RPN.

Las calculadoras con **lógica algebraica** están programadas para realizar los cálculos de acuerdo con las reglas del álgebra, para el orden de las operaciones, llamadas **reglas de prioridad**.

Reglas de prioridad de las operaciones

Para evaluar expresiones matemáticas es necesario seguir un orden establecido con el fin de garantizar que los cálculos sólo tengan un resultado. El orden es el siguiente:

- En primer lugar se llevan a cabo todas las operaciones que se encuentren dentro de **signos de agrupación** (paréntesis, corchetes, llaves).
- En segundo lugar se efectúan las **elevaciones a potencia** y las **raíces**.
- Enseguida se resuelven las **multiplicaciones y divisiones**.
- Al final se realizan las **sumas** y las **restas**.

Cuando un conjunto de operaciones se encuentra en el mismo nivel de prioridad, las operaciones se realizan de **izquierda a derecha**.

Las calculadoras con **lógica aritmética** realizan las operaciones en el orden en que van apareciendo los números y los operadores, al ser ingresados; esto es, no siguen las reglas de prioridad. El resultado de un cálculo llevado a cabo de esta manera estará equivocado la mayoría de las veces.

Ejemplo 1.1

Resuelva la operación: 75 + (15) (32)

Solución:

75 + (15) (32)

= 75 + 480 Primero se lleva a cabo la multiplicación.

= 555 Al final se efectúa la suma.

Al efectuar la operación anterior directamente con una calculadora con lógica algebraica, la secuencia de tecleo sería en el orden en que se encuentra escrita la expresión; esto es

$$75 \boxed{+} 15 \boxed{\times} 32 \boxed{=} 555$$

Si se utiliza una calculadora con lógica aritmética, el resultado sería el siguiente:

$$75 \boxed{+} 15 \boxed{\times} 32 \boxed{=} 2\,880$$

El resultado anterior está equivocado debido a que no se llevó a cabo utilizando las reglas de prioridad. En este caso, la calculadora realizó primero la suma (75 $\boxed{+}$ 15 $\boxed{=}$ 90) y el resultado lo multiplicó por 32 (90 $\boxed{\times}$ 32 $\boxed{=}$ 2 880).

En general, las calculadoras científicas y las graficadoras utilizan lógica algebraica y las financieras utilizan lógica aritmética; las calculadoras básicas emplean lógica aritmética. Por tanto, es necesario tener cuidado al realizar operaciones aritméticas con una calculadora financiera o básica.

Las calculadoras con lógica en **Notación Polaca Inversa**, conocida simplemente como notación **RPN**, por sus siglas en inglés (*Reverse Polish Notation*), se basan en una lógica matemática no ambigua que no utiliza paréntesis en los cálculos en cadena, desarrollada por el matemático polaco Jan Lukasiewicz (1878-1956). En este libro no se utilizará la notación RPN, de manera que si la calculadora utilizada por el lector es de este tipo, deberá tener en cuenta que el procedimiento de cálculo será diferente.

Ejemplo 1.2

Resuelva la operación: $(7.8)(12.25)^2 + 780$

Solución:

$(7.8)(12.25)^2 + 780$

$= (7.8)(150.0625) + 780$	Primero se lleva a cabo la elevación al cuadrado.
$= 1\,170.4875 + 780$	A continuación se realiza la multiplicación.
$= 1\,950.4875$	Finalmente se efectúa la suma.

Al efectuar la operación anterior con una calculadora basada en lógica algebraica, la secuencia de tecleo sería:

$$7.8 \ \boxed{\times}\ 12.25\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ 780\ \boxed{=}\ 1\,950.4875$$

Ejemplo 1.3

Calcule: $(16.5)(178) + (21.7)(14.3) - (10.7)(11)$

Solución:

$(16.5)(178) + (21.7)(14.3) - (10.7)(11)$

$= 2\,937 + 310.31 - 117.7$	Primero se efectúan las multiplicaciones.
$= 3\,129.61$	La suma y la resta se llevan a cabo al final, siguiendo el orden de izquierda a derecha.

Para obtener el resultado de manera directa, mediante una calculadora, la secuencia de tecleo sería la siguiente:

$$16.5\ \boxed{\times}\ 178\ \boxed{+}\ 21.7\ \boxed{\times}\ 14.3\ \boxed{-}\ 10.7\ \boxed{\times}\ 11\ \boxed{=}\ 3\,129.61$$

Ejemplo 1.4

Evalúe: $(80 - 13.85 - 4.76)(14) - (75.5 + 27.9 - 14) \div 3$

Solución:

$(80 - 13.85 - 4.76)(14) - (75.5 + 27.9 - 14) \div 3$

$= (61.39)(14) - 89.4 \div 3$ Primero se efectúan las operaciones que están entre paréntesis.

$= 859.46 - 29.8$ Se realiza la multiplicación y la división.

$= 829.66$ Al final se lleva a cabo la resta.

La secuencia de tecleo para el resultado directo es:

$\boxed{(}\ 80\ \boxed{-}\ 13.85\ \boxed{-}\ 4.76\ \boxed{)}\ \boxed{\times}\ 14\ \boxed{-}\ \boxed{(}\ 75.5\ \boxed{+}\ 27.9\ \boxed{-}\ 14\ \boxed{)}\ \boxed{\div}\ 3\ \boxed{=}\ 829.66$

Ejemplo 1.5

Obtenga el valor de: $70 \div 5 \times 20 \times 0.35$

Solución:

$70 \div 5 \times 20 \times 0.35 = 98$ Como la multiplicación y la división se encuentran en el mismo nivel de prioridad, el cálculo se efectúa procediendo de izquierda a derecha.

La secuencia de tecleo es:

$$70\ \boxed{\div}\ 5\ \boxed{\times}\ 20\ \boxed{\times}\ 0.35\ \boxed{=}\ 98$$

Ejemplo 1.6

Calcule:

$$\frac{(96.3)(14.8) + (73.4)(6.1)}{(17.6)(15)}$$

Solución:

La expresión anterior significa que el resultado del numerador se divide entre el resultado del denominador; esto es,

$$\frac{[(96.3)(14.8) + (73.4)(6.1)]}{[(17.6)(15)]}$$

La secuencia de tecleo es:

[(] 96.3 [×] 14.8 [+] 73.4 [×] 6.1 [)] [÷] [(] 17.6 [×] 15 [)] [=] 7.094621212

Otra forma de tecleo es:

96.3 [×] 14.8 [+] 73.4 [×] 6.1 [=] 1872.98 [÷] 17.6 [÷] 15 [=] 7.094621212

En este momento es necesario señalar que las respuestas obtenidas por el lector al resolver los problemas pueden diferir levemente de las respuestas dadas en el libro, ya que las aproximaciones decimales varían con el método de cálculo. Igualmente, las respuestas varían si se utiliza una calculadora de 8 dígitos en vez de una de 10 o 12 dígitos. Por ejemplo: con una calculadora de 10 dígitos si tecleamos 18 500 000 y le sumamos 0.08, obtenemos 18 500 000.08 en la pantalla, pero con una calculadora de 8 dígitos al tratar de sumar las cantidades anteriores se obtiene como respuesta 18 500 000.

Ejemplo 1.7

Evalúe la siguiente expresión:

$$\sqrt{16^2 + 75^2}$$

Solución:

La expresión anterior realmente significa $\sqrt{(16^2 + 75^2)}$, por tanto, la secuencia de tecleo será:

[√] [(] 16 [x^2] [+] 75 [x^2] [)] [=] 76.68767828

En algunos modelos de calculadora, la secuencia de tecleo sería la siguiente:

[(] 16 [x^2] [+] 75 [x^2] [)] [√]

Observe que en este caso la tecla [=] no se utiliza.

1.2 Potencias y raíces

Las elevaciones a potencia se obtienen mediante la tecla [y^x], llamada **tecla de potencias**. En algunas calculadoras esta tecla viene marcada como [^]. Para llevar a cabo la elevación de potencia, la base se teclea antes y el exponente después de oprimir la tecla de potencias. Por ejemplo: el resultado de 3.4^6 se obtiene de la siguiente forma:

3.4 [y^x] 6 [=] 1 544.804416

Ejemplo 1.8

Calcule

$$\frac{(102.5)^3(6.75)^2}{(432)^{1.48}(15.3)^{2.7}}$$

Solución:

[(] 102.5 [y^x] 3 [×] 6.75 [x^2] [)] [÷] [(] 432 [y^x] 1.48 [×]
15.3 [y^x] 2.7 [)] [=] 3.90477787

Las raíces con índice superior a dos se obtienen usando la tecla de raíces [$\sqrt[x]{y}$] (en algunas calculadoras es [$x^{1/y}$]), que por lo general viene como función secundaria de la tecla de potencias. Para obtener una raíz determinada, el índice de la raíz se teclea antes y el radicando después de oprimir la tecla de raíces. Por ejemplo, $\sqrt[6]{2\,985\,984}$ se obtiene de la siguiente manera:

6 [$\sqrt[x]{y}$] 2 985 984 [=] 12

Ejemplo 1.9

Calcule

$$\frac{(25.5)^3\sqrt[3]{10\,300}}{\sqrt{529}}$$

Solución:

25.5 [y^x] 3 [×] 3 [$\sqrt[x]{y}$] 10 300 [÷] [$\sqrt{\ }$] 529 [=] 15 685.74366

Ejemplo 1.10

Obtenga el valor de

$$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 1.16}{\sqrt[4]{2000} - 4}$$

Solución:

(5 1/x x² + 1.16) ÷ (4 ∜y 2 000 − 4) = 0.446527736

La tecla 1/x (o bien x^{-1}) se llama **tecla de recíprocos** y permite obtener el recíproco de un número.

1.3 Memoria

Todas las calculadoras científicas, financieras y graficadoras poseen por lo menos un registro de memoria, que evita tener que escribir resultados intermedios que se utilizarán posteriormente.

Las teclas de memoria usadas comúnmente son:

Min o STO : Almacena un número en la memoria.

MR o RCL : Muestra en pantalla el número almacenado en la memoria.

M+ : Suma el número en pantalla con el número almacenado en la memoria.

Ejemplo 1.11

Resuelva el ejemplo 1.3 empleando la memoria de la calculadora.

Solución:

16.5 × 178 = Min

21.7 × 14.3 = M+

10.7 × 11 = +/− M+ MR 3 129.61

La tecla +/− es la tecla de cambio de signo, que se usa para cambiar el signo del número presentado en pantalla; esta tecla permite introducir números negativos directamente. En algunas calculadoras, sobre todo en las graficadoras, la tecla de cambio de signo es (−) .

Ejemplo 1.12

Resuelva el ejemplo 1.6 empleando la memoria de la calculadora.

Solución:

En este caso, se calcula primero el denominador y el resultado se almacena en la memoria:

17.6 × 15 = Min

A continuación se calcula el numerador y el resultado obtenido se divide entre el contenido de la memoria:

(96.3 × 14.8 + 73.4 × 6.1) ÷ MR = 7.094621212

Ejemplo 1.13

Calcule la siguiente expresión utilizando la memoria:

$$\frac{(32.6 + 25.4)^{3.1}}{(17.5 - 7.9)^{2.7}}$$

Solución:

(17.5 − 7.9) y^x 2.7 = Min

(32.6 + 25.4) y^x 3.1 ÷ MR = 652.3707053

Ejercicios 1.1

Resuelva las siguientes operaciones utilizando calculadora.

1. $(7\,350 + 10\,835 - 8\,300) \div 64$
2. $(260)(12.6)(55) + \dfrac{792}{4} + (21.5)(3.45)^5$
3. $25 + \sqrt{400} - \sqrt[3]{4\,096}$
4. $(1 + 0.1518)^{68}$
5. $\dfrac{(0.0345)(1.0418)}{(0.0712)(0.60)}$
6. $\dfrac{(35.8)(0.333)(312.56)}{(0.007)^{2.5}(2.45)(20)}$
7. $\dfrac{1\,800}{15} - \dfrac{940 - 1\,200}{20}$
8. $\dfrac{(-12.86)(-13.5)(3.8)^{3.7}}{(-3.456)(14.8)}$
9. $\dfrac{(63)(72) + (10 + 23)(36 - 27)}{(10 + 30 + 14)(5)}$
10. $\sqrt{36^2 - 4(5.3)(11)}$
11. $\sqrt{9\,216} + \sqrt[4]{923\,521} - \sqrt[6]{531\,441}$
12. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{32\,768}}$
13. $(21)(45)(73) - \dfrac{(18)(14)}{3.6} - \dfrac{78}{(0.006)(2.5)}$
14. $\dfrac{(42)(12)(9) - (3)(18)(7)}{20 + (14)^2}$
15. $\dfrac{\sqrt[5]{(13\,114)(4\,610) - (2\,100)(4.6)}}{-2.7}$
16. $(132)^{0.7}(150) + (200)(13)^{1.5} + (1\,050)^{1.10} + (11.6)(140)$
17. $26\{75 - 3[10 - 2(13 - 5.5)]\}$
18. $34\{42 + 30[51.6 + 2.34(64 - 81.3 + 100)]\}$

1.4 Notación científica

En ocasiones es necesario trabajar con números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo: considere el siguiente problema:

$$(31)(17)(96)^7$$

El resultado de la operación anterior es un número muy grande:

$$39\,601\,282\,096\,300\,032$$

Si el cálculo se realiza *a mano*, el único problema que se tiene es que resulta muy laborioso y tardado. El trabajo se simplifica si el cálculo se realiza con una calculadora; sin embargo, como el resultado no cabe en la pantalla, la calculadora lo presentará en **notación científica**:

$$3.960128209 \times 10^{16}.$$

La notación científica consiste en escribir un número cualquiera en la forma:

$$a \times 10^n$$

en donde a es un número mayor o igual a 1 y menor que 10 y n es un entero, positivo o negativo.

De lo anterior se desprende que la notación científica consiste en expresar un número cualquiera como el producto de dos números, uno de los cuales es una potencia entera de 10.

Transformación de notación ordinaria a notación científica

Considere las siguientes igualdades:

$$325 = (32.5)(10) = (3.25)(10)(10) = 3.25 \times 10^2$$

$$1436 = (143.6)(10) = (14.36)(10)(10) = (1.436)(10)(10)(10) = 1.436 \times 10^3$$

Como se ve, mover el punto decimal de un número un lugar hacia la izquierda es equivalente a dividir entre 10; mover el punto decimal dos lugares hacia la izquierda es equivalente a dividir entre 100, etcétera. Por tanto, simpre que se mueva el punto decimal n lugares hacia la izquierda, se debe multiplicar el número resultante por 10^n para que el número no se altere.

Por ejemplo:

$$340\,000 = 340 \times 10^3 = 34 \times 10^4 = 3.4 \times 10^5 = 0.34 \times 10^6$$

El procedimiento para transformar números menores que la unidad es semejante. Considere las siguientes igualdades:

$$0.374 = (3.74)(1/10) = 3.74 \times 10^{-1}$$

$$0.00784 = 0.0784(1/10) = 0.784(1/10)(1/10) = 7.84(1/10)(1/10)(1/10) = 7.84 \times 10^{-3}$$

Como se observa, mover el punto decimal de un número un lugar hacia la derecha equivale a multiplicar por 10; mover el punto decimal dos lugares hacia la derecha equivale a multiplicar por 100, etcétera. Por tanto, siempre que se mueva el punto decimal n lugares hacia la derecha, se debe dividir el número resultante entre 10^n, o lo que es lo mismo, multiplicar por 10^{-n}, para que el número no se altere.

Por ejemplo:

$$0.00044 = 0.044 \times 10^{-2} = 4.4 \times 10^{-4} = 440 \times 10^{-6}$$

Aunque el punto decimal puede colocarse en cualquier posición, por definición el punto decimal se coloca para obtener un número mayor o igual a 1, pero menor que 10. Por esta razón, la forma científica de los números 340 000 y 0.00044 es 3.4×10^5 y 4.4×10^{-4}, respectivamente.

Ejemplo 1.14

Escriba cada número en notación científica.

a) 48 350 000

b) 12 300

c) 6.3

d) 0.3361

e) 0.000008

Solución:

a) $48\,350\,000 = 4.835 \times 10^7$ El punto decimal se movió 7 lugares a la izquierda.

b) $12\,300 = 1.23 \times 10^4$ El punto decimal se movió 4 lugares a la izquierda.

c) $6.3 = 6.3 \times 10^0$ El punto decimal no se movió.

d) $0.3361 = 3.361 \times 10^{-1}$ El punto decimal se movió un lugar a la derecha.

e) $0.000\,008 = 8 \times 10^{-6}$ El punto decimal se movió 6 lugares a la derecha.

Transformación de notación científica a notación ordinaria

El punto decimal se mueve a la derecha si el exponente es positivo y a la izquierda si es negativo; el número de lugares que se mueve el punto decimal lo indica el exponente.

Ejemplo 1.15

Escriba cada número en notación ordinaria.

a) 6.7×10^5

b) 5.671×10^2

c) 4.613×10^{-7}

d) 7.08×10^{-2}

Solución:

a) $6.7 \times 10^5 = 670\,000$ El punto decimal se movió 5 lugares a la derecha.

b) $5.671 \times 10^2 = 567.1$ El punto decimal se movió 2 lugares a la derecha.

c) $4.613 \times 10^{-7} = 0.000\,000\,4613$ El punto decimal se movió 7 lugares a la izquierda.

d) $7.08 \times 10^{-2} = 0.0708$ El punto decimal se movió 2 lugares a la izquierda.

Para introducir números expresados en notación científica en la calculadora, se emplea la tecla EXP (Exponent) o EE (Enter Exponent). Al introducir un número expresado en notación científica, la base 10 se omite en la mayoría de las calculadoras y únicamente aparece el exponente. Por ejemplo: la pantalla de una calculadora muestra el número 4.1896×10^7 como:

$$4.1896\ 07 \quad \text{o bien} \quad 4.1896\text{E}7$$

Para introducir un número expresado en notación científica en la calculadora, se sigue el procedimiento que se menciona a continuación:

1. Teclee los dígitos que forman el número.
2. Oprima la tecla $\boxed{\text{EXP}}$ o $\boxed{\text{EE}}$.
3. Teclee el exponente.

Por ejemplo: para introducir el número 3.47×10^{-3}, se teclea

$$3.47\ \boxed{\text{EXP}}\ 3\ \boxed{+/-}$$

El resultado que se muestra en la pantalla es:

$$3.47\ -03 \quad \text{o bien} \quad 3.47\text{E}-3$$

Cuando se realiza un cálculo en notación ordinaria que produce un resultado con demasiados dígitos para la capacidad de la pantalla, la calculadora cambia automáticamente a notación científica. Por ejemplo, al multiplicar 68 300 000 por 15 000 000 el resultado mostrado es

$$1.0245\ 15 \quad \text{o bien} \quad 1.0245\text{E}15$$

El resultado se interpreta como 1.0245×10^{15}.

Ejemplo 1.16

Resuelva

$$\frac{(435\,000\,000)(0.000\,745)}{2\,480\,000\,000\,000}$$

Solución:

Se escriben los números en notación científica:

$$\frac{(4.35 \times 10^{8})(7.45 \times 10^{-4})}{2.48 \times 10^{12}}$$

La expresión anterior puede resolverse utilizando las leyes de los exponentes o empleando una calculadora.

Método 1. Utilizando las leyes de los exponentes.

$$\frac{(4.35\times 10^{8})(7.45\times 10^{-4})}{2.48\times 10^{12}} = \frac{(4.35)(7.45)}{2.48}\,\frac{(10)^{8}(10)^{-4}}{(10)^{12}} = 13.06754032\times 10^{-8}$$

$$= 1.306754032\times 10^{-7}$$

Método 2. Forma directa, utilizando una calculadora.

Se introducen los números expresados en notación científica en el orden en que está escrita la expresión; esto es, tecleamos

$$4.35\ \boxed{\text{EXP}}\ 8\ \boxed{\times}\ 7.45\ \boxed{\text{EXP}}\ 4\ \boxed{+/-}\ \boxed{\div}\ 2.48\ \boxed{\text{EXP}}\ 12\ \boxed{=}\ 1.306754032\times 10^{-7}$$

Ejercicios 1.2

Escriba cada número en notación científica.

1. 482 000
2. 20
3. 133 000 000 000
4. 0.000 000 258
5. 0.040
6. 0.000 712 5

Escriba cada número en notación ordinaria.

7. 3.56×10^{2}
8. 4.365×10^{7}
9. 7×10^{5}
10. 1×10^{-6}
11. 3.1415×10^{-3}
12. 6.2×10^{-1}

Resuelva cada una de las siguientes operaciones, convirtiendo, primero, cada número a notación científica.

13. $(2\,410\,000)^{2\,45}$

14. $(135\,000)(12\,800)(4\,710)^3$

15. $\dfrac{(85\,000)(0.000012)}{(10\,300\,000)(0.002)^2}$

16. $(0.00377)^{1.6}(314\,200)^{1.4}$

17. $\dfrac{(257\,000)(\sqrt[3]{68\,921\,000})}{100\,000\,000}$

Resuelva cada una de las siguientes operaciones.

18. $\dfrac{(2.122 \times 10^3)^9}{(3.04 \times 10^{-4})^5}$

19. $(5.45 \times 10^5)(1 \times 10^4) + (1.05 \times 10^2)^4$

20. $\dfrac{1.26 \times 10^{13}}{(3.6 \times 10^{-5})(7 \times 10^6)}$

21. La masa de la Tierra es de 5 980 000 000 000 000 000 000 000 kilogramos aproximadamente. Exprese este número en notación científica.

22. El radio promedio del Sol es de 6.96×10^8 metros. Exprese este número en notación ordinaria.

23. En astronomía, las distancias se miden en años-luz. Un año-luz es la distancia que recorre un rayo de luz en un año. Si la velocidad de la luz es de 300 000 km/seg, aproximadamente, ¿cuál es el valor de un año-luz en kilómetros?

24. Utilizando los datos del problema anterior, calcule la distancia del Sol a la Tierra, sabiendo que un rayo de luz solar tarda en llegar a la Tierra aproximadamente 8 minutos.

25. La capacidad de almacenamiento de una computadora se describe en megabytes (Mb), donde 1 Mb representa 1 048 576 bytes de memoria. Si se requiere un byte para representar un solo símbolo o carácter como una letra, un número, un signo de puntuación, ¿aproximadamente cuántos símbolos es capaz de almacenar un disco duro de 1 000 Mb (un gigabyte)? Dé la respuesta en notación científica.

26. Según datos divulgados por MasterCard, en el primer semestre del 2002 los tarjetahabientes en todo el mundo usaron las tarjetas MasterCard en más de 6.3 millones de transacciones, generando un volumen de ventas de 534.7 mil millones de dólares. Utilizando el tipo de cambio del día, exprese en notación científica esa cantidad de dinero en pesos.

1.5 Logaritmos

Los logaritmos fueron descubiertos por *John Napier* (1550-1617), hacendado escocés cuyo pasatiempo favorito eran las matemáticas. Publicó su descubrimiento en 1614. Los logaritmos fueron llevados a la práctica por el matemático inglés *Henry Briggs* (1556-1631), profesor en la Universidad de Oxford.

Los logaritmos tuvieron un éxito inmediato ya que son una herramienta muy útil para abreviar diversas operaciones aritméticas. Sobre todo fueron utilizados para realizar cálculos aritméticos complejos y tediosos, como los llevados a cabo en astronomía. Actualmente con el surgimiento de las calculadoras electrónicas, el uso de los logaritmos con propósitos computacionales se ha relegado a un papel menor. Aun así, los logaritmos tienen amplia aplicación en muchas áreas de la ciencia, la tecnología, la economía, las finanzas, etcétera.

La palabra **logaritmo** viene del griego ***logos*** que significa *razonar* o *calcular* y ***arithmos*** *número*. Por tanto, logaritmo significa *número para calcular*.

La logaritmación es una operación que consiste en, dada una base y el resultado de una elevación a potencia, hallar el exponente. Por ejemplo: ¿a qué potencia hay que elevar la base 8 para obtener el número 64? Como para obtener el número 64 hay que elevar 8 al cuadrado, se dice que 2 es el logaritmo de 64 en la base 8, y se escribe de la siguiente forma:

$$\log_8 64 = 2$$

Otro ejemplo: puesto que $5^{-3} = 0.008$, se dice que -3 es el logaritmo de 0.008 en la base 5 y se escribe:

$$\log_5 0.008 = -3$$

En general, si $b^L = N$, donde $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces L se llama *logaritmo* de N en la base b. Es decir, el logaritmo de un número N es el exponente L al que hay que elevar una base b, para obtener el número N. En forma simbólica la definición se escribe como:

$$\log_b N = L \quad \text{si y sólo si} \quad b^L = N \tag{1.1}$$

Ejemplo 1.17

Utilizando la definición de logaritmo, cambie las igualdades siguientes a la forma logarítmica.

a) $4^3 = 64$

b) $4\,096 = 2^{12}$

c) $49^{\frac{1}{2}} = 7$

Solución:

a) $\log_4 64 = 3$

b) $\log_2 4\,096 = 12$

c) $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$

Ejemplo 1.18

Utilizando la definición de logaritmo, cambie las igualdades siguientes a la forma exponencial.

a) $\log_{10} 10\,000 = 4$

b) $\log_{81} 9 = 0.5$

c) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$

Solución:

a) $10^4 = 10\,000$

b) $81^{0.5} = 9$

c) $4^{-3} = \frac{1}{64}$

Tema especial

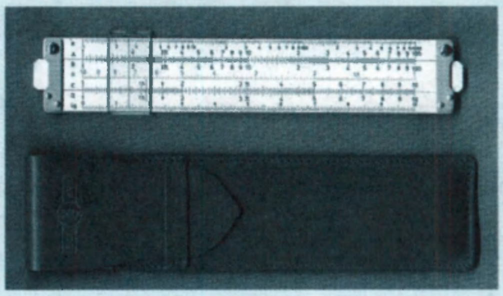
La regla de cálculo

¿Cómo realizaban los cálculos los ingenieros, científicos y estudiantes de ingeniería y ciencias antes de la aparición de las calculadoras electrónicas de bolsillo? La respuesta es: utilizando una *regla de cálculo*.

La regla de cálculo se presentó por primera vez en la Academia Francesa de Ciencias en 1624, por el profesor de astronomía Edmund Gunther (1581-1626) y desapareció paulatinamente de las universidades y mesas de trabajo de ingenieros y científicos cuando se emplearon los microchips en la fabricación de las primeras calculadoras electrónicas, en 1972, aproximadamente.

Esta maravilla matemática, basada en escalas logarítmicas, era útil para resolver los más variados problemas matemáticos; desde multiplicaciones y divisiones hasta expresiones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Edificios, máquinas, automóviles, aviones y electrodomésticos se diseñaron y construyeron con su ayuda. Actualmente la regla de cálculo interesa únicamente a los coleccionistas, a los nostálgicos y a los interesados en la historia de la matemática.

A continuación se muestra la fotografía de una regla de cálculo típica.



Para más información sobre la historia, uso, aplicaciones, etc. de la regla de cálculo, visite los siguientes sitios de Internet: www.sliderule.ca y http://inventors.about.com/library/inventors/blcalculator.htm

1.6 Leyes de los logaritmos

A continuación se enuncian y demuestran las leyes básicas de los logaritmos, las cuales son simplemente una reformulación de las leyes de los exponentes. Después de cada demostración se dan ejemplos numéricos de la ley enunciada.

Teorema 1

El logaritmo de cero y de los números negativos no existe en el conjunto de los números reales. Esto es:

$$\log_b N \text{ no existe para todo } N \leq 0$$

Demostración

La base de un sistema de logaritmos no puede ser negativa, porque si lo fuera sus potencias pares serían positivas y las impares negativas y se tendría un conjunto de números alternados positivos y negativos y, por tanto, algunos números positivos no tendrían logaritmo.

Usando como base lo expuesto en el párrafo anterior, el logaritmo de un número negativo sería un número L tal que b^L debería ser un número negativo. Tal número no existe en el conjunto de los números reales; por tanto, el logaritmo de cero y el logaritmo de los números negativos no existe.

En matemáticas superiores se demuestra que los logaritmos de los números negativos son números complejos.

Ejemplos:

$\log_8(-52)$ no existe en el conjunto de los números reales.

$\log_{20}(-9)$ no existe en el conjunto de los números reales.

Teorema 2

El logaritmo del número 1 es igual a cero. Esto es:

$$\log_b 1 = 0$$

Demostración

Se sabe que $b^0 = 1$ para toda $b > 0$. Utilizando la definición (1.1) se tiene que $\log_b 1 = 0$.

Ejemplos:

$\log_{12} 1 = 0$

$\log_{10} 1 = 0$

Teorema 3

El logaritmo del número b, en la base b, es igual a 1, esto es:

$$\log_b b = 1$$

Demostración

Como $b^1 = b$, entonces, por (1.1) se tiene que $\log_b b = 1$.

Ejemplos:

$\log_4 4 = 1$

$\log_{18} 18 = 1$

Teorema 4

El logaritmo del producto de dos números positivos es igual a la suma de los logaritmos de dichos números, esto es:

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

Demostración

Sea:

$$b^u = M \qquad (1)$$

$$b^v = N \qquad (2)$$

Por la definición de logaritmo, las expresiones (1) y (2) se pueden escribir como

$$\log_b M = u \qquad (3)$$

$$\log_b N = v \qquad (4)$$

Por otro lado, multiplicando (1) y (2), se tiene $b^u b^v = MN$

Por una ley de los exponentes, la expresión anterior se escribe como $b^{(u+v)} = MN$. Por la definición (1.1), esta última expresión es equivalente a $\log_b MN = u + v$.

Sustituyendo u y v de la expresión anterior por (3) y (4), se tiene que

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

Este teorema puede extenderse al caso del producto de tres o más números positivos.

Ejemplos:

$\log_3 (12)(25) = \log_3 12 + \log_3 25$

$\log_{30} (100)(70)(22) = \log_{30} 100 + \log_{30} 70 + \log_{30} 22$

Teorema 5

El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador. Esto es:

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

Demostración

Se divide (1) entre (2): $\frac{b^u}{b^v} = \frac{M}{N}$. Por una ley de los exponentes, la igualdad anterior es equivalente a $b^{(u-v)} = \frac{M}{N}$.

Pasando la igualdad anterior a la forma logarítmica se tiene $\log_b \frac{M}{N} = u - v$.

Sustituyendo u y v de la expresión anterior por (3) y (4), se tiene que

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

Ejemplos:

$\log_2 \frac{20}{15} = \log_2 20 - \log_2 15$

$\log_{11} \frac{123}{400} = \log_{11} 123 - \log_{11} 400$

Teorema 6

El logaritmo de un número positivo elevado a un exponente es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del número positivo. Esto es:

$$\log_b M^n = n \log_b M$$

Demostración

Si (1) se eleva a la potencia n, se tiene $(b^u)^n = M^n$. La expresión anterior es equivalente a $b^{un} = M^n$.

Pasando la última igualdad a la forma logarítmica se tiene: $\log_b M^n = un$.

Utilizando (3) para sustituir u, se tiene

$$\log_b M^n = n \log_b M$$

Ejemplos:

$\log_{10}(24.6)^3 = 3\log_{10} 24.6$

$\log_6 \sqrt[5]{100} = \log_6 (100)^{1/5} = \dfrac{1}{5}\log_6 100$

En el segundo ejemplo, la raíz se transformó utilizando la siguiente ley de los radicales: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$.

Ejemplo 1.19

Utilice las leyes de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones.

a) $\log_3 (5.24)(10.3)^5$

b) $\log_{10} \dfrac{mn}{pq}$

c) $\log_a \sqrt{870}\, a^{5/3}$

Solución:

a) $\log_3 (5.24)(10.3)^5 = \log_3 5.24 + \log_3 (10.3)^5$ teorema 4

$= \log_3 5.24 + 5\log_3 10.3$ teorema 6

b) $\log_{10} \dfrac{mn}{pq} = \log_{10} mn - \log_{10} pq$ teorema 5

$= \log_{10} m + \log_{10} n - (\log_{10} p + \log_{10} q)$ teorema 4

$= \log_{10} m + \log_{10} n - \log_{10} p - \log_{10} q$

c) $\log_a \sqrt{870}\, a^{5/3} = \log_a \sqrt{870} + \log_a a^{5/3}$ teorema 4

$= \dfrac{1}{2}\log_a 870 + \dfrac{5}{3}\log_a a$ teorema 6

$= \dfrac{1}{2}\log_a 870 + \dfrac{5}{3}$ teorema 3

Ejemplo 1.20

Utilice las leyes de los logaritmos para escribir las siguientes expresiones como un solo logaritmo.

a) $\log_{10} 21 + 2 \log_{10} 3$

b) $\log_m x + 2.1 \log_m y - \dfrac{\log_m (x^2 + 1)}{3}$

Solución:

Se utilizan las leyes de los logaritmos leídas de derecha a izquierda.

a) $\log_{10} 21 + 2 \log_{10} 3 = \log_{10} 21 + \log_{10} (3)^2$ teorema 6

$= \log_{10} (21)(3)^2$ teorema 4

$= \log_{10} (21)(9) = \log_{10} 189$

b) $\log_m x + 2.1 \log_m y - \dfrac{\log_m (x^2 + 1)}{3} = \log_m x + \log_m y^{21} -$

$\log_m (x^2 + 1)^{1/3}$ teorema 6

$= \log_n \dfrac{xy^{2.1}}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$ teoremas 4 y 5

Ejercicios 1.3

En los ejercicios 1 a 6, cambie cada expresión exponencial por una expresión logarítmica equivalente.

1. $2^{10} = 1024$
2. $20^0 = 1$
3. $10^{-3} = 0.001$
4. $5^7 = 78125$
5. $100^1 = 100$
6. $a^{3x} = b$

En los ejercicios 7 a 12, cambie cada expresión logarítmica por una expresión exponencial equivalente.

7. $\log_{22} 1 = 0$

8. $\log_8 4 = \dfrac{2}{3}$

9. $\log_4 0.5 = -0.5$

10. $\log_{20} 400 = 2$

11. $\log_{11} 1331 = 3$

12. $\log_6 m = t$

Utilice las leyes de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones.

13. $\log_5 u^3 v^5 z^8$

14. $\log_{12} \dfrac{50}{x^2 y^5}$

15. $\log_a (6xyz^3)^4$

16. $\log_b \dfrac{m\sqrt[3]{n}}{p\sqrt{q}}$

17. $\log_{20} \sqrt[4]{\dfrac{20x}{y}}$

18. $\log_{10} \left(10\sqrt[3]{x^2}\sqrt{yz}\right)$

19. $\log_b \dfrac{x^4\sqrt{x^3 - 2}}{(x+5)^5}$

Escriba cada una de las siguientes expresiones como un solo logaritmo.

20. $3\log_a x + 4\log_a y - 7\log_a z$

21. $\log_2 x + \dfrac{1}{3}\log_2 y - 5\log_2 z - \log_2 w$

22. $\log_c a^3 b^2 + 3\log_c \dfrac{a}{b}$

23. $\dfrac{\log_{10} 21 - \log_{10} 9 + \log_{10} 12 - \log_{10} 5}{3}$

24. $2 \log_b 5t^3 - \frac{1}{4} \log_b (2t + 3)$

25. Demuestre que $\log_b \frac{1}{N} = -\log_b N$, donde b y N son números reales positivos, con $b \neq 1$.

26. Si $\log_{10} 2 = 0.30103$ y $\log_{10} 5 = 0.69897$, encuentre $\log_{10} 20$.

1.7 Sistemas de logaritmos

Debido a que cualquier número positivo, excepto 1, puede usarse como base de un sistema de logaritmos, el número de sistemas es infinito. Sin embargo, los sistemas logarítmicos más utilizados, tanto en matemática pura como en aplicaciones, son el **sistema de logaritmos naturales** y el **sistema de logaritmos decimales**.

Sistema de logaritmos decimales

Este sistema, llamado también **sistema de logaritmos comunes o de Briggs** (en honor del matemático inglés Henry Briggs) emplea el número 10 como base. Por tanto, el logaritmo decimal de un número positivo N se escribe como $\log_{10} N$. Se acostumbra omitir el subíndice 10 al trabajar con logaritmos decimales; de esta forma, $\log_{10} N = \log N$.

En este sistema los únicos números cuyos logaritmos son números enteros son las potencias enteras de 10, como se muestra a continuación:

$$
\begin{array}{rcll}
10^4 & = & 10\,000 & \text{por tanto} \quad \log 10\,000 = 4 \\
10^3 & = & 1\,000 & \text{por tanto} \quad \log 1\,000 = 3 \\
10^2 & = & 100 & \text{por tanto} \quad \log 100 = 2 \\
10^1 & = & 10 & \text{por tanto} \quad \log 10 = 1 \\
10^0 & = & 1 & \text{por tanto} \quad \log 1 = 0 \\
10^{-1} = 1/10 & = & 0.1 & \text{por tanto} \quad \log 0.1 = -1 \\
10^{-2} = 1/100 & = & 0.01 & \text{por tanto} \quad \log 0.01 = -2 \\
10^{-3} = 1/1000 & = & 0.001 & \text{por tanto} \quad \log 0.001 = -3
\end{array}
$$

De la lista anterior resulta fácil ver que $\log 10^n = n$ y, como se observa, los números mayores que 1 tienen logaritmos positivos, mientras que los números que se encuentran entre 0 y 1 tienen logaritmos negativos. Además, puesto que el logaritmo de una potencia entera de 10 es un número entero, se concluye que los logaritmos de otros números no son enteros, sino un número entero más una fracción decimal infinita. Así, para un número comprendido entre 1 y 10 el logaritmo está comprendido entre 0 y 1; para un número entre 10 y 100 el logaritmo está entre 1 y 2 y así sucesivamente. Para un número que se encuentra entre 0.1 y 1, el logaritmo está comprendido entre 0 y -1; para un número entre 0.1 y 0.01, el logaritmo está comprendido entre -1 y -2 y así sucesivamente. Por ejemplo: el logaritmo de 150 es 2.176091259, expresado con una precisión de 9 cifras decimales; el logaritmo de 0.2 es -0.69897, expresado con una precisión de 5 cifras decimales.

Para obtener el logaritmo decimal de un número, se utilizan tablas de logaritmos o calculadora. El uso de las tablas de logaritmos es raro en la actualidad; la forma más rápida y fácil de obtener el logaritmo de un número es por medio de una calculadora.

Para encontrar el logaritmo decimal de un número N empleando la calculadora, se sigue una de las siguientes secuencias de tecleo, dependiendo del modelo de calculadora que se tenga.

$$\boxed{\log}\ N \quad \text{o bien} \quad N\ \boxed{\log}$$

Ejemplo 1.21

Utilizando calculadora, halle el logaritmo decimal de los números 215 y 0.001 93.

Solución:

$$\boxed{\log}\ 215 = 2.33243846$$

$$\boxed{\log}\ 0.00193 = -2.714442691$$

Consideremos ahora el problema inverso; es decir, conocido el logaritmo de un número desconocido N, encontrar el valor del número N, que recibe el nombre de **antilogaritmo** y se abrevia como **antilog**. Por ejemplo: se sabe que el logaritmo de 718 es 2.856124444, entonces el antilogaritmo de 2.856124444 es 718.

Suponga que se tiene la siguiente igualdad

$$\log x = 1.39794$$

y se desea encontrar el valor de x, es decir, encontrar el antilogaritmo de 1.39794. Aplicando a la igualdad anterior la definición de logaritmo (1.1), es posible escribir

$$10^{1.39794} = x$$

Como x es el antilogaritmo de 1.39794, se acostumbra escribir

$$x = \text{antilog } 1.39794 = 10^{1.39794}$$

Al llevar a cabo la elevación a potencia, se tiene

$$x = 25$$

Como se ve, el cálculo del antilogaritmo de un número se obtiene mediante la definición de logaritmo. En las calculadoras científicas, financieras y graficadoras existe una tecla específica para obtener el antilogaritmo de un número, esta tecla es $\boxed{10^x}$ y, por lo general, se encuentra como función secundaria de $\boxed{\text{log}}$.

Para encontrar el antilogaritmo decimal de un número, se oprime la tecla $\boxed{10^x}$, o bien la secuencia $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{log}}$ y en seguida se teclea el número dado. En algunas calculadoras, primero se teclea el número y después se oprime la tecla $\boxed{10^x}$.

Ejemplo 1.22

Halle el antilogaritmo decimal de los números 1.819543935 y −0.602059991.

Solución:

$$\text{antilog } 1.819543935 = \boxed{10^x}\ 1.819543935 \boxed{=}\ 66$$

$$\text{antilog } -0.602059991 = \boxed{10^x}\ 0.602059991 \boxed{+/-} \boxed{=}\ 0.25$$

Sistema de logaritmos naturales

Este sistema, llamado también **sistema de logaritmos neperianos** (en honor de John Napier), emplea como base un número irracional representado por la letra e, y cuyo valor aproximado a 12 cifras decimales es 2.718 281 828 459... En cálculo se explica la razón de por qué se eligió como base este número en apariencia tan extraño. La letra e se eligió en honor del matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783).

La notación $\log_e N$ se lee "logaritmo del número N en la base e", o bien, "logaritmo natural (o neperiano) de N". Se acostumbra escribir $\ln N$ en lugar de $\log_e N$.

Para obtener el logaritmo natural de un número, se utilizan tablas o calculadora. Para encontrar el logaritmo natural de un número N empleando la calculadora, se sigue una de las siguientes secuencias de tecleo, dependiendo del modelo de calculadora que se tenga.

$$\boxed{\ln}\ N \quad \text{o bien} \quad N\ \boxed{\ln}$$

Ejemplo 1.23

Encuentre el logaritmo natural de 26.

Solución:

$$\boxed{\ln}\ 26 = 3.258096538$$

Para encontrar el antilogaritmo natural de un número, se oprime la tecla $\boxed{e^x}$ y posteriormente se teclea el número. Esta tecla se encuentra, comúnmente, como segunda función de la tecla $\boxed{\ln}$. En algunas calculadoras es necesario teclear primero el número y después oprimir la tecla de antilogaritmo. El antilogaritmo natural se abrevia como anti ln.

Ejemplo 1.24

Encuentre el antilogaritmo natural de 4.510859507.

Solución:

$$\text{anti}\ln 4.510859507 = \boxed{e^x}\ 4.510859507\ \boxed{=}\ 91$$

Ejercicios 1.4

Utilizando una calculadora, obtenga:

1. $\log 72.956$
2. $\log 3\,521$
3. $\log 10$
4. $\log(5.7 \times 10^8)$
5. $\log 0.01417$
6. $\log(1.425 \times 10^{-5})$
7. $\ln 10$

8. $\ln 837$

9. $\ln 1300.5$

10. $\ln e$

11. $\ln 0.510$

12. $\ln (8.42 \times 10^{-4})$

Utilizando una calculadora, obtenga:

13. antilog 0.3714

14. antilog 0.81

15. antilog 7.10

16. antilog -1.15

17. antilog 1.5

18. antilog -3.8

19. anti ln 2.103

20. anti ln 30.1156

21. anti ln -1.609437912

22. anti ln 0

23. anti ln 5.811739616

24. anti ln -32.52

25. El gerente de producción de una fábrica encuentra que el costo de producir q artículos por hora lo da

$$C = 10 + 8 \log(1 + 2q)$$

donde C indica cientos de dólares. Encuentre el costo de producir 50 artículos por hora.

26. La masa molecular media M de un subproducto del petróleo puede determinarse, aproximadamente, a partir de su punto de ebullición T (en grados Celsius) a la presión atmosférica, por la ecuación

$$\log M = 2.51 \log(T + 393) - 4.7523$$

Calcule la masa molecular media cuando la temperatura es de 160°C.

1.8 Aplicaciones de los logaritmos

Utilizar logaritmos para efectuar cálculos aritméticos presenta grandes ventajas, ya que de acuerdo con las leyes de los logaritmos, es posible reemplazar la multiplicación por una suma, la división por una resta, la elevación a potencia por una multiplicación y la extracción de raíces por una división. Sin embargo, dada la disponibilidad actual de calculadoras, los logaritmos han perdido parte de su importancia como instrumentos de cálculo. Aun así, los logaritmos siguen siendo útiles, tanto en matemática pura como aplicada.

Ejemplo 1.25

Use logaritmos para calcular

$$\frac{(40.38)^{3.73}(124)}{\sqrt[5]{248\,832}}$$

Solución:

Sea: $N = \dfrac{(40.38)^{3.73}(124)}{\sqrt[5]{248\,832}}$. Aplicando logaritmos decimales a ambos lados de la ecuación, para que ésta no se altere, se tiene

$$\log N = \log \frac{(40.38)^{3.73}(124)}{\sqrt[5]{248\,832}}$$

Por los teoremas 4, 5 y 6, es posible escribir:

$$\log N = 3.73 \log 40.38 + \log 124 - \frac{\log 248\,832}{5}$$

Esto es,

$$\log N = (3.73)(1.606166315) + 2.093421685 - \frac{5.39590623}{5}$$

$$\log N = 7.005240794$$

Por tanto,

$$N = \operatorname{antilog} 7.005240794 = 10^{7.005240794}$$

$$N = 10\,121\,404.79$$

Al aplicar logaritmos a ambos lados de una ecuación, se utiliza cualquier base y el resultado es el mismo. El lector puede verificar esto resolviendo el ejemplo anterior utilizando logaritmos naturales.

Enseguida se muestra la secuencia de tecleo para resolver el problema de manera directa, utilizando una calculadora.

$$\boxed{(}\ 40.38\ \boxed{y^x}\ 3.73\ \boxed{\times}\ 124\ \boxed{)}\ \boxed{\div}\ 5\ \boxed{\sqrt[x]{y}}\ 248832\ \boxed{=}\ 10121404.75$$

Ejemplo 1.26

Calcule, utilizando logaritmos, el resultado de $4 + 2.1^{21}$.

Solución:

Sea $x = 4 + 2.1^{21}$. Aplicando logaritmos naturales a ambos lados de la igualdad, se tiene

$$\ln x = \ln(4 + 2.1^{21})$$

A pesar de que la expresión anterior es correcta, no se puede resolver el problema debido a que no existen leyes de los logaritmos para sumas y restas. Escribir la igualdad anterior como $\ln x = \ln 4 + \ln 2.1^{21}$ es incorrecto.

Para resolver el problema se procede de la siguiente forma:

Sea $w = 2.1^{21}$. Por tanto,

$$\ln w = \ln 2.1^{2.1} = (2.1)(\ln 2.1)$$
$$\ln w = (2.1)(0.741937344) = 1.558068424$$

Por tanto,

$$w = \text{anti} \ln 1.558068424 = e^{1.558068424}$$
$$w = 4.749638092$$

Una vez obtenido el resultado de la elevación a potencia, obtener el valor de x es algo muy sencillo:

$$x = 4 + 4.749638092 = 8.749638092$$

La resolución directa, por medio de una calculadora, sería:

$$4\ \boxed{+}\ 2.1\ \boxed{y^x}\ 2.1\ \boxed{=}\ 8.749638092$$

Ejemplo 1.27

Una ecuación logarítmica es aquella que contiene términos de la forma $\log_b x$, donde b es un número positivo distinto de 1.

Resuelva la ecuación logarítmica $\log_2 (x + 4) - \log_2 (x - 3) = 3$.

Solución:

Utilizando las leyes de los logaritmos, es posible escribir $\log_2 (x + 4) - \log_2 (x - 3) = 3$ en la forma equivalente

$$\log_2 \frac{x+4}{x-3} = 3$$

Utilizando la definición de logaritmo, la igualdad anterior se escribe como

$$2^3 = \frac{x+4}{x-3}$$

La igualdad anterior es una ecuación de primer grado con una incógnita. Resolviéndola, tenemos

$$8(x - 3) = x + 4$$

Es decir,

$$8x - 24 = x + 4$$
$$7x = 28$$
$$x = 4$$

Ejemplo 1.28

Una ecuación exponencial es aquella en la cual la variable aparece como exponente. Por ejemplo:

$$5^{2x+1} = 3^x$$

En la solución de tales ecuaciones los logaritmos y sus propiedades desempeñan un papel importante. Resuelva la ecuación exponencial anterior.

Solución:

Se aplican logaritmos en ambos lados de la igualdad; en esta ocasión se aplicarán logaritmos decimales.

$$\log 5^{2x+1} = \log 3^x$$

Por el teorema 6, se tiene

$$(2x + 1) \log 5 = x \log 3$$
$$(2x + 1)(0.698970004) = x(0.477121254)$$
$$1.397940008x + 0.698970004 = 0.477121254x$$
$$0.920818754x = -0.698970004$$
$$x = \frac{-0.698970004}{0.920818754} = -0.759074466$$

Ejemplo 1.29

La experiencia demuestra que la demanda de un artículo nuevo aumenta rápidamente al principio y después se estabiliza. El porcentaje P de compras reales del artículo, después de permanecer en el mercado durante t meses, está dado por

$$P = 85 - 75(0.75)^t$$

¿Cuántos meses transcurrirán antes de llegar a 50% de ventas?

Solución:

Se conoce el valor de P y se desea calcular el valor de t. Por tanto, se tiene

$$50 = 85 - 75(0.75)^t$$

$$75(0.75)^t = 85 - 50 = 35$$

Aplicando logaritmos naturales a ambos lados de la igualdad anterior, se tiene

$$\ln 75(0.75)^t = \ln 35$$

Por tanto,

$$\ln 75 + t \ln 0.75 = \ln 35$$

Despejando t, se tiene

$$t = \frac{\ln 35 - \ln 75}{\ln 0.75} = 2.65 \text{ meses}$$

Muchos fenómenos naturales, económicos y financieros, entre otros, crecen o decrecen continuamente de manera exponencial. Cuando una cantidad crece exponencialmente a partir de un valor inicial Q_0, la cantidad final Q obtenida después de transcurrido un intervalo de tiempo t, viene dada por la siguiente ecuación

$$Q = Q_0 e^{kt} \tag{1.2}$$

en donde k es el porcentaje de crecimiento y e es la base de los logaritmos naturales. Ejemplos de procesos crecientes en forma exponencial son: el interés capitalizable continuamente, el crecimiento de la población, la inflación y el crecimiento del PNB (Producto Nacional Bruto).

Cuando una cantidad decrece exponencialmente a partir de un valor inicial Q_0, la cantidad final Q obtenida después de transcurrido un intervalo de tiempo t, viene dada por la siguiente ecuación:

$$Q = Q_0 e^{-kt} \tag{1.3}$$

en donde k es el porcentaje de decrecimiento. Ejemplos de procesos decrecientes en forma exponencial son: la desintegración radiactiva, las ventas de un artículo al interrumpir la publicidad, la devaluación de ciertos bienes de capital (maquinaria) y el enfriamiento de un objeto caliente.

Ejemplo 1.30

México contaba en el año 2002 con una población total de 101.8 millones de habitantes y una tasa de crecimiento promedio de 1.4% anual. Suponiendo que la tasa de crecimiento se mantiene constante, calcule el número de habitantes para el año 2010.

Solución:

Se ha observado que el crecimiento de una población es aproximadamente exponencial; por tanto, es posible resolver el problema utilizando la ecuación (1.2). Sea:

Q = número de habitantes en el año 2010

Q_0 = número de habitantes en el año 2002 = 101.8 millones

t = tiempo transcurrido = 2010 − 2002 = 8 años

k = 1.4% anual = 0.014 por año[1]

Sustituyendo los datos anteriores en la ecuación (1.2), se tiene

$$Q = 101.8\, e^{(0.014)(8)}$$

$$Q = 101.8\, e^{0.112}$$

Aplicando logaritmos naturales a ambos lados de la igualdad anterior, y recordando que $\ln e = 1$, se tiene

$$\ln Q = \ln 101.8 + 0.112 \ln e = 4.623010104 + 0.112 = 4.735010104$$

$$Q = \text{anti ln } 4.735010104$$

$$Q = 113.9 \text{ millones de habitantes}$$

El resultado anterior es cierto solamente si la tasa de crecimiento promedio se mantiene constante durante los 8 años.

A continuación se muestra la secuencia de tecleo para resolver el problema de forma directa.

101.8 [×] [e^x] [(] 0.014 [×] 8 [)] [=] 113.9

[1] Para un estudio de los porcentajes, véase el capítulo 2, sección 2.2.

Ejercicios 1.5

Utilizando logaritmos, resuelva las siguientes operaciones. Compruebe el resultado resolviendo de manera directa con una calculadora.

1. $(16.36)^{5.42}(22.1)^{-2\ 12}$
2. $2^{\frac{1}{3}}\,3^{\frac{1}{5}}\,4^{\frac{7}{3}}$
3. $6.2^{3.25} + (12.3)(14.7) - (2.0736 \times 10^{8})^{1/4}$
4. $\dfrac{(24.5)^{5}\sqrt[3]{1728}}{(16)^{3.2}}$
5. $\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[3]{2197}\sqrt{484}}{5.5}}$
6. $\dfrac{1.735\,e^{4}}{2.5^{-0.25}}$

Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas.

7. $\log_{16} x = \dfrac{3}{4}$
8. $\log(x + 10) = 2$
9. $\log_3 x + \log_3(2x - 3) = 4 - \log_3 3$
10. $\log_5 a + \log_5(a + 6) = 0.5 \log_5 9$
11. $\log_5(x + 4) + \log_5 8 = \log_5 64$
12. $\dfrac{1}{2}(\log_2 w + \log_2 8) = \log_2 16$

Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales.

13. $5^{2x-1} = 78125$
14. $3^{2t+1} = 5^{3t-1}$
15. $e^{x+1} = 34.66$
16. $55\,e^{0\ 36x} = 544$
17. $0.3(4^{0\ 2x}) = 76.8$
18. $8^{z^2-2z} = 0.5$

19. Encuentre el valor de w en $(1 + w)^{24} = 4.048935$

20. Si $p^{5\,3} = 1\,024$, encuentre el valor de p.

21. Una ecuación de curación de las heridas es $A = A_0 e^{\frac{-t}{10}}$, siendo A_0 el área originalmente dañada, en cm^2 y A el área dañada después de transcurridos t días, en cm^2. Encuentre el número de días necesarios para que una herida de 3 cm^2 se reduzca a 1 cm^2.

22. Los médicos utilizan yodo radiactivo en el tratamiento de la glándula tiroides. Se sabe que el yodo radiactivo se desintegra de tal forma que la cantidad de yodo que queda en el organismo después de t días de administrado está dada por

$$M = 15e^{-0\,087\,t}$$

donde M es la cantidad de yodo, en gramos.

a) ¿Cuánto yodo queda en el organismo después de un mes?
b) ¿Después de cuántos días sólo quedarán 0.5 gramos de yodo?

23. En química existe una escala logarítmica conocida como pH (potencial de Hidrógeno), que sirve para medir la acidez o alcalinidad de una solución. La escala va del 0, que representa el punto más ácido, hasta el 14, que representa lo más alcalino. Una solución totalmente neutra tiene un pH de 7.

El pH se obtiene mediante la fórmula:

$$pH = \log \frac{1}{[H^+]},$$

en donde $[H^+]$ es la concentración de iones hidrógeno, en moles/litro.

La lluvia ácida se genera al reaccionar el agua de lluvia con los contaminantes atmosféricos. Una lluvia con un pH menor de 5.6 se considera ácida. Cierto día, en la ciudad de Guadalajara se registró una lluvia con una concentración de iones hidrógeno de 3.98×10^{-3} moles/litro. ¿Se tuvo lluvia ácida ese día?

24. Un fabricante de computadoras laptop ha observado que la demanda mensual de su más reciente modelo, t meses después de introducida al mercado, está dada por la ecuación $D = 3\,000 - 1000e^{-0.045\,t}$.

a) ¿Cuál será la demanda después de un año?
b) ¿En cuánto tiempo la demanda será de 2 700 computadoras mensuales?

25. La única manera precisa para medir un terremoto consiste en cuantificar la energía liberada por las ondas sísmicas. Con este fin se han desarrollado diferentes escalas, siendo la escala Richter una de las más utilizadas. Esta escala es logarítmica y fue desarrollada en 1935 por el sismólogo Charles Richter.

La magnitud de un terremoto en la escala de Richter está dada por

$$M = \frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0}$$

en donde E es la energía liberada por el terremoto, medida en joules, y E_0 es la energía liberada por el terremoto más pequeño que puede registrarse a través de un sismógrafo y que se ha estandarizado como $E_0 = 10^{4.40}$ joules.

a) El terremoto que sacudió a la ciudad de México el 19 de septiembre de 1985 tuvo una magnitud de 8.1 en la escala de Richter. Encuentre la energía liberada por el terremoto.

b) ¿Cuántas veces más intenso es un terremoto de magnitud 7.5 contra otro de magnitud 5.5?

Para resolver los ejercicios 26 al 31, utilice las ecuaciones (1.2) o (1.3).

26. La población mundial total alcanzaba la cifra de 6 211.1 millones de habitantes en el año 2002. Sabiendo que la tasa media de crecimiento en ese año fue de 1.2% anual y suponiendo que se mantiene constante, encuentre la población mundial en el año 2010.

27. Una proyección indica que la población mundial para el año 2050 será de 9 322.3 millones de habitantes. Si la población mundial en el año 2002 fue de 6 211.1 millones de habitantes, encuentre la tasa media de crecimiento anual para que el pronóstico se cumpla.

28. Una importante ciudad arroja diariamente 5 500 toneladas de basura y crece a razón de 5.4% anual. Si continúa este ritmo de crecimiento, a) ¿cuántas toneladas diarias habrá que procesar dentro de 10 años? Si la capacidad instalada actual de la planta procesadora de basura permite manejar hasta 8 000 toneladas diarias, b) ¿hasta cuándo tendrá suficiente capacidad para procesar la basura?

29. Un robot industrial costó 10 600 000 dólares. ¿Cuál será su precio de venta después de 5 años de uso, sabiendo que se deprecia exponencialmente a una tasa de 20% anual?

30. La población de cierta especie animal se está extinguiendo a razón de 5% anual. Si la población actual es de 100 000 elementos, ¿cuánto tiempo tendrá que transcurrir para que la población se reduzca a la mitad?

31. El organismo humano elimina cada 6 horas la mitad de la nicotina que se encuentra en él. Si inicialmente hay 15 mg de nicotina en el organismo de una persona, ¿en cuánto tiempo habrá únicamente 5 mg?

Tema especial

Los logaritmos en escena[2]

El truco más sorprendente de cuantos han sido presentados ante el público por calculadores profesionales es sin duda, el siguiente:

Enterado por los anuncios de que un notable calculista se dispone a extraer de memoria las raíces de elevados índices de números muy grandes, prepara usted en casa, pacientemente, la 31a. potencia de un número cualquiera y se dispone a hacer fracasar al calculista con su gran número de 35 cifras. En el momento oportuno se dirige al calculista con las siguientes palabras:

"Eso está bien, pero pruebe a extraer la raíz cuyo índice es 31, del siguiente número de 35 cifras. Tome nota, se las voy a dictar."

El calculista toma un lápiz, pero antes de que pronuncie usted la primera cifra él ya ha encontrado el resultado: 13.

El calculista sin saber el número ha extraído su raíz, siendo además de grado 31; lo ha hecho de memoria y por añadidura, ¡con rapidez de relámpago!

Usted se maravilla y descorazona, aunque no ha sucedido nada extraordinario. El secreto reside en que no existe más que un número, precisamente el 13, que elevado a una potencia cuyo exponente sea 31 dé un resultado de 35 cifras. Los números menores a 13 dan menos de 35 cifras y los mayores más.

¿De dónde sabía eso el calculista? ¿Cómo halló la cifra 13? Respuesta: se sirvió de los logaritmos, que sabe de memoria para los primeros 15 o 20 números. Aprendérselos no es tan difícil como parece, sobre todo si se tiene en cuenta que el logaritmo de un número compuesto es igual a la suma de los logaritmos de sus factores primos. Recordando bien los logaritmos de 2, 3 y 7 se conocen ya los logaritmos correspondientes a los 10 primeros nú-

[2] Tomado del libro *Álgebra Recreativa* de Yákov Perelmán. Editorial Mir, Moscú, 1978.

meros. Por ejemplo: $\log 5 = \log(10/2) = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$. Para saber los de la segunda decena (del 10 al 20) hay que acordarse de los logaritmos de otros cuatro números.

A cualquier calculista profesional le es fácil memorizar la siguiente tabla de logaritmos de dos cifras:

Número	Logaritmo	Número	Logaritmo
2	0.30	11	1.04
3	0.48	12	1.08
4	0.60	13	1.11
5	0.70	14	1.15
6	0.78	15	1.18
7	0.85	16	1.20
8	0.90	17	1.23
9	0.95	18	1.26
10	1.00	19	1.28

El truco matemático que lo ha llenado de asombro consiste en lo siguiente:

$$\log \sqrt[31]{(35\text{ cifras})} = \frac{\log(35\text{ cifras})}{31} = \frac{34\ldots}{31}$$

El logaritmo buscado puede encontrarse entre:

$$\frac{34}{31} \text{ y } \frac{34.99}{31}, \text{ es decir entre } 1.09 \text{ y } 1.13$$

En este intervalo sólo se encuentra el logaritmo de un número entero 1.11, que es el logaritmo de 13 (véase la tabla). De esa manera es como se halla el resultado que lo ha dejado perplejo. Claro que para hacer todo esto mental y rápidamente hay que disponer del ingenio y la destreza de un profesional, pero en esencia, la cuestión es bastante sencilla. Cualquiera puede realizar trucos análogos, si no de memoria, al menos por escrito.

Supongamos que le proponen resolver el siguiente problema: extraer la raíz de índice 64 de un número de 20 cifras.

Sin indagar de qué número se trata puede ofrecer el resultado: la raíz es igual a 2. En efecto:

$$\log \sqrt[64]{(20\text{ cifras})} = \frac{\log(20\text{ cifras})}{64} = \frac{19\ldots}{64}$$

por tanto, el número debe estar entre $\frac{19}{64}$ y $\frac{19.99}{64}$, es decir, entre 0.29 y 0.31. Tal logaritmo para un número entero no puede ser más que uno: 0.30, o sea, el logaritmo del número 2.

CAPÍTULO

2

Variación proporcional y porcentaje

Objetivos

Al finalizar el estudio de este capítulo el alumno podrá:

- Explicar qué es la variación proporcional.
- Entender y utilizar el concepto de porcentaje.
- Plantear y resolver problemas de variación proporcional y de porcentaje.

2.1 Variación proporcional

La variación proporcional describe relaciones especiales entre cantidades variables. La variación proporcional puede ser directa, inversa o mixta.

Variación proporcional directa

Se dice que y **es directamente proporcional a** x, o y **varía directamente con** x, si existe una constante k, diferente de cero, tal que

$$y = kx \tag{2.1}$$

La constante k recibe el nombre de **constante de proporcionalidad directa**.

Cuando dos cantidades son directamente proporcionales y k es positiva, se cumple que si una de las variables se incrementa o disminuye, la otra también tendrá el mismo efecto. Por ejemplo, el costo de la energía eléctrica y el número de kilowatts-hora consumidos son cantidades directamente proporcionales, ya que al aumentar el número de kilowatts-hora consumidos, aumenta el costo.

Ejemplo 2.1

Si y es directamente proporcional a x y $y = 18$ cuando $x = 6$, encuentre y cuando $x = 10$.

Solución:

Al sustituir los valores numéricos $x = 6$ y $y = 18$ en la ecuación (2.1), podemos calcular el valor de la constante de proporcionalidad.

$$18 = k(6)$$

$$k = \frac{18}{6} = 3$$

La constante de proporcionalidad es 3; por tanto, la ecuación que relaciona a x con y es

$$y = 3x$$

Si el nuevo valor de x es 10, entonces el nuevo valor de y será

$$y = (3)(10) = 30$$

Ejemplo 2.2

Si z varía en forma directa a $(x - w)$ y $z = 2$ cuando $x = 7$ y $w = 4$, calcule x cuando $w = 3$ y $z = 9$.

Solución:

$$z = k(x - w)$$
$$2 = k(7 - 4) = 3k$$
$$k = \frac{2}{3}$$

Por tanto,

$$z = \frac{2}{3}(x - w)$$

Si los nuevos valores de w y z son 3 y 9, respectivamente, el nuevo valor de x será

$$9 = \frac{2}{3}(x - 3)$$
$$27 = 2x - 6$$
$$x = \frac{33}{2}$$

Ejemplo 2.3

La distancia que recorre un objeto al caer a partir del reposo, es directamente proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido (descartando la resistencia del aire). Si un objeto cae 78.48 metros en 4 segundos, ¿cuánto habrá caído al final de 6 segundos?

Solución:

Sea s la distancia recorrida por el objeto en su caída y t el tiempo transcurrido. De acuerdo al enunciado dado es posible formar la siguiente ecuación:

$$s = kt^2$$

Despejando k y sustituyendo los valores numéricos iniciales de s y t, se tiene

$$k = \frac{s}{t^2} = \frac{78.48}{4^2} = 4.905$$

Por tanto,

$$s = 4.905t^2$$

Si $t = 6$ segundos, entonces

$$s = 4.905(6)^2 = 176.58 \text{ metros}$$

Ejemplo 2.4

Si 5 teléfonos celulares cuestan $4 350, ¿cuánto costarán 8 teléfonos iguales a los anteriores?

Solución:

Mientras más teléfonos se compren, más pesos se deben pagar, por tanto estas cantidades están relacionadas de manera directamente proporcional.

Sea T la cantidad de teléfonos celulares comprados y C la cantidad de dinero a pagar, en pesos. Por tanto,

$$C = kT$$

$$k = \frac{C}{T} = \frac{4\,350}{5} = 870$$

La ecuación que relaciona C con T es $C = 870T$. Si $T = 8$, entonces

$$C = (870)(8) = \$6\,960$$

También es posible escribir la relación entre C y T de la siguiente forma:

$$T = kC$$

Por tanto,

$$k = \frac{T}{C} = \frac{5}{4\,350} = 0.001149425$$

Entonces, se tiene la siguiente ecuación: $T = 0.001149425C$. Si $T = 8$, entonces

$$C = \frac{T}{0.001149425} = \frac{8}{0.001149425} = \$6\,960$$

Ejemplo 2.5

Tres personas ejecutaron un trabajo por el cual cobraron $68 640. ¿Cuánto le corresponde a cada uno, tomando en cuenta que una de las personas trabajó 24 días; otra, 18 días y la tercera, 10 días?

Solución:

Método 1

Como a más días trabajados corresponde más dinero ganado, estas cantidades son directamente proporcionales entre sí; por tanto, es posible escribir la ecuación:

$$D = k\,t$$

donde D representa al dinero ganado y t a los días trabajados.

Entre los 3 trabajadores se laboraron 52 días en total, por lo cual cobraron un total de \$68 640.

Por tanto,

$$k = \frac{D}{t} = \frac{68\,640}{52} = 1\,320$$

Una vez conocida la constante de proporcionalidad, es posible obtener la cantidad que recibirá cada trabajador.

Para el primer trabajador se tiene:

$$D = kt = (1\,320)(24) = \$31\,680$$

Para el segundo trabajador:

$$D = kt = (1\,320)(18) = \$23\,760$$

Para el tercer trabajador:

$$D = kt = (1\,320)(10) = \$13\,200$$

Método 2

Sea:

x = cantidad de dinero que debe recibir la persona que trabajó 24 días.

y = cantidad de dinero que debe recibir la persona que trabajó 18 días.

z = cantidad de dinero que debe recibir la persona que trabajó 10 días.

Por tanto,

$$x + y + z = 68\,640 \tag{1}$$

Como la cantidad de dinero que le toca a cada uno de los trabajadores es directamente proporcional a los días trabajados, es posible formar las siguientes ecuaciones:

$$x = k(24) \tag{2}$$

$$y = k(18) \tag{3}$$

$$z = k(10) \tag{4}$$

Las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) forman un sistema de 4 ecuaciones lineales con 4 incógnitas. Una forma de resolver este sistema sería sustituir las ecuaciones (2), (3) y (4) en la ecuación (1), esto es

$$24k + 18k + 10k = 68\,640$$
$$52k = 68\,640$$
$$k = \frac{68\,640}{52} = 1320$$

Por tanto,

$$x = k(24) = (1320)(24) = \$31\,680$$
$$y = k(18) = (1320)(18) = \$23\,760$$
$$z = k(10) = (1320)(10) = \$13\,200$$

Ejemplo 2.6

Una sociedad mercantil se forma cuando dos o más personas comparten la propiedad de un negocio. La aportación de cada socio es en dinero y/o trabajo, y las utilidades netas, o las pérdidas netas, del negocio son compartidas por cada uno de los socios.

Existen varios métodos para dividir las utilidades o las pérdidas de un negocio, siendo el método de partes iguales el más sencillo. Este método consiste en que los socios convienen en dividir las utilidades o las pérdidas por igual.

Otro método es el de los porcentajes fijos. En este caso los socios acuerdan recibir cada uno un porcentaje fijo de las utilidades o de las pérdidas. Por ejemplo, 3 socios acuerdan repartir las utilidades de la siguiente forma: 30% al primer socio, 38% al segundo y 32% al tercero.

El método más utilizado es el del reparto proporcional, basado en la variación proporcional. El reparto puede ser directo, inverso o mixto.

Hugo, Paco y Luis se asocian para iniciar un negocio. Hugo invierte $3 876; Paco invierte $4 578 y Luis invierte $2 955. Asimismo, quedan de acuerdo en que las utilidades o las pérdidas serán repartidas en forma directamente proporcional al capital invertido. ¿Cuánto recibe cada uno si la utilidad generada en el primer año de trabajo fue de $80 000?

Solución:

Sea:

x = cantidad de dinero que le toca a Hugo.

y = cantidad de dinero que le toca a Paco.

z = cantidad de dinero que le toca a Luis.

Por tanto,

$$x + y + z = 80\,000 \quad (1)$$

$$x = 3\,876k \quad (2)$$

$$y = 4\,578k \quad (3)$$

$$z = 2\,955k \quad (4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2), (3) y (4) en la (1), se tiene:

$$3\,876k + 4\,578k + 2\,955k = 80\,000$$

$$11\,409k = 80\,000$$

$$k = 7.012$$

Por tanto,

Hugo recibe: $(3\,876)(7.012) = \$27\,178.50$

Paco recibe: $(4\,578)(7.012) = \$32\,101.00$

Luis recibe: $(2\,955)(7.012) = \$20\,720.50$

Variación proporcional inversa

Se dice que **y es inversamente proporcional a x**, o **y varía inversamente con x**, si existe una constante k, diferente de cero, tal que

$$yx = k \quad (2.2)$$

La constante k recibe el nombre de **constante de proporcionalidad inversa**.

Cuando dos cantidades son inversamente proporcionales y k es positiva, entonces se cumple que si una de las variables se incrementa, la otra disminuye; o bien, si una de las variables disminuye, la otra se incrementa. Por ejemplo, la velocidad de un automóvil y el tiempo necesario para recorrer cierta distancia conocida son cantidades inversamente proporcionales, ya que al aumentar la velocidad del automóvil, el tiempo necesario para recorrer la distancia conocida disminuye y viceversa.

Ejemplo 2.7

Si x varía en forma inversamente proporcional a y, y $x = 21$ cuando $y = 12$, encuentre y cuando $x = 15$.

Solución:

Al sustituir los valores numéricos $x = 21$ y $y = 12$ en la ecuación (2.2), podemos calcular el valor de la constante de proporcionalidad.

$$(12)(21) = k$$

$$k = 252$$

La constante de proporcionalidad es 252; por tanto, la ecuación que relaciona a x con y es

$$yx = 252$$

Si el nuevo valor de x es 15, entonces el nuevo valor de y será

$$y = \frac{252}{x} = \frac{252}{15} = 16.8$$

Ejemplo 2.8

El costo unitario de producción de una revista de aparición mensual varía en forma inversamente proporcional con la raíz cuadrada del tiraje de la revista. Si el costo unitario de producción es de \$12 cuando el tiraje es de 25 000 ejemplares, ¿cuál será el costo si el tiraje se eleva a 32 000 ejemplares?

Solución:

Sea C el costo unitario de producción y t el tiraje. Como C varía inversamente a la raíz cuadrada de t, tenemos

$$C\sqrt{t} = k$$

Como C = 12 cuando $t = 25\,000$, entonces

$$12\sqrt{25\,000} = k$$

$$k = 1897.366596$$

Si el nuevo valor de t es 32 000, entonces:

$$C = \frac{k}{\sqrt{t}} = \frac{1897.366596}{\sqrt{32\,000}} = \$10.61$$

Ejemplo 2.9

Seis hombres hacen una obra en 15 días. ¿En cuántos días podrían hacer la misma obra 10 hombres?

Solución:

Como a más hombres trabajando en la obra, se necesitan menos días para terminarla, estas cantidades son inversamente proporcionales. Si H es el número de hombres y d es el número de días, entonces

$$Hd = k$$

Es decir

$$k = (6)(15) = 90$$

Por tanto:

$$d = \frac{k}{H} = \frac{90}{10} = 9 \text{ días}$$

Ejemplo 2.10

Una compañía da una gratificación de \$200 000 a tres de sus empleados, en forma inversamente proporcional a sus sueldos mensuales, siendo éstos los siguientes: Agustín gana \$5 800, Susana gana \$6 350 y Arturo gana \$7400. ¿Cuánto le toca a cada uno?

Solución:

Sea:

x = cantidad de dinero que le toca a Agustín.

y = cantidad de dinero que le toca a Susana.

z = cantidad de dinero que le toca a Arturo.

Entonces:

$$x + y + z = 200\,000 \quad (1)$$

$$(x)(5\,800) = k \quad (2)$$

$$(y)(6\,350) = k \quad (3)$$

$$(z)(7\,400) = k \quad (4)$$

Despejando x, y y z de las ecuaciones (2), (3) y (4) y sustituyendo en (1), se tiene

$$\frac{k}{5\,800} + \frac{k}{6\,350} + \frac{k}{7\,400} = 200\,000$$

$$k\left(\frac{1}{5\,800} + \frac{1}{6\,350} + \frac{1}{7\,400}\right) = 200\,000$$

Por tanto,

$$k = 430\,080\,479.7$$

Sustituyendo el valor de k en cada una de las ecuaciones (2), (3) y (4) y despejando la variable se tiene:

$$x = \$74\,152$$

$$y = \$67\,729$$

$$z = \$58\,119$$

Variación proporcional mixta

Los casos de variación recién estudiados comprenden solamente dos variables, relacionadas de manera directa o inversa. Sin embargo, existen problemas en los que aparecen más de dos variables y donde, con frecuencia, se combinan los tipos de variación.

Un tipo de variación proporcional con más de dos variables es la **variación conjunta**. Se dice que una variable **varía conjuntamente** con dos o más variables, si es directamente proporcional a su producto. Por ejemplo, si x varía conjuntamente con y, z y w, esto significa que x varía en forma directamente proporcional al producto de y, z y w, es decir, $x = kyzw$, en donde k es la constante de proporcionalidad y diferente de cero.

Otro ejemplo. Si $a = kb\sqrt{c}$, se dice que a varía conjuntamente con b y la raíz cuadrada de c.

Ejemplo 2.11

Suponga que y varía conjuntamente con x y el cubo de z e inversamente con el cuadrado de w. Si $y = 8.75$ cuando $x = 5$, $z = 2$ y $w = 4$, determine y si $x = 7$, $z = -4$ y $w = 2$.

Solución:

De acuerdo al enunciado, la ecuación que une a las variables es

$$yw^2 = kxz^3$$

Sustituyendo los valores $y = 8.75$, $x = 5$, $z = 2$ y $w - 4$, el valor de k se obtiene mediante

$$(8.75)(4)^2 = k(5)(2)^3$$

$$k = \frac{(8.75)(4)^2}{(5)(2)^3} = 3.5$$

Por tanto, la ecuación que relaciona a y con x, z y w es

$$yw^2 = 3.5xz^3$$

El valor de y para los nuevos valores de x, z y w será

$$y = \frac{3.5xz^3}{w^2} = \frac{(3.5)(7)(-4)^3}{(2)^2} = -392$$

Ejemplo 2.12

El total de gasolina consumida por un automóvil que viaja con velocidad constante varía de forma conjunta con la distancia recorrida y con el cuadrado de la velocidad. Si un automóvil consume 25 litros al recorrer 230 km a la velocidad de 60 km/h, ¿cuánto consumirá si recorre 530 km a 75 km/h?

Solución:

Sea G el total de gasolina consumida, s la distancia recorrida y v la velocidad. La ecuación de variación es

$$G = ksv^2$$

Por tanto,

$$k = \frac{G}{sv^2} = \frac{25}{(230)(60)^2} = 3.0193 \times 10^{-5}$$

El valor de G para los nuevos valores de distancia y velocidad es

$$G = (3.0193 \times 10^{-5})(530)(75)^2$$

$$G = 90 \text{ litros}$$

Ejemplo 2.13

Una fábrica produce 6 000 camisas en 5 días utilizando 30 trabajadoras. ¿Cuántas camisas se producirán en 3 días con 25 trabajadoras?

Solución:

La información se puede disponer de la siguiente forma:

Si 6 000 camisas (C) se producen en 5 días (d) con 30 trabajadoras (T)

Entonces

x camisas se producirán en 3 días con 25 trabajadoras

Para obtener la ecuación de variación se procede manejando las variables de dos en dos y suponiendo que las demás permanecen constantes. En este problema se tiene que, suponiendo constante el número de trabajadoras, a más camisas producidas, más días se emplean en producirlas; luego, estas cantidades son directamente proporcionales:

$$C = k_1 d$$

en donde k_1 es la constante de proporcionalidad.

Si, ahora, suponemos que los días trabajados permanecen constantes, se tiene que a más personas trabajando, más camisas se producen; por tanto, estas cantidades son directamente proporcionales:

$$C = k_2 T$$

en donde k_2 es la constante de proporcionalidad.

Las dos ecuaciones anteriores nos dicen que el número de camisas producidas es directamente proporcional al número de días y al número de trabajadoras. Por tanto, combinando las ecuaciones anteriores se tiene:

$$C = k_1 k_2 dT$$

Es posible sustituir las constantes k_1 y k_2 por una única constante k:

$$C = kdT$$

El valor de k es

$$k = \frac{C}{dT} = \frac{6\,000}{(5)(30)} = 40$$

El nuevo valor de C será

$$C = (40)(3)(25) = 3\,000 \text{ camisas}$$

Ejemplo 2.14

Cinco hombres trabajando 8 horas al día han hecho 80 metros de una barda en 10 días. ¿Cuántos días necesitarán 10 hombres, trabajando 6 horas diarias, para hacer 100 metros de la misma barda?

Solución:

Si 5 hombres (H) trabajando 8 horas/día (h) han hecho 80 metros (m) de barda en 10 días (d).

Entonces

10 hombres trabajando 6 horas/día han hecho 100 metros de barda en x días.

Como a más hombres trabajando, se tardan menos días en construir la barda, entonces estas cantidades son inversamente proporcionales:

$$dH = k_1$$

Como a menos horas por día trabajadas, se tardan más días en construir la barda, entonces estas cantidades son inversamente proporcionales:

$$dh = k_2$$

Como a más días trabajando en la construcción de la barda, se construyen más metros, estas cantidades son directamente proporcionales:

$$d = k_3 m$$

Las ecuaciones anteriores nos dicen que el número de días necesarios para levantar una barda son directamente proporcionales a los metros construidos e inversamente proporcionales al número de hombres trabajando y al número de días de trabajo. Combinando las tres ecuaciones anteriores, se tiene:

$$dHh = k_1 k_2 k_3 m$$

Si $k = k_1\, k_2\, k_3$, entonces

$$dHh = km$$

Por tanto,

$$k = \frac{dHh}{m} = \frac{(10)(5)(8)}{80} = 5$$

Conocido el valor de k, el nuevo valor de t será

$$d = \frac{km}{Hh} = \frac{(5)(100)}{(10)(6)} = 8.33 \text{ d´as}$$

Ejemplo 2.15

En un concurso de matemática financiera, llevado a cabo entre los estudiantes de finanzas de una universidad, se repartió un premio de $10 000 entre los 3 finalistas, en forma inversa al tiempo que se tardaron en resolver el conjunto de problemas y al número de problemas mal hechos. Si uno de los finalistas tardó 60 minutos en resolver los problemas y tuvo 3 mal; otro finalista tardó 50 minutos y tuvo 2 problemas mal y el tercero tardó 40 minutos y tuvo 4 mal, ¿cuánto recibió cada concursante?

Solución:

De acuerdo al enunciado del problema se tiene que:

$$ctn = k$$

en donde c es la cantidad que recibirá cada finalista, t es el tiempo empleado en la resolución de los problemas y n es el número de problemas que resultaron mal.

Sea:

x = cantidad de dinero que recibe el primer finalista.

y = cantidad de dinero que recibe el segundo finalista.

z = cantidad de dinero que recibe el tercer finalista.

Por tanto,

$$(x)(60)(3) = k$$
$$(y)(50)(2) = k$$
$$(z)(40)(4) = k$$

Es decir:

$$x = \frac{k}{180}$$

$$y = \frac{k}{100}$$

$$z = \frac{k}{160}$$

Por otro lado se sabe que:

$$x + y + z = 10000$$

Esto es

$$\frac{k}{180} + \frac{k}{100} + \frac{k}{160} = 10000$$

Por tanto,

$$k = 458598.7261$$

La cantidad que le toca a cada uno de los finalistas es

$$x = \frac{458\,598.7261}{180} = \$2\,547.77$$

$$y = \frac{458\,598.7261}{100} = \$4\,585.99$$

$$z = \frac{458\,598.7261}{160} = \$2\,866.24$$

Tema especial

El reparto de utilidades

La participación de utilidades es la parte de la utilidad obtenida por una empresa en un año de operación, que corresponde a los trabajadores por su intervención en el proceso productivo. La Ley Federal del Trabajo en su artículo 117 establece que los trabajadores participarán en las utilidades de las empresas, de conformidad con el porcentaje que determine la Comisión Nacional para la Participación de los Trabajadores en las Utilidades de las Empresas.

El reparto de utilidades tiene como objetivos:

- Lograr el equilibrio entre el trabajo y el capital según los principios de la justicia social.
- Estimular a los trabajadores para alcanzar una mayor productividad en la empresa y en el sistema económico en general.
- Pugnar por una más justa distribución de la riqueza que genera el sistema económico.

Están obligadas a repartir utilidades todas las empresas de producción o distribución de bienes o servicios, sean personas físicas o morales, que tengan a su servicio trabajadores asalariados, y sea su finalidad lucrativa o no. Quedan exceptuados de esta obligación:

- Las empresas de nueva creación, durante el primer año de funcionamiento.
- Las empresas de nueva creación que se dediquen a elaborar un producto nuevo, por un periodo de dos años.
- Las industrias extractivas de nueva creación, durante el periodo de exploración.

- Las instituciones de asistencia privada, reconocidas por las leyes, que con bienes de propiedad particular ejecuten actos con fines humanitarios de asistencia, sin propósitos de lucro.
- El IMSS, Infonavit e instituciones públicas descentralizadas con fines culturales, asistenciales o de beneficencia.
- Las empresas que tengan un capital menor del que fije la Secretaría del Trabajo y Previsión Social.

Tendrán derecho al reparto de utilidades todos los trabajadores al servicio de la empresa, con excepción de los socios o accionistas, directores, administradores y gerentes generales de la empresa, de acuerdo a lo siguiente:

- Trabajadores de planta, sean de confianza o sindicalizados, independientemente del número de días trabajados durante el año.
- Trabajadores eventuales, siempre y cuando hayan trabajado por lo menos 60 días en forma continua o discontinua durante el año.
- Ex trabajadores.
- Las madres trabajadoras, durante los periodos pre y posnatales, así como los trabajadores incapacitados por accidente de trabajo, serán considerados como trabajadores activos y se computarán los días de incapacidad como días laborales.
- Los trabajadores domésticos y los trabajadores incapacitados por un accidente o enfermedad no profesional no participarán en el reparto de utilidades.

Los trabajadores tienen derecho a participar de 10% de la utilidad gravable[1] de la empresa y, de acuerdo al artículo 123 de la Ley Federal del Trabajo, la utilidad repartible se dividirá en dos partes iguales:

- La primera parte se repartirá entre los trabajadores en forma directamente proporcional al número de días trabajados por cada trabajador en el año. Para efectos del reparto se consideran los días efectivamente trabajados y aquellos que la empresa está obligada a pagar el salario, aun cuando no laboren los trabajadores, como son: días festivos, los periodos pre y posnatales, descansos semanales, descansos obligatorios, vacaciones y los días amparados como permisos con goce de sueldo.

[1] La *utilidad gravable* es la *utilidad bruta*. Esto es, la utilidad antes del pago de impuestos.

- La segunda parte se repartirá en forma directamente proporcional al monto del salario devengado por cada trabajador durante el año. Para efectos del reparto se considera exclusivamente el salario nominal; es decir, el salario en efectivo por cuota diaria, sin considerar tiempo extra, gratificaciones, etcétera.

Para los trabajadores de confianza que gocen de un salario superior al del trabajador sindicalizado de más alto salario dentro de la empresa, o a falta de éste al trabajador de planta con la misma característica, el salario máximo a considerar para el cálculo del reparto es el salario del trabajador sindicalizado y/o de planta incrementado en 20%.

Cuando los patrones personas físicas perciban ingresos por honorarios, arrendamiento o intereses, el monto máximo a repartir a sus trabajadores no excederá de un mes de salario.

Como ejemplo de un reparto de utilidades, supongamos que se tiene una pequeña empresa formada por 7 personas:

Nombre del trabajador	Puesto	Salario anual devengado	Días trabajados en el año
Antonio	Gerente [redacted]eral	\$324 000	365
Isaac	Su[redacted]r (de confianza)	\$201 600	365
Mario	Conductor (sindicalizado)	\$ 32 000	123
Jesús	Traba[redacted]dor (sindicalizado)	\$ 90 000	365
Pedro	Traba[redacted]dor (sindicalizado)	\$ 60 000	243
Luis	Trabajador (sindicalizado eventual)	\$ 10 000	48
Sara	Vendedora (de confianza)	\$147 600	365

Suponga que la utilidad bruta de la empresa fue de \$6 000 000; por tanto, la utilidad a repartir entre los trabajadores será el 10% de \$6 000 000; esto es \$600 000, los cuales se dividen en dos partes: \$300 000 se reparten en forma directamente proporcional al número de días trabajados durante el año y \$300 000 se reparten en forma directamente proporcional al salario recibido.

El gerente general y el trabajador Luis no tienen derecho al reparto.

El salario anual más alto de los trabajadores sindicalizados es el de Jesús, por tanto, el salario base del reparto para el personal de confianza será

$$90\,000 + 20\% \text{ de } 90\,000 = \$108\,000$$

En la siguiente tabla se muestra el número de días trabajados en el año y el salario anual base de reparto para cada trabajador. Asimismo, se muestra la parte que le toca a cada uno por los días trabajados y por el salario devengado, así como la cantidad total. Se deja como ejercicio para el lector la verificación de las cantidades repartidas a cada uno de los trabajadores.

Trabajador	Días trabajados en el año	Salario base del reparto	Parte proporcional por días trabajados	Parte proporcional por salario devengado	Cantidad total a recibir
Isaac	365	\$108 000	\$74 948.67	\$ 81 407.04	\$156 355.71
Mario	123	\$ 32 000	\$25256.66	\$24 120.60	\$ 49 377.26
Jesús	365	\$ 90 000	\$ 74948.67	\$67 839.19	\$ 142 787.86
Pedro	243	\$ 60 000	\$ 49897.33	\$45 226.13	\$ 95 123.46
Sara	365	\$108 000	\$ 74948.67	\$ 81407.04	\$156 355.71

Ejercicios 2.1

1. Si y es directamente proporcional a x, y si $x = 16$ cuando $y = 96$, encuentre y cuando $x = 25$.

2. Si u es inversamente proporcional a v, y si $u = 11$ cuando $v = 4$, encuentre v cuando $u = 55$.

3. Si y varía conjuntamente con x y el cubo de z, y si $y = 16$ cuando $x = 4$ y $z = 2$, determine y si $x = -8$ y $z = -3$.

4. Si p es directamente proporcional al cuadrado de q e inversamente proporcional a t, y si $p = 40$ cuando $q = 5$ y $t = 6.25$, encuentre q cuando $p = 50$ y $t = 80$.

5. Si y varía en forma directamente proporcional a la cuarta potencia de x e inversamente proporcional al cuadrado de w, y si $w = 9$ cuando $x = 1$ y $y = 8$, encuentre x cuando $y = 8/9$ y $w = 12$.

6. Si t es inversamente proporcional a $(b - 4)$, y si $b = 10$ cuando $t = 5$, encuentre b cuando $t = 22$.

7. Se ha encontrado que el volumen de ventas de botas de la compañía El Rancho, es inversamente proporcional a la cantidad $2.1p$, en donde p es el precio de venta de un par de botas. Si las ventas promedio son de 23 000 pares por mes cuando el par se vende en \$750, encuentre el volumen de ventas promedio por mes si el precio se incrementa a \$870.

8. Carlos decide vaciar el agua de su alberca con el fin de limpiarla. Él sabe que el tiempo necesario para vaciar la alberca es inversamente proporcional a la velocidad de bombeo. La última vez que vació el agua de la alberca se tardó 50 minutos utilizando una bomba que proporciona una velocidad de bombeo de 300 litros por minuto. Carlos cuenta ahora con una bomba que permite vaciar la alberca con una velocidad de 800 litros por minuto. ¿Cuánto tiempo le tomará vaciar la alberca con la bomba nueva?

9. La velocidad necesaria para recorrer una distancia conocida es inversamente proporcional al tiempo empleado en recorrerla. Si un automóvil recorre cierta distancia en 45 minutos a 60 km/h, ¿qué velocidad se necesita para recorrer la misma distancia en media hora?

10. Se ha encontrado que el volumen de ventas mensuales promedio V de relojes marca *Gamma* de Swiss, Co., es inversamente proporcional a la cantidad $(200 + p)$, donde p es el precio de venta de un reloj. Si el volumen de ventas mensuales promedio es de 274 000 dólares, cuando un reloj cuesta 230 dólares, ¿cuál es el volumen de ventas esperado, si el precio del reloj se incrementa a 280 dólares?

11. En ciertas condiciones, la distancia recorrida por un automóvil antes de detenerse totalmente, al aplicar bruscamente los frenos, es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad.

    Para evitar atropellar a una persona, el conductor de un automóvil frena bruscamente. Sin embargo, no logra detenerse y la atropella. El automovilista declara a la policía que conducía a 48 km/h (60 km/h es el límite de velocidad). El policía mide las huellas del patinaje y resultan ser de 49 metros. Él sabe que a 60 km/h, las huellas del patinaje deben medir 19 metros de longitud. ¿A qué velocidad corría realmente el automovilista antes de aplicar los frenos?

12. La renta semanal de películas en *video club 8 mm* varía en forma directamente proporcional al gasto en publicidad e inversamente proporcional al precio de renta por día. Cuando el gasto por publicidad es de $8 000 y el precio de renta diaria es de $30, ellos rentan 1 200 películas por semana (en promedio). ¿Cuántas películas rentarían por semana si incrementaran su publicidad a $10 000 y elevaran su precio de renta a $33?

13. Un estudiante recibe una calificación de 50 en su primer examen parcial de matemáticas, después de haber estudiado 15 horas por semana y faltado a 5 clases. Si la calificación varía directamente con el número de horas de estudio e inversamente a la raíz cuadrada del número de

faltas, encuentre cuántas horas por semana tendrá que estudiar para el próximo examen parcial, si desea una calificación de 70 y piensa faltar 3 veces a clases.

14. La cantidad de pintura necesaria para pintar una columna cilindrica varía conjuntamente con el radio y la altura de la columna. Compare la cantidad de pintura necesaria para pintar una columna de 7 m de alto y 60 cm de radio con la cantidad de pintura requerida para una columna de 8 m de alto y 45 cm de radio.

15. El gerente de una tienda departamental estima que el total de ventas es directamente proporcional a los gastos de publicidad e inversamente proporcional al número de competidores presentes en la misma zona. Actualmente invierte $300 000 mensuales en publicidad y las ventas mensuales promedio son de $15 000 000. Tiene dos competidores importantes. Si incrementa la publicidad a $450 000 cada mes con el fin de hacer frente a un competidor adicional, estime el valor de las ventas mensuales.

16. Una fábrica de encendedores desechables encuentra que el precio de venta de cada encendedor que se produce varía directamente con el costo de producción e inversamente con la raíz cuadrada del número de encendedores producidos. El costo de producir 1 000 000 de encendedores cada mes es de $3 400 000 y el precio unitario de venta al mayorista es de $8.50. Si el precio unitario de venta se incrementa en $1, ¿cuántos encendedores se deberán producir si el costo de producción aumenta a $4 000 000?

17. La duración de un viaje por ferrocarril varía en forma directamente proporcional a la distancia recorrida e inversamente proporcional a la velocidad. La velocidad es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la cantidad de diesel consumido por kilómetro recorrido, e inversamente proporcional al número de vagones del tren. Para recorrer 60 km en una hora llevando 20 vagones, una máquina requiere 20 litros de diesel. ¿Cuánto diesel se consumirá en un viaje de 70 km que tarda 90 minutos con 23 vagones?

18. Si una vara de 2.50 m de longitud da una sombra de 6 m, ¿cuál será la altura de un árbol cuya sombra, a la misma hora, es de 53 m?

19. Si un automóvil recorre 90 km con 8 litros de gasolina, ¿qué distancia recorrerá con 30 litros?

20. Si 30 hombres arman 10 máquinas en un día, ¿cuántos hombres se necesitan para armar 25 máquinas al día, suponiendo que todos tienen el mismo rendimiento?

21. El artículo 87 de la *Ley Federal del Trabajo* establece que los trabajadores que laboraron el año completo tienen derecho a un aguinaldo anual equivalente a 15 días de salario. ¿Cuánto recibirá un trabajador que laboró 8 meses y 20 días?

22. El odómetro (medidor de distancia) de un automóvil está diseñado para funcionar con llantas de 26 pulgadas de diámetro. Si se cambian las llantas a unas de 28 pulgadas de diámetro, ¿cuántas millas marcará el odómetro en un viaje real de 250 millas?

23. Dos llaves de idénticas características llenan un tanque con agua en 6 horas. ¿Cuánto tiempo emplearán en llenar el tanque 3 llaves iguales a las anteriores?

24. Por un corte de casimir de 3 m de longitud una persona pagó $1 275. ¿Cuánto debe pagar por 9 m del mismo casimir?

25. Un libro tiene 758 páginas de 439.9 cm^2 cada una. Se desea reeditarlo con páginas de 20.8 cm de ancho por 28.2 cm de largo. Sabiendo que el tipo de letra será la misma, ¿cuántas páginas tendrá la nueva edición?

26. En el condado de Washington, la tasa del impuesto predial es de 8.065 dólares por 1 000 dólares de valor catastral. Si una casa está valuada en 97 000 dólares, determine el impuesto a pagar.

27. Una persona pinta 5/8 de su casa en 7 horas. ¿Cuánto tiempo necesitará para terminar de pintar la casa?

28. Dos mil acciones de Zyrtec, S.A. cuestan $420 000. ¿Cuánto tendrá que invertir una persona que desea comprar 3 520 acciones de Zyrtec?

29. Una rueda dentada de 40 dientes engrana con otra de 52 dientes. Si la primera gira a 75 rpm (revoluciones por minuto), ¿a cuántas rpm gira la segunda?

30. Un automóvil de juguete está construido a escala 1:18. Si el auto mide 25 cm, ¿cuál es la longitud del automóvil real?

31. Una fotografía muestra a un niño parado junto a un obelisco. Si el niño mide en realidad 1.20 m, y en la fotografía el niño mide 1.5 cm y el obelisco 8.12 cm, ¿cuál es la medida real del obelisco?

32. El dipropionato de beclometasona es una sustancia utilizada para combatir las molestias de la rinitis alérgica, y su administración se hace a través de las fosas nasales mediante un aplicador en aerosol.

Cada 100 gramos de solución contienen 0.143 gramos de dipropionato de beclometasona. Si el frasco aplicador contiene 7.0 gramos de solución y cada dosis proporciona 50 μg (microgramos) de dipropionato de beclometasona, encuentre cuántas dosis proporciona el frasco aplicador en aerosol.

33. Diez máquinas que fabrican latas de aluminio para envasar refresco, trabajando 8 horas diarias, elaboran 72 000 latas en 5 días. Dos de las máquinas fallan cuando faltan por hacer 31 680 latas, que deben entregarse dentro de dos días. ¿Cuántas horas diarias deben trabajar las máquinas restantes para cumplir con el pedido?

34. Una empresa construye un barco empleando 40 trabajadores durante 70 días, trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días serán necesarios para construir otro barco igual, si hay 32 trabajadores y laboran 10 horas diarias?

35. Una empresa fabrica 12 000 pares de calcetines con 4 trabajadores utilizando 60% de la maquinaria, en 3 días a razón de 6 horas/día. ¿Cuántos días serán necesarios para fabricar 100 000 pares de calcetines utilizando 8 trabajadores y ocupando la maquinaria al 100% a razón de 8 horas/día?

36. Un campamento militar con 250 hombres, tiene provisiones para alimentar 30 días con 3 comidas diarias cada hombre. Si se refuerzan con 100 hombres, ¿cuántos días durarán las provisiones si cada hombre come sólo 2 veces al día?

37. Se necesitan tres bobinas de papel de 500 kilogramos cada una para imprimir 5 000 ejemplares del primer tomo de una enciclopedia. ¿Cuántas bobinas de 375 kilogramos de papel de igual calidad y ancho que el anterior se necesitarán para imprimir 4 000 ejemplares del segundo tomo, sabiendo que el número de páginas de éste es igual a los $\frac{4}{5}$ del número de páginas del primer tomo?

38. Se pagan $1 500 por el transporte de 3 toneladas de naranja a 100 km de distancia. ¿Cuánto habrá que pagar por el transporte de 5 toneladas de naranja a 240 km de distancia?

39. Se emplean 15 hombres durante 5 días, trabajando 4 horas/día, para cavar una zanja de 12 m de largo, 6 m de ancho y 5 m de profundidad. ¿Cuántos días necesitarán 12 hombres, trabajando 6 horas/día, para cavar otra zanja de 15 m de largo, 2 m de ancho y 7 m de profundidad, en un terreno de triple dificultad?

40. Un ingeniero tiene a su cargo la realización de una obra, que debe comenzar el 8 de mayo y terminarla el 15 de junio. El 8 de mayo comienza la obra con 20 hombres, los cuales trabajan hasta el 2 de junio, inclusive, a razón de 8 horas diarias. Ese día se le da la orden al ingeniero de que se necesita la obra terminada para el día 10 de junio. Por tanto, a partir del 3 de junio, coloca más gente, se trabajan 10 horas al día y se logra terminar la obra. ¿Cuánta gente extra tuvo que contratar el ingeniero?

41. La fábrica de ropa *Vista Bien, S.A.*, va a repartir $100 000 entre 5 empleados de confianza por concepto de gratificación por las horas extra trabajadas. El primer empleado trabajó 75 horas extra; el segundo, 85; el tercero, 60; el cuarto, 47 y el quinto, 38. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

42. Se va a repartir un donativo de $1 000 000 entre 3 asilos de ancianos, en forma directamente proporcional al número de ancianos que albergan. ¿Cuánto le toca a cada asilo, si se tienen los siguientes datos?

Asilo	Número de ancianos
El Anciano Feliz	302
Los Abuelitos	261
La Tercera Edad	175

43. Don Pedro, al morir, dejó, para repartir entre sus tres hijos de 22, 26 y 28 años, en partes inversamente proporcionales a sus edades, ya deducidos los impuestos y gastos correspondientes a la herencia, los siguientes bienes:
– propiedades por un valor de $6 964 000
– acciones por un total de $4 870 000
– cuentas bancarias por un total de $1 229 000
¿Cuánto le corresponde a cada uno?

44. Un comercio se ha declarado en quiebra; el activo, que asciende a 95 000 dólares, debe repartirse entre dos acreedores a quienes se debe $105 000 dólares y 135 000 dólares. ¿Cuánto recibe cada acreedor?

45. Tres hermanos se juntaron para comprar un departamento en $300 000, el cual fue vendido posteriormente en $450 000. Si al comprar el departamento el primer hermano puso $80 000; el segundo, $100 000 y el tercero el resto, calcule cuánto le corresponde a cada uno.

46. Juan García emprende un negocio con $100 000 y a los tres meses admite como socio a Roberto Fernández, el cual aporta $100 000. Cuatro meses más tarde entra a la sociedad Raúl Torres con una aportación de $100000. Si hay una ganancia de $460000 al final del año de que Juan comenzó el negocio, ¿cuánto recibe cada uno de los socios?

47. Un padre de familia va a repartir $2000 entre sus tres hijos en forma directa a su calificación mensual e inversa a sus faltas de conducta en el mes. A continuación se muestran las calificaciones y las faltas de los 3 hijos. ¿Cuánto le toca a cada uno?

	Calificación	Faltas de conducta
Roberto	85	2
Hilda	100	3
Alejandro	90	5

48. Se va a repartir una utilidad de $630000 entre 3 socios en forma directamente proporcional a los capitales aportados y al tiempo que trabajó cada socio en el negocio. El primero aportó $140800 y trabajó 8 meses; el segundo aportó $100000 y trabajó 12 meses y el tercero aportó $175000 y trabajó 6 meses. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

49. Una compañía tomó el acuerdo de dar una gratificación de $100000, repartidos entre 3 supervisores en forma directa a sus años de servicio e inversa a sus sueldos quincenales. Los años de servicio son: 5, 7 y 10 y sus sueldos, en el mismo orden, son: $8300, $10100 y $14800. ¿Cuánto le toca a cada uno?

50. Una empresa tiene 4 socios inversionistas los cuales aportaron las siguientes cantidades:

Tania	$180000
Ester	$116000
Pablo	$160000
Esteban	$100000

Al cabo de cierto tiempo se repartieron ganancias en forma directamente proporcional al capital aportado. Si Pablo recibió $45000, ¿qué monto se repartió entre los 4 socios y cuánto le tocó a cada uno de los demás?

51. Un despacho de contadores, con el fin de incentivar a sus tres secretarias, les otorgó un bono en forma inversamente proporcional a los días

faltados por cada una en el año. Sonia faltó 5 días en el año y recibió \$8 873.24; Liliana faltó 3 días y Yolanda recibió \$6 338.03. ¿Cuánto recibió Liliana y cuántas faltas tuvo Yolanda?

52. Emma, Patricia y Martha invirtieron \$22 000, \$27 000 y \$32 000, respectivamente para abrir una tienda de ropa de manta para damas. Convinieron en compartir a partes iguales cualquier utilidad o pérdida hasta \$9 000. Cualquier monto sobre esa cantidad se repartirá en forma directa al capital aportado. Si durante el primer mes obtuvieron una utilidad de \$21 500, ¿cuánto recibe cada una?

53. Se reparte una gratificación entre 3 cajeros de un banco, en forma directamente proporcional a los años de servicio e inversamente proporcional a sus faltantes reportados en el año. Utilizando la información de la siguiente tabla, encuentre:

a) El número de faltantes de Víctor.
b) La gratificación correspondiente a Rogelio.
c) La cantidad total repartida entre los cajeros.

Nombre	Años de servicio	Número de faltantes	Gratificación
Víctor	5		\$16 981.13
Rosa María	7	8	\$29 716.98
Rogelio	10	12	

54. Se premiará a dos niños en relación directa con su calificación e inversa con sus reportes. Utilizando la información de la siguiente tabla, encuentre la calificación de Armando.

Nombre	Calificación	Reportes	Premio
Hugo	9.8	8	\$418.80
Armando	X	5	\$581.20

55. En el reparto de utilidades de una empresa, la señorita Solís recibió \$12 880 por concepto de su sueldo anual, que fue de \$67 680 y \$13 340 por los 365 días trabajados. ¿Cuánto recibió de utilidades el señor Benítez, si laboró 273 días y su sueldo anual acumulado fue de \$47 700? Véase el tema especial *El reparto de utilidades*.

2.2 Porcentaje

Porcentaje, llamado también **tanto por ciento**, proviene de la palabra latina *per centum*, que significa por ciento. El cálculo del porcentaje es una de las operaciones más utilizadas en el campo comercial y financiero, ya que se emplea para indicar aumentos, disminuciones, utilidades, tasas de interés, tasas de descuento, etcétera.

El término *por ciento* significa *centésima*; es decir, el por ciento de un número N es una fracción con numerador N y denominador 100. El símbolo de por ciento es %.[2] Así, por ejemplo

$$15\% \text{ significa } \frac{15}{100} = 0.15$$

$$4.18\% \text{ significa } \frac{4.18}{100} = 0.0418$$

$$210\% \text{ significa } \frac{210}{100} = 2.10$$

Asimismo, cualquier número se puede escribir en forma de porcentaje; simplemente se multiplica por 100 y se agrega el símbolo %. Por ejemplo

$$0.25 = (0.25)(100) = 25\%$$

$$0.0188 = (0.0188)(100) = 1.88\%$$

¿Qué significa, entonces, la expresión "18% de 250"? Cómo 18% significa 18 centésimas, esta expresión significa: 18 centésimas de 250. Por tanto,

$$18\% \text{ de } 250 = \left(\frac{18}{100}\right)(250) = 45$$

El número 45 recibe el nombre de **producto**; 18% es el **porcentaje** y 250 se llama **base**.

Ejemplo 2.16

Obtenga el 16.75% de 2 600.

Solución:

16.75% de 2 600 significa 16.75 centésimas de 2 600; esto es

$$16.75\% \text{ de } 2\,600 = \left(\frac{16.75}{100}\right)(2\,600) = 435.5$$

[2] Este símbolo surgió como una corrupción de la abreviatura de la palabra *ciento, cto*. El primero en usar el símbolo fue Delaporte, que en 1685 lo empleó en su obra *Guía del Comerciante*.

Ejemplo 2.17

Raúl compró un televisor con valor de $5 400. Si dio un enganche de 20% del precio, ¿de cuánto fue el pago inicial?

Solución:

$$\text{Pago inicial} = 20\% \text{ de } 5\,400 = \left(\frac{20}{100}\right)(5\,400) = \$1\,080$$

Ejemplo 2.18

El precio de lista de una calculadora financiera es de $950. Si una tienda la vende con un descuento de 18%, ¿cuál es el precio final de la calculadora?

Solución:

$$\text{Descuento} = 18\% \text{ de } 950 = (0.18)(950) = \$171$$

$$\text{Precio final} = \$950 - \$171 = \$779$$

Ejemplo 2.19

¿Cuál será la cantidad a pagar por la calculadora del ejemplo anterior, si al precio final se le debe sumar el IVA (Impuesto al Valor Agregado)?

Solución:

Actualmente el IVA es de 15% del precio final de un bien o servicio. Por tanto,

$$\text{IVA} = 15\% \text{ de } 779 = (0.15)(779) = \$116.85$$

$$\text{Cantidad a pagar por la calculadora} = 779 + 116.85 = \$895.85$$

Ejemplo 2.20

¿Qué porcentaje de 2 500 es 900?

Solución:

Sea x el porcentaje buscado, expresado en forma decimal; es decir, el porcentaje dividido entre 100. Como x% de 2 500 debe ser igual a 900, entonces es posible formar la siguiente ecuación:

$$(x)(2\,500) = 900$$

Por tanto,

$$x = \frac{900}{2\,500} = 0.36 = 36\%$$

Ejemplo 2.21

El transporte público en la ciudad de Guadalajara costaba 70 centavos en 1994 y \$3.50 a principios del año 2003. Calcule el porcentaje de incremento.

Solución:

El incremento en el precio del pasaje fue de \$2.80 (3.50 − 0.70).

Sea x el porcentaje, expresado en forma decimal. Como x% de 0.70 debe ser igual al incremento, entonces

$$(x)(0.70) = 2.80$$

Por tanto,

$$x = \frac{2.80}{0.70} = 4 = 400\%$$

Ejemplo 2.22

¿De qué número es 35 el 5%?

Solución:

Sea x la base buscada. Como 5% de x debe ser igual a 35, entonces se tiene la siguiente ecuación

$$(0.05)(x) = 35$$

$$x = \frac{35}{0.05} = 700$$

Ejemplo 2.23

El gerente de una tienda de ropa aumentó el precio de los pantalones para caballero en 15%. ¿Cuál era el precio original de los pantalones, si el actual es de \$552?

Solución:

Sea x el precio de los pantalones antes del aumento. Si el aumento fue de 15% sobre el precio x, entonces

$$\text{Aumento} = 15\% \text{ de } x = 0.15\,x$$

El precio actual se forma de la siguiente manera:

$$\text{precio anterior} + \text{aumento} = \text{precio actual}$$

Es decir,

$$x + 0.15\,x = 552$$

Esto es

$$1.15\,x = 552$$

$$x = \frac{552}{1.15} = \$480$$

Ejemplo 2.24

Una impresora de inyección de tinta cuesta \$4 427.50, IVA incluido. Calcule:

a) El precio de la impresora antes de sumar el impuesto.
b) El impuesto a pagar.

Solución:

a) Sea x = valor de la impresora antes de impuesto. Como el IVA es 15% del valor de la impresora, entonces

$$\text{IVA} = 15\% \text{ de } x = (0.15)(x) = 0.15\,x$$

Si al valor de la impresora antes de impuesto se le suma el impuesto, se obtiene la cantidad total a pagar por ella. Esto es

$$x + 0.15\,x = 4\,427.50$$

$$1.15\,x = 4\,427.50$$

Por tanto:

$$x = \$3\,850$$

b) El impuesto a pagar es 15% del precio de la impresora, esto es

$$\text{Impuesto a pagar} = 15\% \text{ de } \$3\,850 = (0.15)(3\,850) = \$577.50$$

Ejercicios 2.2

1. Cambie cada uno de los siguientes porcentajes a forma decimal:
   a) 13%
   b) 35.86%
   c) 350%
   d) 0.114%
   e) $8\frac{1}{4}\%$

2. Cambie los siguientes números a porcentaje:
   a) 0.0228
   b) 0.33
   c) 1.75
   d) 0.085
   e) 0.00324

Obtenga el

3. 4% de 9 200

4. 65% de 600

5. 32.36% de 10 000

6. 1% de 240

7. 0.42% de 279

8. $\frac{7}{8}\%$ de 20 000

9. 500% de 1 953

10. 42% de $\frac{(12.5)(13.94)}{10}$

¿Qué porcentaje de

11. 83 es 12.45?

12. 0.1 es 5?

13. 1 920 es 307.2?

14. 2 990 es 2 242.5?

15. 5.6 es 0.007?

¿De qué número es

16. 115 el 80%?

17. 40 el 0.125%?

18. 7 140 el 40%?

19. 1.8 el 18%?

20. 0.084 el 60%?

21. Roberto compró un libro cuyo precio es de $340. Si le hicieron 12% de descuento,
    a) ¿de cuánto fue el descuento?
    b) ¿cuánto pagó por el libro?

22. Agustín recibió $12 000 de aguinaldo. Si gastó 15% en ropa y dio a sus padres el 20% del resto, ¿cuánto le queda?

23. Un negocio aumenta su gasto de publicidad en 10% cada año. Si este gasto ha sido de $150 000 este año, ¿a cuánto ascenderá dentro de 3 años?

24. En la tienda departamental *A* se ofrece una videocámara en un tercio abajo de su precio normal de $9 200. La tienda departamental *B* vende la misma videocámara con un descuento de 35% de su precio normal de $9 325. ¿En cuál tienda conviene comprar la videocámara?

25. De los 150 pantalones que había en una tienda de ropa, 90% se vendió a $200 cada uno y 10% a $140 cada uno. Calcule el importe total de la venta.

26. Una compañía ha contratado un vendedor que está de acuerdo en que ganará un salario fijo de $1 500 a la quincena y una comisión de 8% sobre las ventas quincenales que realice. Si en su primera quincena de trabajo las ventas fueron de $61 730. ¿Cuánto cobró en la quincena?

27. El señor Orozco recibe un sueldo neto de $10 600 mensuales. Si gasta 22% en renta de la casa donde vive y 35% en comida, ¿cuánto tendrá disponible para otros gastos?

28. Un abogado dedicado a cobrar cuentas difíciles cobró 95% de una cuenta de $84 000. Si el abogado cobra 8% de lo recuperado por sus servicios, ¿cuánto recibió el abogado? ¿Cuánto recibió el beneficiario?

29. Al morir Don Pascual, el dinero que tenía invertido en diversas cuentas bancarias fue repartido entre sus tres hijos, de la siguiente forma: el mayor recibió $675 000; el que le sigue, $810 000 y el menor, $1 215 000. Calcule el porcentaje que recibió cada uno.

30. Samuel tiene un ingreso mensual de $13 150 y se le descuentan $1 117.75 por concepto de Impuesto sobre la Renta (ISR). ¿Qué porcentaje paga de impuestos?

31. Al introducir una nueva maquinaria en una fábrica, la producción diaria aumentó de 14 000 a 18 480 unidades, ¿cuál fue el porcentaje de aumento?

32. La población total en Canadá en el 2002 fue de 31.3 millones de habitantes. Mediante una proyección se estima que para el 2050 habrá 40.4 millones de habitantes. Obtenga el porcentaje de aumento.

33. En el año 2001, en cierta ciudad del país, se robaron 2 132 automóviles y en el 2002 fueron 1 975 los autos robados. ¿En qué porcentaje disminuyeron los robos?

34. Un automóvil comprado hace dos años a un precio de $162 000, es valuado en $116 640 este año. Obtenga el porcentaje de depreciación.

35. Existe una fórmula para obtener el cambio porcentual de una variable. Si N_1 es un número que se incrementa o disminuye en un determinado porcentaje, el resultado es el número N_2. El cambio porcentual, expresado en forma decimal, es

$$cp = \frac{N_2}{N_1} - 1$$

Utilice la fórmula anterior para resolver el siguiente problema: actualmente, el litro de leche cuesta $6.80 y se anuncia que a partir de mañana costará $7.40. Obtenga el porcentaje de aumento.

36. Según lo acordado por la Comisión Nacional de Salarios Mínimos, el salario mínimo en la Zona Metropolitana de Guadalajara se incrementó el 1 de enero de 2003, pasando de 40.10 a 41.85 pesos diarios. Utilice la fórmula dada en el ejercicio 35 para calcular el porcentaje de incremento.

37. Un agente de bienes raíces gana 3% de comisión sobre la venta. Si al vender un departamento ganó $17 400, ¿cuál fue el precio de venta del departamento?

38. Según información de la Asociación Mexicana de Distribuidores de Automotores, las ventas al menudeo de vehículos en México fue de 141 415 unidades en el primer trimestre de 1999; una baja del 8.68% con respecto al mismo lapso de 1998. Calcule cuántos vehículos se vendieron en el primer trimestre de 1998.

39. La bicicleta, vehículo de transporte personal, barato y no contaminante, goza de un renacimiento a nivel mundial. La venta de bicicletas ha aumentado en Estados Unidos, la Unión Europea y China. En 1999 se tuvo una producción de 85 millones de bicicletas en todo el mundo. Si el aumento en la producción mundial de 1998 a 1999 fue de 8.974%, calcule la producción de bicicletas en 1998.

40. La renta de un departamento aumentó 7.5%. Si actualmente se pagan $2400 mensuales de renta, ¿cuál era el valor de la renta?

41. Un agente de ventas ganó $22 500 por comisión al vender un automóvil nuevo. Si la comisión que él gana es 5% del valor del automóvil, ¿cuál es el precio de éste?

42. Un agente de bolsa aconsejó a Horacio colocar 30% de su capital en cetes, el 60% en acciones y el resto en la compra de monedas de oro. Si Horacio invirtió $244 000 en la compra de las monedas, ¿cuál es el valor total del capital invertido?

43. Un granjero vende 20% de sus gallinas y se queda con 320. ¿Cuántas gallinas tenía?

44. Un teléfono inalámbrico cuesta $971.75, IVA incluido. Calcule:
a) El precio del teléfono antes de sumar el impuesto.
b) El impuesto a pagar.

45. En una universidad, las autoridades universitarias planean incrementar el salario de los profesores para el próximo año en 10% en enero y 5% en julio. Sin embargo, el sindicato de maestros pide un aumento único de 15% en enero. ¿Cuál alternativa conviene más a los profesores de la universidad?

46. Con respecto al ejercicio anterior, obtenga el porcentaje total de aumento en el año si se escoge la alternativa planteada por las autoridades universitarias.

47. Suponga que un artículo que cuesta $1800 se vende con un descuento de 15%. Si, posteriormente, el vendedor aumenta 15% de IVA, ¿el resultado es $1800? Si no es así, ¿cuál es?

2.3 Utilidad sobre el costo y sobre el precio de venta

El **costo de un artículo** consta de todos los gastos hechos para fabricar o adquirir el artículo. El **costo de un servicio** consta de todos los gastos hechos para proporcionar el servicio.

Para determinar el precio de venta de un producto o servicio, se añade al costo una cantidad suficiente para cubrir los gastos de operación y tener una utilidad. Los **gastos de operación** son las cantidades pagadas por concepto de renta, salarios, publicidad, etcétera. La cantidad que se suma al costo del artículo o servicio para cubrir los gastos de operación y obtener una ganancia, se llama **utilidad bruta**. La ganancia, esto es, la cantidad que queda después de cubrir los gastos de operación se llama **utilidad neta**. Esto es

UTILIDAD BRUTA = GASTOS DE OPERACIÓN + UTILIDAD NETA

PRECIO DE VENTA = COSTO + UTILIDAD BRUTA

Como ejemplo considere el siguiente: un fabricante produce un artículo que le cuesta $120 producirlo. Estima en $50 los gastos de operación por artículo producido y desea obtener una utilidad neta de $60 por artículo vendido. El precio de venta del artículo sería

Utilidad bruta = $50 + $60 = $110

Precio de venta = $120 + $110 = $230

Es costumbre que al fijar los precios de venta, la utilidad bruta y la utilidad neta se den como un porcentaje en lugar de una cifra en unidades monetarias. El porcentaje se basa en el costo o en el precio de venta. Sin embargo, no importa en qué se base la utilidad, ésta siempre se suma al costo para hallar el precio de venta.

Ejemplo 2.25

El dueño de una mueblería compró sillas con un valor de $320 cada una. La utilidad bruta para cubrir los gastos de operación y obtener una ganancia razonable es de 70% del costo. ¿Cuál es el precio en que puede vender cada silla?

Solución:

Utilidad bruta = 70% de 320 = $224

Precio de venta = 320 + 224 = $544

Ejemplo 2.26

Un detallista compró 50 ventiladores en $200 cada uno. Desea añadir una utilidad bruta de 50% del precio de venta para cubrir los gastos de operación y la utilidad neta. ¿A qué precio debe vender cada ventilador?

Solución:

Como el precio de venta no se conoce, entonces sea x = precio de venta.

La utilidad bruta está en función del precio de venta, esto es

$$\text{Utilidad bruta} = 50\% \text{ del precio de venta} = 50\% \text{ de } x = 0.50\,x$$

Por tanto,

$$\text{Precio de venta} = \text{costo} + \text{utilidad bruta}$$

$$x = 200 + 0.50\,x$$

$$x - 0.50\,x = 200$$

$$0.50\,x = 200$$

$$x = \$400$$

Ejemplo 2.27

Un fabricante desea producir árboles de navidad artificiales y venderlos en $480 cada uno. Si añade 70% del costo de producción para cubrir los gastos de operación y la utilidad neta, ¿cuánto es lo más que puede gastar para producir los árboles de navidad?

Solución:

En este caso la incógnita es el costo de producción. Si x = costo de producción, entonces

$$\text{Utilidad bruta} = 70\% \text{ de } x = 0.70\,x$$

$$\text{Precio de venta} = x + 0.70\,x = 480$$

$$1.70\,x = 480$$

$$x = \$282.35$$

Ejemplo 2.28

El encargado de compras de una tienda de artículos musicales compró 10 guitarras eléctricas en $4 150 cada una y las vendió en $5 727 cada una.

a) ¿Cuál es el porcentaje de utilidad bruta basada en el costo?
b) ¿Cuál es el porcentaje de utilidad bruta basada en el precio de venta?

Solución:

a) Si x = porcentaje de utilidad basado en el costo, entonces

$$\text{Utilidad bruta} = (x)(4\,150)$$

$$\text{Precio de venta} = 4\,150 + (x)(4\,150) = 5\,727$$

$$x = \frac{5\,727 - 4\,150}{4\,150} = 0.38 = 38\%$$

b) Si x = porcentaje de utilidad basado en el precio de venta, entonces

$$\text{Utilidad bruta} = (x)(5\,727)$$

$$\text{Precio de venta} = 4\,150 + (x)(5\,727) = 5\,727$$

$$x = \frac{5\,727 - 4\,150}{5\,727} = 0.27536 = 27.536\%$$

Ejemplo 2.29

Hemos visto que la utilidad bruta puede basarse en el costo o en el precio de venta. En algunas ocasiones se necesita convertir una tasa de utilidad bruta basada en el costo a una tasa basada en el precio de venta, y viceversa.

Suponga que la utilidad bruta de un artículo es 60% del costo, ¿cuál es la utilidad bruta basada en el precio de venta?

Solución:

Haga que el costo sea una cantidad cualquiera, por ejemplo, $100. Entonces

$$\text{Utilidad bruta} = 60\% \text{ de } 100 = 60$$

$$\text{Precio de venta} = 100 + 60 = 160$$

Si x = porcentaje basado en el precio de venta, entonces,

$$\text{Utilidad bruta} = 160\,x$$

Por tanto,

$$\text{Costo} + \text{utilidad bruta} = \text{precio de venta}$$

$$100 + 160\,x = 160$$

$$x = \frac{160 - 100}{160} = 0.375 = 37.5\%$$

Ejercicios 2.3

1. Un fabricante produce teclados para computadora en \$525 cada uno y añade 48% del costo como utilidad bruta. Determine la utilidad bruta y el precio de venta.
2. El dueño de *Relojería El Diamante* compró un lote de relojes en \$650 cada uno. ¿Cuál será el precio de venta de cada reloj si se desea una utilidad bruta de 63% sobre el costo?
3. Un comerciante compró varios libreros en \$640 cada uno. Si añade 52% del costo para gastos de operación y 25% del costo para utilidad neta, ¿cuál es el precio de venta de cada librero?
4. ¿En cuánto deberá vender un minorista un artículo que costó \$1500, si la utilidad bruta deseada es de 42% basada en el precio de venta?
5. El costo de un pantalón para dama es de \$340 y la utilidad bruta es de 38% del precio de venta. Calcule el precio de venta.
6. Obtenga el precio de venta de una impresora láser, si el precio de costo es de \$2760 y los gastos de operación son 45% del precio de venta y la utilidad neta es 20% del precio de venta.
7. ¿Cuál fue el precio de costo de un artículo que se vendió en \$750 con una utilidad sobre el costo de 25%?
8. ¿Cuál fue el costo de un comedor que se vendió en \$2166 con 32% de utilidad bruta sobre el precio de venta?
9. Un comerciante vendió en \$3600 una mercancía de difícil salida con una pérdida de 21% sobre el precio de costo. ¿Cuál fue el precio de costo de la mercancía?

10. El dueño de una zapatería desea comprar zapatos de un modelo que se vende a \$940 el par. ¿Cuál es el precio máximo que puede pagar, si la utilidad bruta debe ser 42% del precio de venta?

11. Un artículo que costó \$240 se vende en \$300. Encuentre la utilidad bruta, en porcentaje, basada en el precio de venta.

12. Un rifle de "copitas" cuesta \$410 y se vende en \$807.65. Obtenga el porcentaje de utilidad sobre el precio de venta.

13. Un cargamento de fertilizante se compra al mayoreo a un precio de \$324 por costal y se vende en \$540. Encuentre el porcentaje de utilidad basada en el costo.

14. El precio de venta de una radiograbadora es de \$1440. Los gastos de operación son 60% del costo y la utilidad neta es 25% del costo. ¿Cuál es el precio de costo?

15. Un comerciante que desea añadir a su línea de artículos para oficina una calculadora financiera, cuyo precio de venta es de \$570, encuentra que puede adquirirla en \$256.50. ¿Le dará este precio de costo la utilidad bruta de 60% sobre el precio de venta?

16. Una raqueta de tenis se compra en \$1 600 y se vende en \$2 200.
    a) ¿Cuál es el porcentaje de utilidad bruta sobre el costo?
    b) ¿Cuál es el porcentaje de utilidad bruta sobre el precio de venta?

17. Una mercancía que costó 40 dólares se vendió en 52 dólares. ¿Qué porcentaje se ganó sobre el costo?

18. Humberto rehusó vender una pintura cuando le ofrecieron \$119 280 por ella, con lo cual hubiera ganado 42% de lo que costó. Algún tiempo después la tuvo que vender en \$95 000. ¿Qué porcentaje del costo ganó al hacer la venta?

19. Un comerciante adquiere una mercancía a un costo de \$480. Determine el precio al cual debe ponerla en venta, para que, haciendo un descuento de 20% sobre el precio de venta, obtenga una ganancia de 15% sobre el precio de costo.

20. Antonio vendió dos casas en \$820 000 cada una. En una perdió 15% de su precio de venta real y en la otra ganó 17% del precio de compra original. ¿Ganó o perdió en total, y cuánto?

21. Si la utilidad bruta de un cierto artículo es 36% del costo, determine el porcentaje de utilidad bruta con base en el precio de venta.

22. ¿Qué porcentaje del precio de venta de un artículo es equivalente a una utilidad de 25% del costo del artículo?

23. La utilidad bruta al vender un televisor es 45% de su precio de venta. Calcule la utilidad basada en el costo.

24. El dueño de una tienda de frutas y verduras compró 150 kilogramos de naranja a $2.50 el kilogramo. Su utilidad bruta es 60% del costo total de la compra. Por experiencia sabe que alrededor de 6% de la naranja se echará a perder y tendrá que tirarse. ¿Qué precio por kilogramo dará la utilidad bruta requerida?

25. Un supermercado compró 270 kilogramos de pescado a $22 el kilogramo. Alrededor de 5% se dañará antes que se pueda vender la totalidad del mismo. ¿A qué precio por kilogramo se debe marcar el pescado con el fin de obtener una utilidad bruta de 50% del costo?

26. Un restaurante adquirió 100 litros de leche a $6.50 el litro. Su utilidad bruta es de 45% del precio de venta. Por experiencia se sabe que en promedio 6% de la leche se fermentará y tendrá que tirarse. ¿Qué precio por litro dará la utilidad bruta deseada?

27. Una pastelería entrega pasteles a varios cafés y restaurantes de la ciudad y recoge toda la mercancía que no vendan en el plazo de una semana. El costo de producción es de $100 por pastel. La pastelería distribuye 1000 pasteles a la semana y le devuelven alrededor de 3%. ¿Qué precio debe tener cada pastel, si la utilidad bruta de la pastelería es de 40% del precio de venta?

2.4 Descuento comercial

Es usual que los fabricantes de productos y los mayoristas proporcionen a sus clientes listas de precios propuestos por cada producto. El precio mostrado en estas listas recibe el nombre de **precio de lista** y es el precio sugerido para menudeo, esto es, el precio de lista puede o no ser el precio final a pagar por el consumidor.

Los fabricantes y mayoristas venden sus productos a los minoristas o detallistas con un descuento basado en el precio de lista, llamado **descuento comercial**. El descuento comercial es un porcentaje del precio de lista, y recibe el nombre de **tasa de descuento**. El precio de lista menos el descuento comercial se llama **precio neto**.

Los descuentos comerciales se aplican generalmente a las ventas hechas por el fabricante al mayorista; por el mayorista al detallista y cuando el fabricante vende directamente al detallista. Los descuentos comerciales no se aplican a las ventas al menudeo.

Ejemplo 2.30

Encuentre el precio neto de una mercancía, cuyo precio de lista es \$478, si se aplica un descuento comercial de 23%.

Solución:

$$\text{Descuento} = 23\% \text{ del precio de lista} = 23\% \text{ de } 478 = \$109.94$$

$$\text{Precio neto} = \text{precio de lista} - \text{descuento} = 478 - 109.94 = \$368.06$$

Los descuentos comerciales pueden ser **simples** o **en cadena**. El descuento aplicado en el ejemplo 2.30 fue un descuento comercial simple.

Es común que sobre un precio de lista se hagan varios descuentos por diversas razones. Por ejemplo, un fabricante que vende tanto a mayoristas como a minoristas puede especificar que al minorista se le concede un descuento comercial de 20%, mientras que el mayorista recibe 10% adicional, debido al volumen de la compra. Estos descuentos sucesivos reciben el nombre de **descuentos en cadena, en serie** o **sucesivos**.

Debido a que las tasas de los descuentos en cadena se aplican a bases diferentes en cada etapa de la resolución de un problema, los descuentos en cadena nunca se deben sumar y utilizar la suma como un solo descuento.

Cuando se aplican tasas de descuento en serie, el precio de lista se multiplica por la primera tasa de descuento y el resultado se resta del precio de lista para obtener un residuo que se convierte en la base para la segunda tasa de descuento. Este residuo se multiplica por la segunda tasa de descuento y el resultado se resta del residuo para obtener un nuevo residuo que es la base para la tercera tasa de descuento y así sucesivamente.

Ejemplo 2.31

Un fabricante de muebles finos ofrece a un mayorista descuentos comerciales del 20%, 12% y 8%. Encuentre el precio neto de un pedido por \$300 000.

Solución:

$$\begin{aligned}
\text{Precio de lista} &= \$300\,000 \\
\text{Descuento de 20\%} &= (300\,000)(0.20) = \$60\,000 \\
\text{Saldo} &= 300\,000 - 60\,000 = \$240\,000 \\
\text{Descuento de 12\% sobre el saldo} &= (240\,000)(0.12) = \$28\,800 \\
\text{Saldo nuevo} &= 240\,000 - 28\,800 = \$211\,200 \\
\text{Descuento de 8\% sobre el saldo nuevo} &= (211\,200)(0.08) = \$16\,896 \\
\text{Precio neto} &= 211\,200 - 16\,896 = \$194\,304
\end{aligned}$$

Otro método para hallar el precio neto en un problema donde se aplica descuento comercial (simple o en cadena), consiste en utilizar la siguiente fórmula general:

$$PN = PL\,(1 - d_1)(1 - d_2)\ldots(1 - d_n) \qquad (2.3)$$

en donde PN es el precio neto, PL es el precio de lista y $d_1, d_2, \ldots, d_n$ son los descuentos comerciales aplicados.

Ejemplo 2.32

Resuelva el ejemplo 2.31 utilizando la ecuación (2.3).

Solución:

$$PN = 300\,000\,(1 - 0.20)(1 - 0.12)(1 - 0.08) = \$194\,304$$

Ejemplo 2.33

El precio neto de un escritorio fue de $4 284.52 después de habérsele descontado 14% y 6%. Halle el precio de lista.

Solución:

Al despejar PL de la ecuación (2.3), se tiene

$$PL = \frac{PN}{(1 - d_1)(1 - d_2)}$$

$$PL = \frac{4\,284.52}{(1 - 0.14)(1 - 0.06)} = 5\,300$$

Ejercicios 2.4

1. Un portafolio, con precio de lista de $950, se vende a un minorista con un descuento de 16%. Encuentre el descuento aplicado y el precio neto.

2. Un fabricante de artículos de plástico concede un descuento de 30% a todo aquel que compre mercancía con valor mayor a $40 000. ¿Qué precio neto paga un mayorista que compra $45 000 en mercancía?

3. El señor Arce compró en $7 463 una cámara fotográfica digital cuyo precio de lista es de $8 780. Calcule el porcentaje de descuento comercial que se le hizo.

4. Una empresa editorial fija un precio neto de $235 para un libro de cálculo. ¿Cuál debe ser el precio de lista del libro, si la editorial concede un descuento comercial a la librería de 30%?

5. Un comerciante compra cierta mercancía con un descuento comercial de 25% del precio de lista y la vende en un 25% más que el precio de lista. ¿Cuál es su porcentaje de ganancia sobre el costo?

6. Sobre una factura de $360 000 se conceden los siguientes descuentos en cadena: 15%, por compra al por mayor; 8%, por promoción especial y 5%, por pago de contado. Encuentre la cantidad a pagar.

7. ¿Cuánto paga el dueño de una ferretería por la compra de 100 pinzas de presión, cuyo precio de lista es de $55 cada una, si se obtienen descuentos comerciales de 10%, 7% y 3%?

8. Dos compañías competidoras tienen el mismo precio de lista para un artículo. Una de las compañías ofrece descuentos comerciales en serie de 30% y 20%; la otra ofrece descuentos en serie de 23.5%, 15% y 13%. ¿Cuál compañía le conviene más a un comprador?

9. Un vendedor nuevo que no conocía el significado de los descuentos comerciales en cadena que ofrece su compañía, y que son de 18% y 13%, los sumó al efectuar un descuento en su primera venta. Si la cantidad total sobre la que se debe efectuar el descuento comercial fue de $950 000, ¿de cuánto fue el error del vendedor?

10. Un fabricante de bicicletas desea vender su producción de bicicletas de carrera a un precio neto de $3 275 cada una. ¿Cuál debe ser el precio de lista de la bicicleta, si el fabricante desea conceder descuentos en serie de 15% y 12%?

11. El gerente de una tienda de artículos electrónicos rebajó las videocaseteras dos veces consecutivas, en 20% y 15%, y las vendió en $1 224 cada una. ¿Cuál era su precio original?

12. Un fabricante de juguetes desea vender cierto juguete a un precio neto de \$130 después de descuentos de 22%, 13% y 8%. ¿Cuál debe ser el precio de lista del juguete?

13. Con frecuencia resulta útil conocer un descuento simple que producirá el mismo precio neto que una serie de descuentos en cadena. Este descuento único se conoce como **tasa de descuento equivalente**.

    Este descuento único se aplica cuando se utiliza la misma serie de descuentos una y otra vez para calcular el precio neto de una lista de precios.

    Halle la tasa de descuento equivalente a la serie de descuentos de 10% y 5%.

14. Encuentre la tasa de descuento equivalente que es igual a la serie de descuentos de 20%, 10% y 5%.

15. El jefe de compras de una tienda departamental compró 20 hornos de microondas en \$1 870 cada uno menos los descuentos en serie de 22% y 12%. ¿Cuál fue el precio neto total? ¿Cuál fue la tasa de descuento equivalente?

16. Los descuentos en serie concedidos en una compra fueron 14%, 10% y 7%. Si el precio neto es de \$40 309.92, encuentre la tasa de descuento equivalente.

CAPÍTULO 3

Sucesiones y series

Objetivos

Al finalizar el estudio de este capítulo el alumno podrá:

- Explicar qué es una sucesión y una serie aritmética y qué es una sucesión y una serie geométrica.
- Plantear y resolver problemas de sucesiones y series.

3.1 Introducción

El tema de sucesiones y series tiene una gran aplicabilidad en áreas como ciencias de la computación, ingeniería, física, economía y finanzas, entre otras. Este tema es la base para deducir varias fórmulas utilizadas en matemáticas financieras.

Algunas personas sostienen que es posible utilizar las sucesiones, en especial la sucesión de Fibonacci,[1] para llevar a cabo un análisis técnico del Mercado de Valores. El lector interesado en este tema puede visitar las páginas www.basefinanciera.com/finanzas/publico/aula/atecnico/at_home.htm y www.arrakis.es/~mcj/gallego.htm

Una **sucesión** se define como un conjunto ordenado de números reales formados de acuerdo con una regla. Cada número de la sucesión recibe el nombre de **término**. El conjunto 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, . . . es una sucesión cuya regla es que cada término, después del primero, se obtiene sumando 4 al término anterior. El conjunto 5, 10, 20, 40, 80, . . . es una sucesión cuya regla es que cada término, después del primero, se obtiene multiplicando por 2 el término anterior. ¿Puede el lector decir cuál es la regla utilizada en la sucesión 15, 20, 26, 33, 41, 50, . . . y cuál sería el término que sigue?

Si representamos con a_1 al primer término de una sucesión, con a_2 al segundo término, con a_3, al tercer término, y así sucesivamente, entonces podemos denotar la sucesión como

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

El término a_n se llama n-ésimo término.

Como a cada número natural n le corresponde un número a_n, se tiene que una **sucesión** es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos.

A menudo las sucesiones se designan mediante una fórmula que da el valor de a_n, para cualquier número entero n. Así, la fórmula $a_n = 2n + 5$ define una sucesión cuyos primeros seis términos son

$$a_1 = 2(1) + 5 = 7$$

$$a_2 = 2(2) + 5 = 9$$

$$a_3 = 2(3) + 5 = 11$$

$$a_4 = 2(4) + 5 = 13$$

$$a_5 = 2(5) + 5 = 15$$

$$a_6 = 2(6) + 5 = 17$$

Escribimos la sucesión como 7, 9, 11, 13, 15, 17, . . .

[1] Véanse Ejercicios 3.1, problema 24.

Para calcular el vigésimo sexto término de esta sucesión se usa $n = 26$ y se obtiene

$$A_{26} = 2(26) + 5 = 57$$

Ejemplo 3.1

Escriba los primeros cinco términos y el vigésimo término de la sucesión definida por $a_n = \dfrac{n-2}{n}$.

Solución:

$$a_1 = \frac{1-2}{1} = -1$$

$$a_2 = \frac{2-2}{2} = 0$$

$$a_3 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{4-2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$a_5 = \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$a_{20} = \frac{20-2}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

La sucesión la escribimos como

$$-1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \ldots, \frac{9}{10}, \ldots$$

Otra manera de definir una sucesión es mediante una **fórmula recursiva**. En este caso se dan los valores de uno o varios términos de la sucesión y el término a_n se expresa en función de los términos precedentes.

Ejemplo 3.2

Escriba los primeros cinco términos de la sucesión definida recursivamente como

$$a_1 = 8, \; a_n = 4a_{n-1} - 10$$

Solución:

El primer término es $a_1 = 8$. Para obtener el segundo término, usamos $n = 2$ en la fórmula y obtenemos

$$a_2 = 4\,a_{2-1} - 10 = 4\,a_1 - 10 = 4(8) - 10 = 22$$

El tercer término será

$$a_3 = 4\,a_{3-1} - 10 = 4\,a_2 - 10 = 4(22) - 10 = 78$$

El cuarto y el quinto términos son

$$a_4 = 4\,a_{4-1} - 10 = 4\,a_3 - 10 = 4(78) - 10 = 302$$

$$a_5 = 4\,a_{5-1} - 10 = 4\,a_4 - 10 = 4(302) - 10 = 1\,198$$

Como se observa, para obtener un término cualquiera, se requiere que conozcamos el valor del término precedente.

La suma de los primeros n términos de una sucesión recibe el nombre de **serie**. Si n es un entero positivo, S_n simbolizará la suma de los primeros n términos de una sucesión. Así, para la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, se tiene

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

En general, se tiene que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Ejemplo 3.3

Calcule la suma con los primeros cuatro términos de la sucesión definida por $a_n = (-1)^{n+1}\,3^n$

Solución:

$$a_1 = (-1)^2\,3^1 = 3$$

$$a_2 = (-1)^3\,3^2 = -9$$

$$a_3 = (-1)^4\,3^3 = 27$$

$$a_4 = (-1)^5\,3^4 = -81$$

Por tanto,

$$S_4 = 3 - 9 + 27 - 81 = -60$$

Ejercicios 3.1

En los ejercicios del 1 al 5 el patrón dado continúa. Escriba los siguientes tres términos de las sucesiones.

1. 35, 43, 51, 59, . . .
2. 100, 85, 70, 55, . . .
3. 1/4, 2/4, 3/4, 4/4, . . .
4. 3, 7, 15, 31, 63, . . .
5. $x, x + a, x + 2a, x + 3a, \ldots$

En los ejercicios del 6 al 11, encuentre los primeros cinco términos y el vigésimo segundo término de la sucesión definida por la fórmula.

6. $a_n = 5n - 12$
7. $a_n = n^2 - n$
8. $a_n = \dfrac{3n - 2}{n + 1}$
9. $a_n = \log n^2$
10. $a_n = 5 + (-1)^{n+1}$
11. $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$
12. Obtenga el término número cien de la sucesión representada por $a_n = \dfrac{2n}{n - 20}$

En los ejercicios del 13 al 17 se define una sucesión de manera recursiva. Escriba los primeros cinco términos.

13. $a_1 = 5, a_n = a_{n-1} + 3$
14. $a_1 = -10, a_{n+1} = 7 - a_n$
15. $a_1 = 2, a_2 = 4, a_{n+2} = a_n a_{n+1}$
16. $a_{12} = 84, a_{n+1} = (a_n)^{1/n}$
17. $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{10}$, comenzando con $a_5 = 500$

18. Calcule las sumas S_1, S_2, S_3 y S_4 utilizando la sucesión 5, 9, 13, 17, 21, 25, . . .

En los ejercicios del 19 al 22, obtenga la suma de los primeros seis términos de la sucesión definida por la fórmula.

19. $a_n = \frac{1}{n}$

20. $a_n = (-3)^{n-1}$

21. $a_n = 1.5(2^n)$

22. $a_n = a_{n-1} + 2.5$, comenzando con $a_1 = 0$

23. Observe las siguientes ecuaciones:

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

y vea que hay un patrón. Diga cuál sería la siguiente línea y verifique el resultado.

24. La sucesión definida como $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, con $n = 3, 4, 5, \ldots$, se llama *sucesión de Fibonacci*, en honor del matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), mejor conocido como Fibonacci (que significa *hijo de Bonacci*). Esta sucesión presenta muchos patrones interesantes y tiene muchas aplicaciones, ya que existen infinidad de fenómenos naturales que se comportan como la sucesión de Fibonacci. Si usted desea profundizar en este tema, visite las páginas http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/mate3q.htm y www.arrakis.es/~mcj/fibonacc.htm.

La Asociación Fibonacci es una organización que se dedica al estudio de la sucesión de Fibonacci. *The Fibonacci Quarterly* es la publicación oficial de la asociación y su sitio Web se encuentra en www.mscs.dal.ca/Fibonacci.

Utilizando la fórmula de recurrencia dada, obtenga los primeros diez términos de la sucesión de Fibonacci.

3.2 Sucesiones aritméticas

Una **sucesión aritmética** es una sucesión en la cual cada término, después del primero, se obtiene sumándole al término anterior una cantidad constante llamada **diferencia común**. Por ejemplo, la sucesión 4, 10, 16, 22, 28, 34, 40, . . . es una sucesión aritmética cuya diferencia común es 6, ya que $4 + 6 = 10$, $10 + 6 = 16$, $16 + 6 = 22$, y así sucesivamente. La sucesión 35, 25, 15, 5, -5, . . . es una sucesión aritmética con diferencia común de -10.

A partir de la definición anterior se tiene que, en toda sucesión aritmética la diferencia común se obtiene restándole a un término cualquiera el término anterior.

Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ una sucesión aritmética y sea d su diferencia común. Por definición, es posible escribir

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \\
a_5 &= a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
a_n &= a_1 + (n - 1)\,d
\end{aligned}
$$

El n-ésimo término se obtuvo al observar que el coeficiente numérico de d en cada término es uno menos que el correspondiente número de orden del término. Por tanto, el n-ésimo término de una sucesión aritmética está dado por la siguiente ecuación.

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d \tag{3.1}$$

Ejemplo 3.4

Encuentre el trigésimo quinto término de la sucesión aritmética 10, 14, 18, 22, . . .

Solución:

La diferencia común es $d = 14 - 10 = 4$. Al sustituir $a_1 = 10$, $d = 4$ y $n = 35$ en la ecuación (3.1), resulta

$$a_{35} = 10 + (35 - 1)4 = 146$$

Ejemplo 3.5

El decimosegundo término de una sucesión aritmética es 71 y su diferencia común es 5. Encuentre el primer término.

Solución:

Se despeja a_1 de la fórmula (3.1):

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d$$
$$a_1 = a_n - (n - 1)\,d$$

Al sustituir $a_n = a_{12} = 71$, $n = 12$ y $d = 5$, se tiene

$$a_1 = 71 - (12 - 1)5 = 71 - (11)(5) = 16$$

Ejemplo 3.6

El primer término de una sucesión aritmética es 0 y el vigésimo término es 190. Encuentre la diferencia común.

Solución:

Se despeja d de la ecuación (3.1):

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d$$
$$a_n - a_1 = (n - 1)\,d$$
$$\frac{a_n - a_1}{n - 1} = d$$

Por tanto, al sustituir los datos se tiene

$$d = \frac{190 - 0}{20 - 1} = 10$$

Ejemplo 3.7

¿Cuántos términos tiene la sucesión aritmética $-7, -3, \ldots, 29$?

Solución:

La diferencia común es: $(-3) - (-7) = 4$.

Se despeja n de la ecuación (3.1):

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

$$a_n - a_1 = (n-1)\,d$$

$$\frac{a_n - a_1}{d} = n - 1$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

Al sustituir los datos resulta

$$n = \frac{29 - (-7)}{4} + 1 = 10$$

La suma de los términos de una sucesión aritmética recibe el nombre de **serie aritmética**. A continuación se procede a deducir una fórmula para encontrar la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética.

Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ una sucesión aritmética cuya diferencia común es d, y sea

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Como:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2\,d$$

$$a_4 = a_1 + 3\,d$$

$$a_5 = a_1 + 4\,d$$

....

....

....

Entonces

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \qquad (1)$$

Escribiendo los términos del segundo miembro de (1) en orden inverso se obtiene

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \qquad (2)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Es decir

$$2\,S_n = n(a_1 + a_n)$$

En donde n es el número total de binomios en la suma. Al despejar S_n se obtiene la fórmula general para calcular la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.8

Encuentre la suma de los primeros 50 términos de la sucesión aritmética 5, 12, 19, . . .

Solución:

En primer lugar es necesario calcular su diferencia común, $d = 7$, y el término número cincuenta.

$$a_{50} = 5 + (50 - 1)(7) = 348$$

Al sustituir $n = 50$, $a_1 = 5$ y $a_{50} = 348$ en la ecuación (3.2) se tiene

$$S_{50} = \frac{50}{2}(5 + 348) = 8\,825$$

Ejemplo 3.9

Encuentre la suma de todos los números pares del 100 al 800, inclusive.

Solución:

Este problema consiste en hallar la suma de los términos de la sucesión aritmética 100, 102, 104, 106, . . . , 800. La sucesión tiene una diferencia común igual a 2.

El número de términos que forman la sucesión es

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{800 - 100}{2} + 1 = 351$$

Por tanto,

$$S_{351} = \frac{351}{2}(100 + 800) = 157\,950$$

Ejemplo 3.10

El último término de una sucesión aritmética, que consta de once términos, es 0. Si la suma de los once términos es 11 000, obtenga el primer término.

Solución:

Se despeja a_1 de la fórmula (3.2):

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\frac{2S_n}{n} = a_1 + a_n$$

$$a_1 = \frac{2S_n}{n} - a_n$$

Al sustituir los valores numéricos, se obtiene

$$a_1 = \frac{2S_n}{n} - a_n = \frac{(2)(11000)}{11} - 0 = 2000$$

Ejemplo 3.11

Suponga que el dólar aumenta de precio en \$0.005 por día. Si el día de hoy el dólar se cotiza en \$10.90 a la venta, ¿qué día estará a \$11.60?

Solución:

El problema consiste en calcular el número de términos de una sucesión aritmética, la cual escribimos como:

$$10.90,\ 10.905,\ 10.91, \ldots, 11.60$$

Al sustituir los valores numéricos en la ecuación (3.1), se tiene

$$11.60 = 10.90 + (n - 1)0.005$$

Despejando n de la expresión anterior, se tiene que

$$n = \frac{11.60 - 10.90}{0.005} + 1 = 141$$

El dólar valdrá \$11.60 dentro de 141 días.

Ejercicios 3.2

1. Determine si las siguientes sucesiones son aritméticas, suponiendo que el patrón continúa.
   a) 2, 10, 18, 26, . . .
   b) 3, 6, 12, . . .
   c) 42, 37, 32, 27, . . .
   d) 50, 58, 53, 61, . . .

2. Calcule el trigésimo segundo término y la suma de los treinta y dos primeros términos de la sucesión aritmética dada.
   a) 60, 70, 80, 90, . . .
   b) 5, 4.2, 3.4, 2.6, . . .

3. ¿Cuál es el término número cincuenta de una sucesión aritmética, cuyo primer término es 0 y la diferencia común es 5?

4. Encuentre el vigésimo término de la sucesión aritmética $-1/3$, $1/3$, 1, $5/3$, . . .

5. Encuentre el término número setenta y seis de la sucesión 0.20, 0.25, 0.30, . . .

6. El sexto término de una sucesión aritmética es -8 y su diferencia común es -8. Encuentre el primer término de la sucesión y la suma de los seis primeros términos.

7. Si $a_{11} = 44$ y $d = -3/5$, encuentre a_5.

8. Encuentre el término número 100 de una progresión aritmética cuyo primer término es 8 y el séptimo es -1.

9. El sexto término de una sucesión aritmética es 21 y el onceavo es 32. Calcule el decimoquinto término y la suma de los quince primeros términos de la sucesión.

10. Calcule el décimo término y la suma de los primeros diez términos de la sucesión $(x - 15), (x - 11), (x - 7), (x - 3), \ldots$

11. Encuentre el sexto, el doceavo y el n-ésimo términos de una sucesión aritmética con $a_1 = 10$ y $d = 3/5$.

12. Los tres primeros términos de una sucesión aritmética son 15, 20.5 y 26. Demuestre que el n-ésimo término de la sucesión está dado por la fórmula $a_n = 5.5\,n + 9.5$.

13. El primer término de una sucesión aritmética es 1 y la diferencia común es 7. Encuentre una fórmula que proporcione la suma de los n primeros términos de la sucesión. Utilice la fórmula para obtener la suma cuando $n = 13$.

14. ¿Cuántos términos tiene cada una de las siguientes sucesiones?
a) $2, 8, 14, \ldots, 350$
b) $17, 21, 25, \ldots, 53$
c) $\frac{8}{3}, 4\frac{1}{15}, \ldots, 36\frac{4}{15}$

15. Halle la suma de las sucesiones del ejercicio anterior.

16. Encuentre la suma de todos los números pares del 100 al 10000, inclusive.

17. El primer término de una sucesión aritmética es 20 y el último término es 74. Si la suma de los términos es 470, calcule:
a) El número de términos en la sucesión.
b) La diferencia común.
c) Escriba la sucesión completa.

18. Halle la suma $10 + 15 + 20 + \ldots + 130$.

19. La suma de los 26 términos de una sucesión aritmética es 7605. Si el último término es 480, ¿cuál es el primer término?

20. El grosor y la longitud del cabello humano están sujetos a estímulos hormonales, pero en promedio, el crecimiento es de 0.4 mm por día y su diámetro promedio es de 0.08 mm. Si Pedro se rapó totalmente, ¿en cuántos días tendrá su cabello un largo de 6 cm?

21. Un estudiante ahorra para dar el enganche de una motocicleta. La primera semana guarda \$80; la segunda, \$100; la tercera, \$120, y así sucesivamente, durante 52 semanas. ¿Cuánto dinero tendrá al final de las 52 semanas?

22. Patricia pesa 105 kg y mediante una dieta, supervisada por su médico, reduce 210 gramos cada día, ¿cuántos días tardará para lograr su peso ideal de 63 kg?

23. Al final de su primer mes de trabajo, Jaime ahorra \$300. A partir de entonces cada mes guarda \$50 más que el mes anterior. ¿Cuánto habrá ahorrado al cabo de un año? ¿Cuándo serán mayores de \$3100 sus ahorros?

24. Un supermercado pone en oferta cierta marca de refresco en lata: $6.00 por la primera lata; $5.60 por la segunda lata; $5.20 por la tercera y así sucesivamente hasta llegar a un máximo de 10 latas por persona. ¿Cuál será el costo de comprar 10 latas de refresco?

25. Un grupo de alumnos de la licenciatura en finanzas efectúan una rifa con el fin de obtener fondos para su graduación, de la siguiente forma: se hacen 1 000 boletos numerados del 000 al 999 y cada uno se mete en un sobre y se cierra. La persona que desee comprar un boleto escoge un sobre, y el número del boleto corresponde a la cantidad de dinero que tendrá que pagar en pesos. Por ejemplo, si al abrir el sobre el boleto marca el número 65, se tendrá que pagar $65 por él. ¿Cuánto dinero se obtendrá al vender todos los boletos?

26. Un ingeniero es requerido por dos compañías. La compañía X le ofrece un sueldo inicial de $12 400 al mes y aumentos mensuales de $290 durante un año. La compañía Y le ofrece un sueldo inicial de $13 500 al mes y aumentos mensuales de $150 durante un año. Desde un punto de vista estrictamente monetario, ¿cuál compañía le conviene más?

27. En una fábrica hay un montón de tubos de acero acomodados en forma triangular, tal como se muestra en la figura. Si en la hilera inferior hay 35 tubos, ¿cuántos tubos hay en total?

O
OO
OOO
OOOO

OOOOOOOOOOOOO

28. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado la señorita Saucedo, sin tomar en cuenta el interés ganado, si realiza depósitos quincenales en una cuenta de ahorros, durante 24 meses, comenzando con $300 depositados al final de la primera quincena e incrementando los siguientes depósitos en $100 después de cada 4 depósitos quincenales?

29. Una persona enferma recibió de su médico la siguiente receta: deberá tomar una pastilla diaria de 500 mg de cierto medicamento durante la primera semana; en la sexta semana, deberá tomar una pastilla diaria de 220 mg, del mismo medicamento. Si la dosis disminuye en forma aritmética cada semana, determine la dosis de la pastilla diaria para la segunda, tercera, cuarta y quinta semanas.

Tema especial

Gauss y las sucesiones

"Príncipe de las matemáticas", es la frase que el rey Jorge V de Hannover mandó grabar en las monedas acuñadas en 1855, en memoria de uno de los más grandes matemáticos que ha dado el género humano: Carl Friedrich Gauss.

Gauss nació en Brunswick, Alemania, el 30 de abril de 1777 en el seno de una familia pobre, y desde sus primeros años de vida dio muestras de su gran genio. Aprendió a leer él solo, antes de ir a la escuela, y su capacidad para las matemáticas era tan grande que despertó la atención de sus padres y la curiosidad de los parientes y amigos. Él mismo solía decir bromeando que había aprendido a calcular antes que a escribir.

Existen muchas anécdotas sobre Gauss; una de éstas, relacionada con las sucesiones, es la siguiente: se cuenta que un día, cuando Gauss tenía alrededor de 8 años y asistía a la escuela primaria, el profesor, por alguna razón, quiso que sus alumnos dejasen de molestarlo durante un buen rato. Así que se le ocurrió plantearles un sencillo pero laborioso problema: que sumaran los 100 primeros números naturales, esto es $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100$. Con está tarea, el profesor supuso que los pequeños quedarían entretenidos un buen rato. Sin embargo, mientras sus compañeros se esforzaban en hallar la solución, el niño Gauss se levantó de su asiento a los cinco minutos y le entregó a su profesor la respuesta. El profesor, sorprendido, le preguntó cómo lo había hecho; el niño le explicó que en lugar de sumar los números, uno por uno, se puso a reflexionar atentamente sobre el problema, y se dio cuenta de lo siguiente: si se suma el primer número con el último, esto es 1 y 100, se obtiene 101; si después se suma el segundo número con el penúltimo, 2 y 99, se obtiene 101, y lo mismo ocurrirá al sumar el tercero con el antepenúltimo, es decir, si S es el resultado de la suma, entonces se puede escribir:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

La suma anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

Sumando las igualdades anteriores:

$$2S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (98 + 3) + (99 + 2) + (100 + 1)$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101$$

Por tanto,

$$2S = (100)(101)$$

Es decir,

$$S = \frac{(100)(101)}{2} = 5\,050$$

Las investigaciones de Gauss abarcaron todas las áreas de la matemática. En su tesis doctoral, escrita a los 22 años, demostró el Teorema Fundamental del Álgebra, escribió un tratado sobre la teoría de los números, ideó el método de mínimos cuadrados, hizo aportaciones notables en el campo de las curvas y desarrolló un método general de resolución de ecuaciones binomias. Además, realizó importantes contribuciones a los campos de la astronomía y la física y fue director del observatorio de Göttingen. Su obra principal fue *Disquisitione Arithmeticae*, publicada en 1801. Gauss murió, mientras dormía, el 23 de febrero de 1855.

Utilice el método empleado por Gauss para determinar las siguientes sumas

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 5000$

b) $1 + 2 + 3 + \ldots + n$

3.3 Sucesiones geométricas

Una **sucesión geométrica** es una sucesión en la cual cada término, después del primero, se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad constante llamada **razón común**. Por ejemplo, la sucesión 1, 5, 25, 125, 625, ... es una sucesión geométrica cuya razón común es 5, ya que $1 \times 5 = 5$, $5 \times 5 = 25$, $25 \times 5 = 125$ y $125 \times 5 = 625$. La sucesión 300, 150, 75, 37.5, 18.75, . . . es una sucesión geométrica con razón común igual a 0.5.

En toda sucesión geométrica la razón común es igual a la división de un término cualquiera entre el término anterior.

Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ una sucesión geométrica, con $a_1 \neq 0$ y sea r su razón común, donde $r \neq 0$. Por definición,

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 r \\
a_3 &= a_2 r = (a_1 r) r = a_1 r^2 \\
a_4 &= a_3 r = (a_1 r^2) r = a_1 r^3 \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
a_n &= a_1 r^{n-1}
\end{aligned}$$

El n-ésimo término se obtuvo al observar que el exponente de r en cada término es uno menos que el correspondiente número de orden del término. Por tanto, el n-ésimo término de una sucesión geométrica está dado por la siguiente ecuación.

$$a_n = a_1 r^{n-1} \tag{3.3}$$

Ejemplo 3.12

Encuentre el decimoquinto término de la sucesión geométrica 7, 14, 28, 56, . . .

Solución:

La razón común es $r = 14/7 = 2$. Al sustituir $a_1 = 7$, $r = 2$ y $n = 15$ en la ecuación (3.3), resulta

$$a_{15} = (7)(2^{15-1}) = (7)(2^{14}) = (7)(16\,384) = 114\,688$$

La elevación a potencia se llevó a cabo utilizando una calculadora, también se puede hacer utilizando logaritmos.[2]

Ejemplo 3.13

Encuentre el número de términos que hay en la sucesión 5, 2, 4/5, . . . , 64/3125, . . .

Solución:

Se despeja n de la ecuación (3.3):

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\log a_n = \log a_1 + (n-1)\log r$$

$$\log a_n - \log a_1 = (n-1)\log r$$

$$\frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} = n - 1$$

Por tanto,

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

[2] Véase el capítulo 1.

Los datos a sustituir en la ecuación anterior son:

$$a_1 = 5$$
$$a_n = 64/3125$$
$$r = 2/5$$

Sustituyendo, se tiene

$$n = \frac{\log \frac{64}{3125} - \log 5}{\log \frac{2}{5}} + 1 = \frac{-1.688670048 - 0.698970004}{-0.397940008} + 1$$

$$n = 7 \text{ términos}$$

La suma de los términos de una sucesión geométrica se llama **serie geométrica**. A continuación, se procederá a deducir una fórmula para obtener la suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica.

Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ una sucesión geométrica cuya razón común es r, y sea

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Como:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 r$$
$$a_3 = a_1 r^2$$
$$a_4 = a_1 r^3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Entonces:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \tag{1}$$

Multiplicando por r ambos lados de la igualdad anterior,

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \ldots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \tag{2}$$

Restando la ecuación (2) de la (1), se obtiene

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n$$

Factorizando ambos lados de la igualdad anterior,

$$S_n(1 - r) = a_1(1 - r^n)$$

Despejando S_n,

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \tag{3.4}$$

Ejemplo 3.14

Encuentre la suma de los doce primeros términos de la sucesión geométrica 3, 9, 27, 81, . . .

Solución:

El primer término es 3 y la razón común también es 3. Sustituyendo en la ecuación (3.4) se obtiene

$$S_{12} = \frac{3(1 - 3^{12})}{1 - 3} = \frac{3(1 - 531\,441)}{-2} = 797\,160$$

Ejemplo 3.15

La suma de los seis primeros términos de una sucesión geométrica es 1 968.75. Si la razón común es 0.5, encuentre el primer término.

Solución:

Se despeja a_1 de la ecuación (3.4):

$$a_1 = \frac{S_n(1 - r)}{1 - r^n}$$

Sustituyendo los datos, se obtiene

$$a_1 = \frac{(1968.75)(1 - 0.5)}{1 - (0.5)^6} = \frac{984.375}{1 - 0.015625} - 1000$$

Ejemplo 3.16

Antonio acaba de ser contratado con un salario anual de $172 200. Si la empresa le prometió aumentos anuales de 8%, durante 10 años, ¿cuál será el salario de Antonio al inicio del sexto año?

Solución:

Al inicio del año 1 el sueldo es de $172 200.

Al inicio del año dos el sueldo será 8% más alto, esto es

$$172\,200 + (0.08)(172\,200) = 172\,200\,(1.08) = 185\,976$$

Al inicio del tercer año se tendrá un sueldo que es 8% más alto que el del año pasado, esto es

$$185\,976 + (0.08)(185\,976) = 185\,976\,(1.08) = 200\,854.08$$

Como se observa, los sueldos forman una sucesión geométrica cuya razón común es 1.08; por tanto, al inicio del año seis se tendrá un sueldo de

$$a_6 = (172\,200)(1.08^{6-1}) = (172\,200)(1.06^5) = 253\,018.29$$

Ejercicios 3.3

1. Indique cuáles de las siguientes sucesiones son geométricas, suponiendo que el patrón continúa.
   a) 1, 1.35, 1.8225, 2.460375, . . .
   b) 18, 21, 25, 30, . . .
   c) 3, 6, 12, 36, 108, . . .
   d) 75, 37.5, 18.75, 9.375, . . .

2. Encuentre el término número 66 de la sucesión geométrica 10, 9, 8.1, . . .

3. Encuentre el término número 100 de la sucesión $-1/32$, $1/16$, $-1/8$, $1/4$, . . .

4. Calcule el octavo término y la suma de los ocho primeros términos de la sucesión 6, 24, 96, . . .

5. Calcule la suma de los primeros 10 términos de la sucesión
$$1, \frac{1}{1.05}, \frac{1}{(1.05)^2}, \frac{1}{(1.05)^3}, \ldots$$

6. Encuentre la suma de los primeros veinte términos de la siguiente serie geométrica: $5 - 15/4 + 45/16 - 135/64 + \ldots$

7. ¿Cuántos términos hay en cada una de las siguientes sucesiones?
   a) 2, 3, 4.5, . . . , 389.2390137
   b) 1/3, 1, 3, 9, . . . , 59 049

8. La sucesión geométrica 1, . . . , 14 348 907 consta de 16 términos; calcule la razón común.

9. Encuentre la suma de los primeros 7 términos de la siguiente sucesión geométrica: 1/8, . . . , 8.

10. El décimo término y la razón común de una sucesión geométrica son 1 536 y 2, respectivamente. Encuentre el primer término.

11. El cuarto término de una sucesión geométrica es 4 y el séptimo término es 32. Calcule S_{10}.

12. Al construir un edificio se estima que el costo de cada piso es 1.42 veces el costo del piso anterior. Si la planta baja de un edificio destinado a oficinas se estima en $2 150 000, ¿cuál será el costo total del edificio, que tendrá 4 pisos?

13. El gerente de una empresa realizó 30 depósitos cada mes en una cuenta de ahorros, el primero por $20 000, el segundo por $22 000, el tercero por $24 200, el cuarto por $26 620, y así sucesivamente. ¿Cuánto depositó en total?

14. Si se coloca $1 en el primer cuadro de un tablero de ajedrez, $2 en el segundo cuadro, $4 en el tercero, $8 en el cuarto y así sucesivamente, duplicando cada vez la cantidad hasta cubrir los 64 cuadros, ¿cuánto dinero se tendrá que colocar en todo el tablero? (Vea el tema especial "Leyenda sobre el tablero del ajedrez".)

15. La población de Canadá a fines del 2002 era de 31.3 millones de personas, con una tasa media de crecimiento de 0.8% anual. Suponiendo constante esta tasa de crecimiento demográfico, ¿cuál será la población estimada al final del 2006?

16. Las ganancias de una compañía han ido aumentando 10% anual en promedio entre 1995 y 2000. En el año 2000, las ganancias fueron de 7.6 millones de dólares. Suponiendo que la tasa de crecimiento continúe, encuentre las ganancias para el año 2007.

17. El precio de una cámara fotográfica desechable aumentó un cierto porcentaje el día primero de cada mes, durante todo el 2002. El primero de enero del 2002, la cámara costaba $97.50 y el primero de diciembre costaba $196.94. Calcule el porcentaje de incremento mensual.

18. La población de una ciudad aumenta de 230 000 a 295 000 habitantes en 5 años. ¿Cuál es el porcentaje anual promedio de crecimiento?

19. La circulación de un periódico está creciendo a razón de 4% cada mes. Si la circulación actual es de 204 000 ejemplares por día, ¿en cuánto tiempo se tendrá una circulación de 300 000 ejemplares por día?

20. La exportación de sarapes de Teocaltiche, Jalisco, hacia Estados Unidos, fue de 54 600 sarapes en el año 2000 y de 87 450 en el 2003. ¿Qué cantidad de sarapes se estarán exportando en el año 2007, si se mantiene la tasa de crecimiento anual?

Tema especial

Leyenda sobre el tablero del ajedrez[3]

El ajedrez es un juego antiquísimo, cuenta con muchos siglos de existencia y por eso no es extraño que estén ligadas a él leyendas cuya veracidad es difícil de comprobar debido a su antigüedad. Precisamente quiero contar una de éstas. Para comprenderla no hace falta saber jugar al ajedrez; basta simplemente saber que el tablero donde se juega está dividido en 64 casillas, 32 blancas alternadas con 32 negras.

El juego del ajedrez fue inventado en la India. Cuando el rey hindú Sheram lo conoció, quedó maravillado de lo ingenioso que era y de la variedad de posiciones que son posibles. Al enterarse de que el inventor era uno de sus súbditos el rey lo mandó llamar con objeto de recompensarle personalmente por su acertado invento.

El inventor llamado Seta, se presentó ante el soberano; era un sabio vestido con modestia que vivía gracias a los medios que le proporcionaban sus discípulos.

—Seta, quiero recompensarte dignamente por el ingenioso juego que has inventado —dijo el rey.

El sabio contestó con una inclinación.

—Soy bastante rico como para poder cumplir tu deseo más elevado —continuó diciendo el rey. Di la recompensa que te satisfaga y la recibirás.

Seta continuó callado.

—No seas tímido —le animó el rey. Expresa tu deseo, no escatimaré nada para satisfacerlo.

—Grande es tu magnanimidad, soberano. Pero concédeme un corto plazo para meditar la respuesta. Mañana, tras maduras reflexiones, te comunicaré mi petición.

Cuando al día siguiente Seta se presentó de nuevo ante el trono, dejó maravillado al rey con su petición sin precedente por su modestia.

—Soberano —dijo Seta—, manda que me entreguen un grano de trigo por la primera casilla del tablero del ajedrez.

—¿Un simple grano de trigo? —contestó admirado el rey.

—Si, soberano; por la segunda casilla, ordena que me den dos granos; por la tercera, 4; por la cuarta, 8; por la quinta, 16; por la sexta, 32. . .

—Basta —le interrumpió irritado el rey—. Recibirás el trigo correspondiente a las 64 casillas del tablero de acuerdo con tu deseo; por cada casilla doble cantidad que por la precedente; pero has de saber que tu petición es indigna de mi generosidad, al pedirme tan mísera recompensa menosprecias

[3] Tomado del libro *Matemáticas Recreativas* de Yákov Perelmán. Editorial Mir, Moscú, 1982.

irreverente mi benevolencia. En verdad que, como sabio que eres, deberías haber dado mayor prueba de respeto ante la bondad de tu soberano. Retírate; mis servidores te sacarán un saco con el trigo que solicitas.

Seta sonrió, abandonó la sala y quedó esperando a la puerta del palacio.

Durante la comida el rey se acordó del inventor del ajedrez y envió para que le enteraran de si habían entregado ya al irreflexivo Seta su mezquina recompensa.

—Soberano, tu orden se está cumpliendo —fue la respuesta. Los matemáticos de la corte calculan el número de granos que le corresponden.

El rey frunció el ceño. No estaba acostumbrado a que tardaran tanto en cumplir sus órdenes. Por la noche, al retirarse a descansar, el rey preguntó de nuevo cuánto tiempo hacía que Seta había abandonado el palacio con su saco de trigo.

—Soberano —le contestaron—, tus matemáticos trabajan sin descanso y esperan terminar los cálculos al amanecer.

—¿Por qué va tan despacio este asunto? —gritó iracundo el rey. Que mañana antes de que me despierte hayan entregado a Seta hasta el último grano de trigo. No acostumbro a dar dos veces una misma orden.

Por la mañana comunicaron al rey que el matemático mayor de la corte solicitaba audiencia para presentarle un informe muy importante. El rey mandó que le hicieran entrar.

—Antes de comenzar tu informe —le dijo Sheram—, quiero saber si se ha entregado por fin a Seta la mísera recompensa que ha solicitado.

—Precisamente para eso me he atrevido a presentarme tan temprano —contestó el anciano. Hemos calculado escrupulosamente la cantidad total de granos que desea recibir Seta. Resulta una cifra tan enorme. . .

—Sea cual fuere su magnitud —le interrumpió con altivez el rey— mis graneros no empobrecerán. He prometido darle esa recompensa y, por tanto, hay que entregársela.

—Soberano, no depende de tu voluntad cumplir semejante deseo, en todos tus graneros no existe la cantidad de trigo que exige Seta; tampoco existe en los graneros de todo el reino, hasta los graneros del mundo entero son insuficientes. Si deseas entregar sin falta la recompensa prometida, ordena que todos los reinos de la Tierra se conviertan en labrantíos, manda desecar los mares y océanos, ordena fundir el hielo y la nieve que cubren los lejanos desiertos del Norte, que todo el espacio sea totalmente sembrado de trigo y ordena que toda la cosecha obtenida en estos campos sea entregada a Seta; sólo entonces recibirá su recompensa.

El rey escuchaba lleno de asombro las palabras del anciano sabio.

—Dime, cuál es esa cifra tan monstruosa —dijo reflexionando.

—¡Oh, soberano! Dieciocho trillones cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones setenta y tres mil setecientos nueve millones quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince (18 446 744 073 709 551 615).

Esta es la leyenda. No podemos asegurar que haya sucedido en realidad lo que hemos contado; sin embargo, la recompensa de que habla la leyenda debe expresarse por ese número; de ello pueden convencerse haciendo ustedes mismos el cálculo. Si se comienza por la unidad hay que sumar las siguientes cifras: 1, 2, 4, 8, etc., el resultado obtenido tras 63 duplicaciones sucesivas nos mostrará la cantidad correspondiente a la casilla 64, que deberá recibir el inventor.

Para hacernos una idea de la inmensidad de esta cifra, calculemos aproximadamente la magnitud que debería tener el granero capaz de almacenar semejante cantidad de trigo. Es sabido que un metro cúbico de trigo contiene cerca de 15 millones de granos. En ese caso, la recompensa del inventor del ajedrez debería ocupar un volumen aproximado de 12 000 000 000 000 m^3, o lo que es lo mismo, 12 000 km^3. Si el granero tuviera 4 m de alto y 10 m de ancho, su longitud debería de ser de 300 000 000 km, o sea, el doble de la distancia que separa la Tierra del Sol.

El rey hindú, naturalmente no podía entregar semejante recompensa. Sin embargo, con un conocimiento sólido en matemáticas, hubiera podido librarse de esta deuda tan gravosa; para ello le habría bastado simplemente proponer a Seta que él mismo contara, grano a grano el trigo que le correspondía.

Efectivamente, si Seta, puesto a contar, hubiera trabajado día y noche contando un grano por segundo en el primer día habría contado 86 400 granos, para contar un millón de granos habría necesitado como mínimo 10 días de continuo trabajo; un metro cúbico de trigo lo habría contado aproximadamente en medio año. Por consiguiente, aunque Seta hubiera consagrado el resto de su vida a contar los granos de trigo que le correspondían habría recibido sólo una parte ínfima de la recompensa exigida.

CAPÍTULO

4

Interés simple y descuento simple

El interés es el perfume del capital
Voltaire (1694-1778)
ESCRITOR FRANCÉS

Objetivos

Al finalizar el estudio de este capítulo el alumno podrá:

- Entender el concepto de valor del dinero en el tiempo.
- Explicar los conceptos de interés, interés simple, monto, valor presente, amortización y descuento.
- Plantear y resolver problemas de interés simple, descuento y amortización de deudas utilizando el interés simple.

4.1 Interés simple

Cuando una persona utiliza un bien que no le pertenece, por lo general debe pagar una renta por el uso de dicho bien. Las cosas que se pueden rentar son innumerables: casas, automóviles, salones para eventos sociales, ropa de ceremonia, computadoras, etcétera. El dinero no es la excepción, ya que se trata de un bien que se puede comprar, vender y, por supuesto, prestar. Cuando se pide dinero prestado, por lo general, se debe pagar una renta por su uso. En este caso la renta recibe el nombre de **interés**, **intereses** o **rédito**. El interés se define como *el dinero que se paga por el uso del dinero ajeno*. También se puede decir que el interés es *el rendimiento que se tiene al invertir en forma productiva el dinero*. El interés se simboliza mediante la letra I.

La cantidad de dinero tomada en préstamo o invertida se llama **capital** o **principal**, y se simboliza mediante la letra P. El **monto** o **valor futuro** se define como la suma del capital más el interés ganado, y se simboliza mediante la letra M. Por tanto,

$$M = P + I \tag{4.1}$$

Ejemplo 4.1

Alicia obtiene un préstamo de $5 000 y se compromete a devolverlo al cabo de un mes, pagando $138 de intereses. ¿Qué monto deberá pagar?

Solución:

De acuerdo con la ecuación (4.1), Alicia deberá pagar

$$M = 5\,000 + 138 = \$5\,138$$

Ejemplo 4.2

Carlos pidió prestado $8 500 y deberá pagar un total de $8 925 al cabo de 2 meses con el fin de saldar la deuda. ¿Cuánto está pagando de intereses?

Solución:

Al despejar interés de la ecuación (4.1) se tiene

$$I = M - P$$

El monto a pagar es $8 925, por tanto, el interés que debe pagar Carlos por el uso del capital obtenido en préstamo es

$$I = 8\,925 - 8\,500 = \$425$$

La **tasa de interés** indica el costo que representa obtener dinero en préstamo y se expresa como un porcentaje del capital por unidad de tiempo. La unidad de tiempo normalmente utilizada para expresar las tasas de interés es de un año. Sin embargo, las tasas de interés se expresan también en unidades de tiempo menores de un año. Si la tasa de interés se da sólo como un porcentaje, sin especificar la unidad de tiempo, se sobreentiende que se trata de una tasa anual. La tasa de interés se simboliza mediante la letra ***i***.

Ejemplo 4.3

¿Qué significa una tasa de interés de,

a) 31%?
b) 2.4% mensual?

Solución:

a) 31% quiere decir 31% anual y significa que por cada $100 prestados, el deudor pagará $31 de interés en un año.

b) 2.4% mensual significa que por cada $100 prestados, el deudor pagará $2.40 de interés en un mes.

Debido a la evolución del mercado financiero del país, las tasas de interés, por lo general, no permanecen constantes, sino que son revisadas con frecuencia. Las tasas de interés aplicables a operaciones financieras y comerciales se fijan, en la mayoría de los casos, con base en una **tasa de referencia**. Las tasas de referencia comúnmente utilizadas en México son: **TIIE**, **CPP**, **CCP** y **Cetes**.

La **TIIE** es la **Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio** y se refiere a la tasa de interés que corresponde al punto de equilibrio entre las tasas de interés pasivas y activas que se determina a partir de la información de tasas de interés que los bancos presentan al Banco de México (Banxico). Las *tasas de interés activas* son las tasas de interés que las instituciones bancarias cobran por los distintos tipos de crédito a los usuarios de los mismos; las *tasas de interés pasivas* son las tasas de interés que las instituciones bancarias pagan a los ahorradores o inversionistas.

La TIIE, introducida por el Banco de México en marzo de 1995, es una tasa de interés a distintos plazos (28 días es el plazo más común) que se utiliza como tasa de referencia en transacciones e instrumentos financieros. La TIIE se calcula diariamente con cotizaciones proporcionadas a las 12:00 PM, hora de la ciudad de México, por no menos de seis bancos. Las tasas sometidas son los precios reales que las instituciones bancarias están dispuestas a prestar o a pedir prestado al Banco de México. Este usa una fórmula con las tasas sometidas, que da como resultado una tasa equilibrada.

El **CPP** es el **Costo Porcentual Promedio de Captación** y mide el costo al cual se fondean los bancos para cubrir sus pasivos. Es el promedio ponderado del costo de captación del sistema bancario, por tanto, no incluye el costo de los recursos captados vía mesas de dinero u otros instrumentos bursátiles. El cálculo del CPP lo realiza el Banco de México desde agosto de 1975 y lo publica alrededor del día 20 de cada mes, en el Diario Oficial de la Federación. Como el CPP es una tasa oficial, no está sujeta a negociación de los clientes. La publicación del CPP continuará hasta diciembre del año 2005.

Con el fin de reflejar la existencia de nuevos instrumentos en el mercado financiero mexicano, el Banco de México inició el 13 de febrero de 1996 la estimación mensual del **Costo de Captación a Plazo (CCP)** por concepto de tasa de interés de los pasivos a plazo en moneda nacional a cargo de las instituciones de banca múltiple. El CCP puede utilizarse como referencia para determinar la tasa de interés de créditos denominados en pesos. El Banco de México publica el CCP en el Diario Oficial de la Federación entre los días 21 y 25 de cada mes. El CCP sustituye al CPP.

El lector interesado en ampliar estos temas, puede visitar la página Web del Banco de México: www.banxico.gob.mx

La tasa de interés de los **Cetes (Certificados de la Tesorería de la Federación)** a un plazo de 28 días en muchas ocasiones se utiliza como tasa de referencia.

Las tasas de interés que se utilizarán en los cálculos por parte de las instituciones financieras y comerciales se determinan, en la mayoría de los casos, sumando **puntos porcentuales** a las tasas de referencia.

Ejemplo 4.4

Suponga que la tasa de interés aplicable a los clientes que compran a crédito en cierta tienda departamental es igual a la TIIE más 20 puntos porcentuales. Si la TIIE es de 10.14% anual, obtenga la tasa de interés aplicable.

Solución:

La tasa de interés aplicable a los clientes se obtiene simplemente sumando los puntos porcentuales a la tasa de referencia. Esto es,

$$\text{Tasa de interés} = i = 10.14 + 20 = 30.14\% \text{ anual}$$

Existen dos tipos de interés: **simple** y **compuesto**. El interés simple se estudiará en el presente capítulo; el interés compuesto en el capítulo cinco.

El interés es simple cuando se paga al final de un intervalo de tiempo previamente definido, sin que el capital original varíe. Lo anterior significa que el interés no forma parte del capital originalmente prestado o invertido en ningún momento, esto es, los intereses no ganan intereses. El interés simple se usa principalmente en inversiones y créditos a corto plazo, de un año o menos. El interés a pagar por una deuda, o el que se va a cobrar de una inversión, depende de la cantidad de dinero tomada en préstamo o invertida y del tiempo que dure el préstamo o la inversión. En otras palabras, el interés simple varía en forma directamente proporcional al capital y al tiempo.

Suponga que se van a invertir \$20 000 a un plazo de 3 meses y a una tasa de interés de 1.5% mensual. De acuerdo al significado de tasa de interés, el interés que se cobrará por esta inversión será 1.5% de \$20 000 por cada mes que transcurra, es decir

$$1.5\% \text{ de } 20\,000 = (0.015)(20\,000) = \$300 \text{ cada mes}$$

Como la inversión es a 3 meses y el interés simple, por definición, se cobra al final del plazo, el interés total que se cobrará al final de los 3 meses será

$$I = (300)(3) = \$900$$

De lo anterior, es evidente que el interés simple se calcula por medio de la siguiente fórmula:

$$I = P\,i\,t \tag{4.2}$$

en donde I es el interés simple qúe se paga o recibe por un capital P y t es el tiempo transcurrido (plazo) durante el cual se usa o se invierte el capital. La tasa de interés es i.

Al utilizar la ecuación (4.2) se deben tener en cuenta dos aspectos básicos:

1. La tasa de interés se debe utilizar en forma decimal; es decir, sin el símbolo de porcentaje (véase el capítulo 2). Recuerde que para convertir un porcentaje a forma decimal, éste se divide entre 100.

2. La tasa de interés y el plazo deben expresarse en las mismas unidades de tiempo. Si en un problema determinado la unidad de tiempo asociada a la tasa de interés no coincide con la unidad de tiempo utilizada en el plazo, la tasa de interés, o el plazo, tiene que convertirse para que su unidad de tiempo coincida con la del otro. Así, por ejemplo, si en un problema determinado el plazo se expresa en meses, la tasa de interés deberá usarse en forma mensual. Asimismo, es importante repetir lo mencionado antes: si la tasa de interés se da sin especificar explícitamente la unidad de tiempo, entonces se trata de una tasa de interés anual.

Ejemplo 4.5

Rigoberto pidió prestado \$12 000 a pagar en 4 meses. Si la tasa de interés es de 36% anual simple, ¿qué cantidad deberá pagar por concepto de interés? ¿Cuál es el monto?

Solución:

Los datos son:
$P = \$12\,000$
$i = 36\%$ anual $= 0.36$ por año (expresado en forma decimal)
$t = 4$ meses

La unidad de tiempo de i y de t no coincide, por tanto, no es posible sustituir directamente en la fórmula (4.2) los valores numéricos. Antes de sustituir es necesario convertir la tasa de interés anual a una tasa de interés mensual, dividiendo entre 12:

$$i = 36\% \text{ anual} = \frac{36}{12} = 3\% \text{ mensual}$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (4.2), se obtiene

$$I = (12\,000)(0.03)(4) = \$1\,440$$

Lo anterior significa que al término de los 4 meses, Rigoberto deberá reembolsar el capital (\$12 000) más los intereses correspondientes (\$1 440); esto es, deberá pagar un monto de

$$M = 12\,000 + 1\,440 = \$13\,440$$

No es necesario llevar a cabo la conversión de tasa anual a tasa mensual antes de utilizar la fórmula; se puede convertir la tasa de interés al mismo tiempo que se sustituyen los datos en la fórmula, esto es:

$$I = (12\,000)\left(\frac{0.36}{12}\right)(4) = \$1\,440$$

Ejemplo 4.6

Marcela posee un capital de \$60 000. Invierte 70% de su capital a 3.6% trimestral y el resto a 5.1% semestral. ¿Cuánto recibe cada mes de interés total?

Solución:

Como el tiempo se da en meses, es necesario convertir las tasas de interés a forma mensual:

$$i = 3.6\% \text{ trimestral} = \frac{3.6}{3} = 1.2\% \text{ mensual}$$

$$i = 5.1\% \text{ semestral} = \frac{5.1}{6} = 0.85\% \text{ mensual}$$

El 70% de \$60 000 son \$42 000 y el resto (30%) son \$18 000. Al invertir \$42 000 al 3.6% trimestral (1.2% mensual), durante un mes, el interés ganado es

$$I = (42\,000)(0.012)(1) = \$504$$

El interés mensual de \$18 000 invertidos a 5.1% semestral (0.85% mensual) es

$$I = (18\,000)(0.0085)(1) = \$153$$

El interés total obtenido al cabo de un mes es de 504 + 153 = \$657.

Si la ecuación (4.2) se sustituye en la (4.1) se obtiene una forma alterna para el cálculo del monto o valor futuro de un capital P:

$$M = P + I = P + P\,i\,t$$

Factorizando la expresión anterior, se tiene

$$M = P(1 + it) \qquad (4.3)$$

Ejemplo 4.7

Ramón tiene una deuda por \$20 000 que debe pagar dentro de 12 quincenas. Si la operación fue pactada a una tasa de interés simple igual a la TIIE vigente al inicio del préstamo más 16 puntos porcentuales, ¿cuánto deberá pagar para saldar su deuda, sabiendo que la TIIE es igual a 11.2%?

Solución:

La tasa de interés aplicable a la deuda es:

$$i = 11.2 + 16 = 27.2\% \text{ anual}$$

Al sustituir los datos en la ecuación (4.3), se tiene

$$M = 20\,000\left[1 + \left(\frac{0.272}{24}\right)(12)\right] = \$22720$$

Observe cómo la tasa de interés anual se cambió a tasa de interés quincenal.

Otra forma de resolver el problema sería cambiando el plazo y la tasa de interés a meses. Sabiendo que 12 quincenas son 6 meses, entonces

$$M = 20\,000\left[1 + \left(\frac{0.272}{12}\right)(6)\right] = \$22720$$

Ejemplo 4.8

¿En cuánto tiempo se duplicará una cierta cantidad de dinero, si se invierte a 20% de interés simple?

Solución:

Sea x la cantidad de dinero que se invierte. Como el dinero se va a duplicar, entonces el monto será $2x$. Despejando t de la ecuación (4.3), se tiene

$$M = P(1 + it)$$

$$M = P + Pit$$

$$M - P = Pit$$

$$t = \frac{M - P}{Pi}$$

Sustituyendo,

$$t = \frac{2x - x}{(x)(0.20)} = \frac{x}{0.20x} = \frac{1}{0.20} = 5 \text{ años}$$

Ejemplo 4.9

Sofía compra un televisor que cuesta \$3 750 de contado. Da un anticipo de 10% del precio de contado y acuerda pagar \$3 712.50 tres meses después. ¿Qué tasa de interés simple anual paga?

Solución:

Enganche = 10% de 3 750 = \$375

Saldo a pagar[1] = 3 750 − 375 = \$3 375

Intereses = 3 712.50 − 3 375 = \$337.50

Se despeja i de la ecuación (4.2):

$$i = \frac{I}{Pt} = \frac{337.50}{(3\,375)(3)} = 0.033333333 \text{ por mes} = 3.333333333\% \text{ mensual}$$

Para convertir la tasa de interés mensual a tasa de interés anual, el resultado anterior se multiplica por 12:

$$i = (3.333333333)(12) = 40\% \text{ anual}$$

[1] El saldo a pagar es el capital que se queda a deber, el cual será cubierto, con sus correspondientes intereses, dentro de 3 meses.

Tema especial

Poderoso caballero: Don Dinero[2]

Desde el siglo I a. de J.C. circulaba entre los romanos como dicho corriente esta gran verdad: "El dinero mueve al mundo." La historia de este "poderoso caballero", como lo llamó el poeta español don Francisco de Quevedo en una conocida letrilla, es muy antigua, y a través de ella ha tomado las más diversas formas: plumas, conchas de nácar, colmillos de jabalí, ruedas de piedra, etc. (Entre los pueblos prehispánicos, el cacao, canutillos de plumas de ave rellenas de polvo de oro, mantas de algodón o de henequén, objetos de jade, piezas de cobre, etcétera).

En la antigüedad y durante siglos el ganado se aceptó como pago; pecuniario deriva de pecunia, dinero, y éste a su vez, de pecus, ganado. Otra etimología reveladora es la de la palabra salario: deriva de salarium, se llamaba así el pago que recibían los soldados romanos para comprar sal.

Entre gran parte de las comunidades primitivas, existía el trueque o permuta como único medio de comercio, y fue, según los entendidos, en el siglo VII a. de J.C. cuando empezaron a aparecer las primeras monedas. En general, éstas eran trozos o tiras de metal que podían partirse y pesarse, pero poco a poco se fueron perfeccionando, y ya en el siglo V a. de J.C. la moneda griega circulaba por todo el Mediterráneo y el Medio Oriente, las formas y modos de acuñación fueron adoptados después por los romanos.

En México, como en toda América, los españoles introdujeron el uso de la moneda, y las que traían consigo, del tiempo de los Reyes Católicos y de Carlos V, fueron las primeras que circularon entre nosotros. Don Antonio de Mendoza, primer virrey de la Nueva España, logró el permiso para establecer una casa de moneda, que empezó a trabajar en 1536. Desde entonces hasta 1821, cuando se consumó la Independencia nacional, se acuñaron monedas bajo casi todos los reinados, tanto de los de Austria como de los Borbones, y al estallar la Guerra de Independencia se establecieron varias casas de moneda provisionales, que, una vez consumada aquélla, llegaron a funcionar hasta en número de 14, entre ellas las de Durango, Guadalajara, Guanajuato y Zacatecas. Durante estos siglos México exportó gran cantidad de plata acuñada, principalmente a Oriente, y el "peso mexicano" o moneda de "ocho reales" llegó a ser en China y Filipinas no sólo de uso corriente, sino que se le consideraba la más firme, la más cotizada, la más estable.

En épocas de turbulencia, de las que hubo muchas en México durante el siglo XIX, con los constantes ascensos y descensos al poder de Antonio

[2] Tomado del libro *Usted y la Ley*. Guía Legal Familiar. Editado por Selecciones del Reader's Digest.

López de Santa Anna, y luego la Guerra de Reforma, la Intervención Francesa y el Imperio, la moneda mexicana conservó su solidez y prestigio. Durante los años de la Revolución, iniciada en 1910, circularon en todo el país monedas provisionales de las más diversas calidades y garantías, y abundó el papel moneda de filiación villista, carrancista, convencionista, zapatista, etc. a los que el pueblo llamaba bilimbiques.

Concluida la lucha armada, a partir de 1921, se regulariza la acuñación y circulación de nuestra moneda, y junto con las piezas de oro, plata y cobre circulan billetes de diversas denominaciones.

A partir de entonces, suprimido desde luego el patrón oro, ha venido predominando el papel moneda.

Ejercicios 4.1

1. Suponga que recibió un préstamo y al final de 4 meses debe pagar un monto de \$19 600. Si el interés fue de \$1 200, ¿qué capital le prestaron?
2. En cierto banco, la tasa de interés aplicable a los préstamos personales es igual a la TIIE vigente en el momento en que se efectúa el préstamo más 14 puntos porcentuales. Si la TIIE es de 9.78% anual, ¿cuál es la tasa de interés aplicable?
3. ¿Cuánto pagará un comerciante por un crédito que le concedió una fábrica de dulces y chocolates, al comprar mercancía por \$7 890 a un mes de plazo, si le cargan una tasa de interés de 3.12% mensual?
4. Obtenga el interés simple que produce un capital de \$5 000 en 10 meses a 2.5% bimestral.
5. Calcule el interés simple de \$13 500 a 4.25% trimestral durante un año y tres meses.
6. Obtenga el valor futuro de \$1 000 a 1.61% quincenal en 11 meses.
7. Alfonso consigue un préstamo por \$75 000 a un año y medio de plazo y una tasa de interés simple de 2.97% mensual. ¿Cuánto pagará al final del plazo por el préstamo recibido? ¿Cuánto pagará por concepto de intereses?
8. Un empleado obtiene un préstamo de su empresa por \$97 000, para la compra de un auto usado y acepta liquidar el préstamo tres años después. Existe el acuerdo que mientras exista la deuda, el empleado

pagará intereses mensuales a razón de 18% anual. ¿Cuánto deberá pagar de intereses cada mes?

9. Si se solicita un préstamo por $7 000 a 19.92% semestral de interés simple, ¿cuánto se debe pagar por concepto de intereses al término de 15 meses? ¿Cuál es el valor del monto?

10. Rubén compra a crédito una estufa que tiene un precio de contado de $4 765. Queda de acuerdo en dar un enganche de 15% y un pago final 2 meses más tarde. Si acepta pagar una tasa de interés de 48% sobre el saldo, ¿cuánto deberá pagar dentro de 2 meses?

11. Jorge le prestó dinero a Edgar, para reparar su automóvil. Edgar está de acuerdo en que se le cobre una tasa de interés igual a la TIIE que se tenga al momento de liquidar la deuda. Después de 3 meses, Edgar le pagó a Jorge un monto de $17 164.70. ¿Cuánto le prestó Jorge, sabiendo que la TIIE fue de 11.13 %?

12. Una persona obtiene $3 000 cada trimestre por concepto de intereses de una inversión a 10%. ¿Qué capital tiene invertido esta persona?

13. Calcule el saldo promedio durante julio de una cuenta de cheques, si el primero de agosto se le abonó un interés de $76.38 y la tasa de interés que pagó el banco en ese mes fue de 4.3% anual.

14. El interés ganado por un préstamo de 800 dólares, en un plazo de 5 meses, fue de 20 dólares. Calcule la tasa de interés anual.

15. ¿A qué tasa de interés simple mensual equivale una tasa de interés simple de 18% cuatrimestral?

16. Un capital invertido se triplicó al cabo de 8 años. ¿Qué tasa de interés simple anual ganó?

17. Ana posee un capital de $200 000. Invierte 75% del dinero a 2% trimestral y el resto a 3.5% semestral. ¿Cuánto recibe cada mes de intereses?

18. Una empresa contrató un crédito por $1 000 000 a pagar dentro de un año. Si el monto fue de $1 170 000, ¿cuál fue la tasa de interés anual?

19. Dos mil pesos prestados a 3.58% mensual ganaron un interés de $501.67. Calcule el plazo.

20. Si la tasa de interés simple en una cuenta de ahorros es de 3.4% anual, ¿en cuánto tiempo se duplica un capital?

21. ¿Cuánto tiempo tarda un prestamista en tener $5 625 a partir de un capital de $4 500 si se aplica una tasa de interés simple de 50%?

22. Patricia desea invertir 20 000 dólares en dos bancos, de manera que sus ingresos totales por concepto de intereses sean de 120 dólares al mes. Un banco paga 7.32% y el otro ofrece 2.32% cuatrimestral. ¿Cuánto debe invertir en cada banco?

23. Se van a invertir $40 000. Una parte a 10% semestral y el resto a 1.5% mensual. ¿Cuánto se debe invertir en cada tasa para que el interés trimestral total sea de $1 950?

24. Silvia posee un capital que invertido a 11% le produce un interés mensual de $797.50. Si se aumentó a 12% la tasa de interés, ¿qué cantidad debe retirar del capital para seguir cobrando el mismo interés mensual?

25. Una persona invierte un total de 100 000 dólares en bonos, papel comercial y en depósito a plazo fijo que le producen intereses de 10%, 13% y 7.5%, respectivamente. La cantidad invertida en papel comercial es el doble de la invertida en bonos. ¿Cuánto tiene en cada tipo de inversión si el interés total semestral es de 5 572.50 dólares?

4.2 Valor presente. Interés simple comercial y exacto

Suponga que el día de hoy recibe un préstamo de $40 000 a 10 meses de plazo y con una tasa de interés simple de 2.5% mensual. El monto de la deuda será:

$$M = 40000[1 + (0.025)(10)] = \$50000$$

Por el capital prestado deberá pagar $50 000 dentro de 10 meses. $50 000 son el monto o valor futuro de $40 000. Recíprocamente, se dice que $40 000 son el **valor presente** o **valor actual** de $50 000. Esto significa que $40 000 hoy son equivalentes a $50 000 dentro de 10 meses a una tasa de interés simple de 2.5% mensual.

Por tanto, $40 000 disponibles hoy valen más que $40 000 disponibles dentro de cualquier tiempo futuro, pues los $40 000 disponibles hoy pueden ser invertidos y de esta manera, ganar intereses.

Por lo anterior, vemos que un peso recibido en una fecha futura no tiene el mismo valor que un peso recibido el día de hoy; vale más un peso disponible hoy que un peso recibido en una fecha futura, ya que el peso gana intereses si se le invierte durante un periodo. Por otro lado, debido a la inflación, el dinero tiene un poder de compra que se va deteriorando a medida que transcurre el tiempo; por tanto, un peso hoy vale más que un peso en una fecha futura, ya que el peso hoy tiene un mayor poder de compra. Esta relación entre el tiempo, el interés y el poder de compra del dinero se conoce como el **valor del dinero en el tiempo** y constituye uno de los conceptos fundamentales de la matemática financiera.

Volviendo al concepto de valor presente, simbolizado por *VP*, podemos decir que el valor presente de un monto o valor futuro *M* que vence en fecha futura es la cantidad de dinero que, invertida hoy a una tasa de interés dada producirá el monto *M*.

Valor presente significa el valor del dinero en cualquier fecha conveniente, por tanto, no siempre coincide el valor presente con el capital originalmente prestado o invertido.

Ejemplo 4.10

Encuentre el valor presente de $16 000 que vencen dentro de 5 meses, si la tasa de interés es de 27.48%.

Solución:

Obtener el valor presente de una cantidad equivale a responder esta pregunta: ¿qué cantidad, invertida hoy a una tasa de interés dada, por un periodo determinado, producirá un monto conocido? Resulta obvio que el valor presente se calcula despejando *P* de la ecuación (4.3).

$$P = \frac{M}{1 + it} = VP$$

Sustituyendo,

$$VP = \frac{16\,000}{1 + \left(\frac{0.2748}{12}\right)(5)} = \$14\,356.21$$

$14 356.21 invertidos hoy, durante 5 meses, a 27.48%, se convertirán en $16 000. También se dice que $14 356.21 son equivalentes a $16 000 si el tiempo es de 5 meses y la tasa de interés es de 27.48% anual simple. Los $14 356.21 no necesariamente corresponden al capital original.

Cuando el tiempo en un préstamo está dado en días, es necesario convertir la tasa de interés anual a una tasa de interés por día. Cuando la tasa anual se convierte a tasa diaria utilizando el año natural (365 días o 366 si el año es bisiesto) como divisor en la fórmula del interés simple o del monto, el interés obtenido se llama **interés exacto**. Cuando se lleva a cabo la conversión utilizando como divisor el número 360, se dice que se está utilizando el **año comercial**. En este caso, el interés obtenido se llama **interés comercial** o **interés ordinario**.

Ejemplo 4.11

Calcule el interés comercial y exacto de un préstamo por \$18 300 a 35% a 48 días de plazo.

Solución:

Interés comercial

$$I = (18\,300)\left(\frac{0.35}{360}\right)(48) = \$854$$

Interés exacto

$$I = (18\,300)\left(\frac{0.35}{365}\right)(48) = \$842.30$$

Como se observa, el interés comercial resulta más elevado que el interés exacto para el mismo capital, tasa de interés y tiempo. Esta ganancia extra hace que el año comercial sea muy utilizado en los bancos, casas de bolsa y en comercios que venden a crédito.

El año comercial lo utilizan los bancos, casas de bolsa y comercios en, prácticamente, todas sus operaciones financieras. El año comercial se debe a una costumbre surgida entre los prestamistas de la Edad Media, que definieron el año comercial como formado de 12 meses de 30 días cada uno. La razón por la cual el año se definió de esta forma no está muy clara, pero parece que se debe al deseo de que los intereses calculados utilizando meses resulten idénticos al llevar a cabo el cálculo en días. Esto es, suponga que se desea calcular los intereses de \$15 000 prestados a 24% de interés simple por 3 meses. En este caso el interés sería:

$$I = (15\,000)\left(\frac{0.24}{12}\right)(3) = \$900$$

Si en vez de utilizar meses, el cálculo se realiza utilizando días (3 meses = 90 días) y año comercial, entonces:

$$I = (15\,000)\left(\frac{0.24}{360}\right)(90) = \$900$$

Si se empleara como divisor el 365 (año natural o civil), entonces los intereses resultan diferentes:

$$I = (15\,000)\left(\frac{0.24}{365}\right)(90) = \$887.67$$

El uso del año natural en los cálculos financieros prácticamente no se utiliza, al menos en México. En este libro se verán ejemplos y ejercicios con ambos tipos de interés; sin embargo, si el problema no menciona de manera explícita cuál interés debe calcularse, se supone que se trata del interés comercial.

En muchas ocasiones el periodo entre el momento en que se toma un préstamo o se invierte un determinado capital y su vencimiento, se indica mediante fechas. Para calcular el tiempo transcurrido entre dos fechas, se cuentan los días efectivos calendario. Al calcular el número de días se acostumbra excluir el primer día e incluir el último; sin embargo, ésta no es una práctica generalizada, ya que algunas veces se cuenta tanto el primer día como el último. En todos los problemas de este libro, a menos que se diga lo contrario, se excluirá el primer día. De esta forma, para un préstamo contraído el 25 de enero y liquidado el 26 de abril de un año cualquiera no bisiesto, el tiempo transcurrido es de 91 días:

Enero	6 días (31 − 25)
Febrero	28 días
Marzo	31 días
Abril	26 días
Total	**91 días**

Ejemplo 4.12

Calcule el interés ordinario y exacto de un préstamo por $6 850 a 27%, del 13 de septiembre al 12 de diciembre de un determinado año no bisiesto.

Solución:

Cálculo de los días transcurridos:

Septiembre	17 días (30 − 13)
Octubre	31 días
Noviembre	30 días
Diciembre	12 días
Total	**90 días**

Interés ordinario

$$I = (6\,850)\left(\frac{0.27}{360}\right)(90) = \$462.38$$

Interés exacto

$$I = (6\,850)\left(\frac{0.27}{365}\right)(90) = \$456.04$$

Ejemplo 4.13

En cierto banco, la tasa de interés neto para las cuentas de ahorro en el caso de las personas físicas es de 6.4% anual. El señor Águila abrió una cuenta de ahorros con $9 200 el día 3 de mayo del año 2000 (año bisiesto). No realizó depósitos ni retiros posteriores a la fecha de apertura de la cuenta, y el 29 de mayo del mismo año la canceló. ¿Cuánto dinero recibió el señor Águila? Utilice el año natural.

Solución:

Días transcurridos: 29 − 3 = 26 días

$$M = 9\,200\left[1+\left(\frac{0.064}{366}\right)(26)\right] = \$9\,241.83$$

Un **pagaré** es un documento mediante el cual una persona se obliga a pagar a otra una cantidad determinada de dinero, con interés o sin él, en una fecha dada. La persona que hace la promesa de pagar es el *deudor* u *otorgante*, y la persona que cobra el pagaré es el *beneficiario* o *tenedor*.

En todo pagaré intervienen los siguientes conceptos:

Fecha: es la fecha en la que se extiende el pagaré.

Fecha de Vencimiento: es la fecha en la cual se debe pagar la deuda.

Plazo: es el tiempo que transcurre entre la fecha en que se extiende el pagaré y la fecha de vencimiento.

Valor Nominal: es la cantidad marcada en el pagaré. Si en el pagaré se indica que el valor nominal causará intereses a determinada tasa, entonces el valor nominal es el capital obtenido en préstamo; en cambio, si en el pagaré se indica que el valor nominal incluye intereses a determinada tasa, el valor nominal es el monto a pagar en la fecha de vencimiento.

Valor de Vencimiento: es la cantidad que se debe pagar en la fecha de vencimiento. Esto es, el capital obtenido en préstamo más los intereses, si los hubiera.

En algunos pagarés no se especifica la tasa de interés, esto da lugar a una de dos situaciones: o bien el pagaré no produce intereses o los intereses ya han sido añadidos al capital, de tal manera que el documento muestra la cantidad total (monto) a pagar en la fecha de vencimiento.

Aunque existen diferentes diseños de pagarés, a continuación se muestra un pagaré típico.

PAGARÉ

Documento número: `Único` BUENO POR: `$12700.00`

En `Guadalajara, Jalisco` a `14` de `febrero` de `2003`

Debo(emos) y pagaré(mos) incondicionalmente por este Pagaré a la orden de `Sr. Armando Ibarra` en `Guadalajara, Jalisco` el día `26` de `diciembre del 2003.`

La cantidad de:

`Doce mil setecientos pesos 00/100 Moneda Nacional`

Valor recibido a mi(nuestra) entera satisfacción. La suma anterior causará intereses a la tasa de `30%` anual hasta la fecha de su vencimiento, y si no es pagada al vencimiento causará una tasa de interés moratorio de `45%` anual.

Nombre: `Antonio Solis`

Dirección: `Av. Einstein #60`

Población: `Guadalajara, Jalisco` Acepto(amos)

En este pagaré, Antonio Solis es el deudor; Armando Ibarra es el beneficiario; el valor nominal del documento es por $12700; 14 de febrero del 2003 es la fecha en que fue expedido el pagaré; 26 de diciembre del 2003 es la fecha de vencimiento. El plazo es de 315 días.

Ejemplo 4.14

Obtenga el valor de vencimiento del pagaré anterior.

Solución:

$$M = 12700\left[1 + \left(\frac{0.30}{360}\right)(315)\right] = \$16033.75$$

Cuando una deuda no se liquida en la fecha de vencimiento, empieza a ganar intereses llamados **moratorios**, los cuales se deben *calcular sobre el capital originalmente prestado* y no sobre el monto, ya que los intereses moratorios son interés simple. Es usual que la tasa de interés moratorio sea 50% más de la tasa normal aplicada, aunque ésta no es una regla general.

Ejemplo 4.15

Suponga que el pagaré anterior se liquidó 12 días después de la fecha de vencimiento. Calcule el interés moratorio y la cantidad total a pagar.

Solución:

$$\text{Interés moratorio} = (12700)\left(\frac{0.45}{360}\right)(12) = \$190.50$$

$$\text{Cantidad total a pagar} = \text{capital} + \text{intereses ordinarios} + \text{intereses moratorios}$$

$$\text{Cantidad total a pagar} = \text{monto} + \text{intereses moratorios}$$

$$\text{Cantidad total a pagar} = 16\,033.75 + 190.50 = \$16\,224.25$$

Tema especial

El interés y la usura

El pago de un interés por el uso de los bienes ajenos es tan antiguo como la humanidad misma. Así, en la Biblia se lee: "No prestarás con interés a tus hermanos, ni dinero, ni alimentos, ni cualquier otra cosa. Al extranjero podrás prestarle con interés, pero a tu hermano no, para que Yahvé, tu Dios, te bendiga en todas tus empresas, en la Tierra que vas a poseer."[3]

Antes de la invención del dinero, la riqueza de una persona se media únicamente en términos de posesiones como herramientas y rebaños de animales, y el interés se pagaba en especie. Con la aparición del dinero se desarrolla el crédito y el pago de intereses de una manera semejante a la actual. Sin embargo, no todo el mundo estaba de acuerdo con esto. Aristóteles señalaba que el dinero no podía procrear, y, por tanto, que el interés originado por el préstamo era contranatural. La Iglesia Católica, basándose en el Deuteronomio y en el pensamiento aristotélico, prohibía a los cristianos obtener algún beneficio con los préstamos de dinero. El Derecho Canónico, en la Edad Media, definía a la usura como todo préstamo de dinero con intereses, cualquiera que éstos fuesen, y se consideraba un pecado semejante al robo. Posteriormente, la Iglesia, quizás influenciada por el libro *La Riqueza de las Naciones* de Adam Smith, en el cual se justifica el interés desde el punto de vista económico, aceptó el cobro de algún interés que compense el riesgo de que el préstamo no sea devuelto, y la pér-

[3] Deuteronomio, 23, 19-20.

dida de las ganancias que de otra forma se habrían logrado si el dinero se hubiera invertido para fines productivos. Asimismo, se convino en considerar como usura sólo los préstamos hechos a una tasa de interés exorbitante.

En la actualidad el pago de intereses por el uso del crédito es algo común y corriente. El crédito lo utiliza la mayoría de la gente para realizar compras por encima de sus recursos monetarios presentes. De esta manera, el crédito hace posible que uno pueda disfrutar de más cosas, al mismo tiempo que se va pagando por ellas. El uso de la tarjeta de crédito ha vigorizado la compra en gran escala.

El crédito es algo esencial para nuestra economía actual, y el concepto de usura ha evolucionado, entendiendo por ésta cualquier préstamo hecho a una tasa de interés superior a la autorizada por las leyes.

Ejemplo 4.16

Alejandro Chávez firmó el 15 de octubre del 2002 el siguiente pagaré. Calcule,

a) La cantidad que pidió prestada el señor Chávez.
b) El valor presente del documento el 20 de diciembre del 2002.

P A G A R É

Documento número: Único BUENO POR: $34 979.38

En Zapopan, Jalisco a 15 de octubre de 2002

Debo(emos) y pagaré(mos) incondicionalmente por este Pagaré a la orden de Srita. Susana Gómez en Zapopan, Jalisco el día 15 de enero del 2003.

La cantidad de:

Treinta y cuatro mil novecientos setenta y nueve pesos 38/100 Moneda Nacional

Valor recibido a mi(nuestra) entera satisfacción. La suma anterior incluye intereses a la tasa de 26% anual hasta la fecha de su vencimiento, y si no es pagada al vencimiento causará una tasa de interés moratorio de 52% anual.

Nombre: Alejandro Chávez

Dirección: Calle Euler #12-B

Población: Zapopan, Jalisco Acepto(amos)

Solución:

Este pagaré, a diferencia del anterior, muestra un valor nominal igual al valor de vencimiento o monto, ya que la cantidad mostrada incluye los intereses.

a) Del 15 de octubre del 2002 al 15 de enero del 2003, hay 92 días. Por tanto,

$$P = \frac{34\,979.38}{1 + \left(\frac{0.26}{360}\right)(92)} = \$32\,800$$

b) Del 20 de diciembre del 2002 al 15 de enero del 2003, hay 26 días. Por tanto,

$$VP = \frac{34\,979.38}{1 + \left(\frac{0.26}{360}\right)(26)} = \$34\,334.65$$

Ejemplo 4.17

¿Cuánto tiempo tardará un préstamo de $9000 para producir $450 de interés simple, si la tasa de interés es de 40%?

Solución:

Se despeja t de la ecuación (4.2):

$$t = \frac{I}{Pi} = \frac{450}{(9\,000)(0.40)}$$

$$t = 0.125 \text{ años}$$

Para convertir la fracción de año a días, se multiplica por 360:

$$t = (0.125)(360) = 45 \text{ días}$$

Ejemplo 4.18

¿Cuál es el precio de contado de un teléfono celular que se paga dando un enganche de 10% del precio de contado y se firma un pagaré a 2 meses por $1754.47 que incluye intereses a una tasa de 39.15% anual?

Solución:

En primer lugar se obtiene el valor presente del pagaré, el cual representa la cantidad que se queda a deber después de pagar el enganche, esto es, el *saldo a pagar*.

$$VP = \frac{1754.47}{1 + \left(\frac{0.3915}{12}\right)(2)} = \$1647$$

Si PC es el precio de contado del teléfono, entonces se tiene

$$PC - \text{enganche} = \text{saldo a pagar}$$

Esto es,

$$PC - 10\% \text{ de } PC = 1647$$

$$PC - 0.10\,PC = 1647$$

$$0.90\,PC = 1647$$

Por tanto,

$$PC = \frac{1647}{0.90} = \$1830$$

Ejemplo 4.19

Jaime firmó el 8 de enero del 2003 el pagaré de la página siguiente y 20 días antes de su vencimiento (el 19 de marzo) decide saldar la deuda. Calcule la cantidad que deberá pagar. Utilice año natural.

Solución:

Si Jaime pagara en la fecha de vencimiento (8 de abril del 2003) tendría que pagar \$10 680, pero como decide liquidar de manera anticipada su deuda, tiene derecho a la consiguiente reducción de intereses. La cantidad a pagar es, simplemente, el valor presente del documento 20 días antes de su vencimiento.

$$VP = \frac{10\,680}{1 + \left(\frac{0.335}{365}\right)(20)} = \$10\,487.49$$

El proceso de pagar anticipadamente un pagaré, como se muestra en el ejemplo 4.19, recibe el nombre de **descuento racional**. El nombre se debe porque se lleva

P A G A R É

Documento número: Único BUENO POR: $10 680.00

En Zapopan, Jalisco a 08 de enero de 2003

Debo(emos) y pagaré(mos) incondicionalmente por este Pagaré a la orden de Mueblería El Roble, S.A. en Zapopan, Jalisco el día 08 de abril del 2003.

La cantidad de:

Diez mil seiscientos ochenta pesos 00/100 Moneda Nacional

Valor recibido a mi(nuestra) entera satisfacción. La suma anterior incluye intereses a la tasa de 33.5% anual hasta la fecha de su vencimiento, y si no es pagada al vencimiento causará una tasa de interés moratorio de 50.25% anual.

Nombre: Jaime H. Torres

Dirección: Calle A. Avogadro #89-012

Población: León, Guanajuato Acepto(amos)

a cabo el *descuento* de los intereses correspondientes a los días que faltan para que venza el documento.

La tasa de interés aplicable al descuento racional puede ser la tasa original o bien, aplicar una tasa de interés vigente en el mercado financiero al momento de llevar a cabo el proceso de descuento.

Ejemplo 4.20

Saúl compró un automóvil usado en una agencia automotriz, y el vendedor le dio a elegir entre dos formas de pago:

- $130 000 de contado, o
- Dar un pago inicial de 20% sobre el precio de contado y firmar un pagaré a 90 días por $108 498.

Saúl dispone del dinero para pagar de contado, pero piensa que es mejor pagar de acuerdo a la segunda opción y, mientras se cumple el plazo, invertir el dinero que sobra después de hacer el pago inicial, en una Sociedad de Inversión a 90 días de plazo que le da 9.65% anual de interés simple. ¿Qué forma de pago resulta más ventajosa para Saúl?

Solución:

Debido a que el dinero tiene un valor que depende del tiempo, una unidad monetaria (peso, dólar, etc.), en una fecha, no es directamente comparable con la misma unidad monetaria en otra fecha. Por tal motivo, las dos alternativas de pago no se pueden comparar tal y como se expresan en el enunciado, pues se refieren a momentos diferentes.

A continuación se muestran dos formas de resolver el problema.

Método 1

Saúl da un pago inicial de $26 000 y le queda $104 000 para invertir. El valor futuro de esta inversión es:

$$M = 104\,000\left[1+\left(\frac{0.0965}{360}\right)(90)\right] = \$106\,509$$

Pasados los 90 días, Saúl recibirá $106 509. Esto significa que le harán falta $1989 para completar los $108 498. Por tanto, le conviene pagar de contado y ahorrarse $1989.

Método 2

Se comparan los valores presentes de las cantidades asociadas a las alternativas. El valor presente de $108 498 es:

$$VP = \frac{108\,498}{1+\left(\frac{0.0965}{360}\right)(90)} = \$105\,942.15$$

Esto significa que Saúl tendría que invertir $105 942.15 en el momento actual para obtener $108 498 dentro de 90 días. Pero Saúl dispone de sólo $104 000 en el momento actual; le faltan $1 942.15. De nuevo, es evidente que le conviene pagar de contado y ahorrarse $1 942.15.

Si hubiera algún tipo de inversión con una tasa de interés más alta, la decisión sería otra.

Nota: La diferencia en las cantidades ahorradas en uno y otro método se debe a lo siguiente: $1989 es el ahorro dentro de 90 días; mientras que $1 942.15 es la cantidad ahorrada en el momento actual. En otras palabras, $1989 son el valor futuro de $1 942.15 a 9.65% de interés simple y 90 días de plazo:

$$M = 1942.15\left[1+\left(\frac{0.0965}{360}\right)(90)\right] = \$1989$$

Ejercicios 4.2

1. Obtenga el interés simple ordinario y exacto de 17 000 dólares, del 4 de enero al 21 de agosto de un año bisiesto. La tasa de interés es de 5.75% anual.

2. Calcule el interés simple comercial y exacto de $130 000 prestados a una tasa de interés igual a la TIIE más 8 puntos porcentuales, del 7 de julio al 10 de noviembre. Suponga que al momento de la inversión la TIIE fue de 11.3%.

3. Encuentre el valor presente de 13 000 dólares utilizando una tasa de interés de 0.5% mensual, nueve meses antes del vencimiento. Interprete el resultado.

4. ¿Cuál es el valor actual de un pagaré con valor nominal por $9 000 que vence el 15 de diciembre, si se considera una tasa de interés de 38% y hoy es 11 de julio?

5. El 16 de junio del 2003 se firmó un pagaré con vencimiento al 31 de julio del 2003. Si el valor de vencimiento es de $52 765 y la tasa de interés se pactó a 2.275% mensual, obtenga
   a) El capital prestado.
   b) El valor presente al 10 de julio del 2003.

6. Una persona obtiene un préstamo por $9700 el 16 de febrero y restituye el capital más intereses el 16 de junio del mismo año. Obtenga el monto ordinario y exacto, si la tasa de interés fue de 3.25% mensual.

7. El 7 de febrero, Armando invirtió $14 600 en un Pagaré con Rendimiento Liquidable al Vencimiento, ganando un interés de 5.11%. ¿Cuál será el monto para el 7 de marzo, fecha de vencimiento de la inversión?

8. Una empresa desea depositar $975 000 a un plazo de 182 días, y debe decidir si deposita el dinero en el Banco del Este, que paga 10.37% de interés comercial, o en el Banco del Oeste que paga 10.83% de interés exacto. ¿Qué banco conviene elegir?

9. Con respecto al ejercicio anterior, ¿qué tasa de interés debería pagar el Banco del Oeste para que sea indistinto invertir en uno u otro banco?

10. Utilizando el año natural, obtenga el valor de vencimiento del siguiente pagaré:

P A G A R É

Documento número: Único BUENO POR: $166 130.60

En México, D.F. a 08 de noviembre de 2002

Debo(emos) y pagaré(mos) incondicionalmente por este Pagaré a la orden de Visión por Cable, S.A. en México, D.F. el día 08 de febrero del 2003.

La cantidad de:

Ciento sesenta y seis mil ciento treinta pesos 60/100 Moneda Nacional

Valor recibido a mi(nuestra) entera satisfacción. La suma anterior causará intereses a la tasa de 28% anual hasta la fecha de su vencimiento, y si no es pagada al vencimiento causará una tasa de interés moratorio de 39.2% anual.

Nombre: Lorena Lee

Dirección: Calzada Jesús #60

Población: México, D.F. Acepto(amos)

11. Si el pagaré del ejercicio anterior se liquidó 22 días después de la fecha de vencimiento, calcule el interés moratorio así como la cantidad total por pagar. Utilice el año natural.

12. Gustavo firma un pagaré por un préstamo de $7 000 a una tasa de 3.57% mensual a 60 días de plazo. Queda de acuerdo en pagar una tasa de interés moratorio de 30% más de la tasa normal. Calcule el interés moratorio y la cantidad total por pagar si el documento es liquidado 14 días después de la fecha de vencimiento.

13. El abogado Toribio Tranza aceptó un pagaré de un cliente que no pudo cubrir sus honorarios. Al vencimiento del pagaré, el abogado recibirá $144 780. ¿Cuál era el importe de sus honorarios, si el plazo del documento fue por 3 meses y la tasa de interés de 108%?

14. Una persona firmó el 6 de octubre un pagaré con valor de vencimiento por $8 375. La tasa de interés es de 27% y la fecha de vencimiento es 14 de noviembre. Si el pagaré se descuenta mediante descuento racional el 31 de octubre, obtenga la cantidad a pagar.

15. Un pagaré por $1 534 se liquidó después de 35 días mediante un cheque por $1 603.98. ¿Cuál fue la tasa de interés anual? Utilice el año natural.

16. Cierto individuo ofrece préstamos que él llama "cincuenta sobre mil por quincena". Esto significa que por cada $1 000 tomados en préstamo, el prestamista cobra $50 de interés cada quincena. Calcule la tasa de interés anual cobrada por el prestamista.

17. Andrea invirtió $325 000 en un Fondo de Inversión a plazo de 28 días. Si al vencimiento recibió $326 367.53, ¿qué tasa de interés ganó en el periodo de 28 días?[4] ¿Qué tasa de interés anual ganó?

18. Doña Teresa compró a crédito una licuadora que cuesta $540 de contado, el 14 de septiembre. La paga el 3 de noviembre con $586.80. ¿Qué tasa de interés por periodo pagó la señora? ¿Qué tasa de interés simple anual pagó?

19. Un capital de $3 800, invertido a 22%, se convirtió en $3 974.17. ¿Cuántos días estuvo invertido?

20. El señor Solis firmó un pagaré el 20 de agosto por un capital de $21 000 a 40% de interés simple. ¿En qué fecha los intereses serán de $1 306.67?

21. El 20 de marzo la señora Pérez invierte $11 600 a una tasa de 8.34%. ¿Qué día retira su inversión si obtiene un monto de $11 891.56? Utilice año natural.

22. En un adeudo de $16 000 se cobran intereses moratorios de $453.33. Si la tasa de interés moratorio es de 5% mensual, ¿cuántos días se retrasó el pago del adeudo?

23. ¿Cuál es el precio de contado de una laptop que se paga dando un anticipo de 25% del precio de contado y se firma un pagaré a 3 meses de plazo por $19 125, cantidad que incluye intereses a la tasa de 25% anual?

24. César invirtió un total de $200 000 en dos bancos distintos. En Banca Financiera invirtió una parte del dinero en un Pagaré con Rendimiento Liquidable al Vencimiento a plazo de 91 días y tasa de interés de 13.72%. En el Banco Comercial invirtió el resto en un Pagaré con Rendimiento Liquidable al Vencimiento a plazo de 91 días y tasa de interés de 12.83%. Si al final del plazo, el interés total fue de $6 819.24, ¿cuál fue la cantidad invertida en cada uno de los Pagarés?

25. Un horno de microondas cuesta 190 dólares si se paga de contado y 205.50 dólares si se paga a los 6 meses. Si el señor Álvarez pidiera un

[4] Esta tasa de interés recibe el nombre de *tasa efectiva del periodo*, ya que corresponde al periodo o plazo que se pactó para la operación.

préstamo de 190 dólares a 6 meses de plazo y una tasa de interés de 11.2% anual para comprar el horno de contado, ¿le conviene?

26. Yolanda compra un televisor a colores, que puede pagar de dos formas: \$8 000 de contado o dar un pago inicial de 20% del precio de contado y \$8 024 al cabo de 4 meses. Si puede invertir el dinero en una cuenta de valores que le produce 15% anual de intereses, ¿qué opción de pago le resulta más ventajosa?

27. Sandra desea vender una pulsera de oro y recibe, el 18 de abril, las siguientes ofertas:

- \$17 890 de contado.
- \$5 000 de enganche y se firma un pagaré por \$14 800 con vencimiento el 15 de agosto.
- \$3 000 de pago inicial y se firman dos pagarés: uno por \$6 300 a 30 días de plazo y otro por \$9 800 con fecha de vencimiento el 5 de julio.

¿Cuál oferta le conviene más si el rendimiento normal del dinero es de 1.77% mensual?

28. Raúl desea vender su automóvil y recibe las siguientes ofertas, por parte de dos personas interesadas:

- \$30 000 de pago inicial y un pagaré a 5 meses de plazo por \$63 250.
- \$45 430 a 3 meses de plazo y \$46 860 a 6 meses de plazo.

¿Cuál es la mejor oferta sabiendo que el dinero gana 13% anual simple?

29. Calcule el interés moratorio y el monto total a pagar del siguiente documento, sabiendo que éste se liquidó 15 días después de la fecha de vencimiento. Vea el pagaré en la parte superior de la siguiente página.

30. El señor Ortega firmó el documento mostrado en la parte inferior de la página siguiente y 33 días antes de la fecha de vencimiento conviene con su acreedor en pagar la deuda contraída. Obtenga la cantidad por pagar, si la tasa de interés utilizada para el descuento racional es del

a) 23.7% anual.
b) 25% anual.
c) 26.3% anual.

31. ¿Cuánto tiempo ha estado invertido un capital que colocado a 21.6% ha proporcionado un interés igual a 18% del capital?

32. Diana invierte 85% de su capital a 13% y el resto a 10.4%. Si recibe un interés total de \$627.70 cada 28 días, obtenga el valor de su capital.

33. Una computadora cuesta \$22 300 de contado. Un estudiante está de acuerdo en dar un pago inicial de 20% del precio de contado y el resto a 60 días, con un recargo de 12% sobre el precio de contado. ¿Qué tasa de interés simple anual paga el estudiante?

P A G A R É

Documento número: Único BUENO POR: $24 100.00

En México, D.F. a 26 de diciembre de 2002

Debo(emos) y pagaré(mos) incondicionalmente por este Pagaré a la orden de Comercial Alfa, S.A. en México, D.F. el día 15 de abril del 2003.

La cantidad de:

Veinticuatro mil cien pesos 00/100 Moneda Nacional

Valor recibido a mi(nuestra) entera satisfacción. La suma anterior incluye intereses a la tasa de 29% anual hasta la fecha de su vencimiento, y si no es pagada al vencimiento causará una tasa de interés moratorio de 58% anual.

Nombre: Efraín Luna

Dirección: Calle Ingenieros #90

Población: León, Guanajuato Acepto(amos)

P A G A R É

Documento número: Único BUENO POR: $105 700.00

En Aguascalientes, Ags. a 10 de marzo de 2003

Debo(emos) y pagaré(mos) incondicionalmente por este Pagaré a la orden de Mister Chip, S.A. en Aguascalientes, Ags. el día 10 de junio del 2003.

La cantidad de:

Ciento cinco mil setecientos pesos 00/100 Moneda Nacional

Valor recibido a mi(nuestra) entera satisfacción. La suma anterior causará intereses a la tasa de 25% anual hasta la fecha de su vencimiento, y si no es pagada al vencimiento causará una tasa de interés moratorio de 50% anual.

Nombre: Arturo Ortega

Dirección: Calle G. Gamow #18

Población: Chapala, Jalisco Acepto(amos)

Ejercicios Especiales

1. Julio posee un minisúper ubicado en la colonia donde vive y el 17 de marzo le compró a *Distribuidora de Vinos y Licores* varias cajas de tequila. Julio, ante la falta de liquidez pidió crédito y firmó un pagaré con fecha de vencimiento el 6 de mayo.

   Llegado el 6 de mayo, Julio no pudo pagar y entró en moratoria. El 16 de mayo, por fin, liquidó su adeudo pagando un total de $76 580.67, cantidad que incluye intereses normales y moratorios. Si la tasa de interés fue de 24% anual y la tasa de interés moratorio se pactó a la tasa normal más 12 puntos porcentuales, encuentre el valor de las cajas de tequila compradas por Julio.

2. Usted tiene $450 000 en este momento y desea invertirlos en una Sociedad de Inversión a un plazo de 91 días, la cual le paga una tasa de interés promedio de 8.75%. También ha pensado en invertir su dinero en dólares, ya que piensa que es mejor. Si la inversión la realiza en dólares, el dinero lo enviará a Estados Unidos y se invertirá en Bonos del Tesoro a 91 días de plazo y una tasa de interés de 4.63% anual.

   ¿Cuál opción escogería usted suponiendo que hoy realiza la inversión y que el dólar se cotiza en $11.10 a la compra y en $11.65 a la venta y tiene un deslizamiento promedio de medio centavo diario?

3. Es usual que las empresas fabricantes y los mayoristas concedan a sus clientes un plazo que va de 30 a 90 días para pagar los productos comprados. Si el cliente paga antes del plazo establecido, el proveedor otorga un descuento por pronto pago, que, por lo general, se establece como un porcentaje de la cantidad comprada.

   Las condiciones que se deben cumplir para efectuar el descuento van impresas en la factura y, por lo general, se especifican de la siguiente forma: 8/10, neto 45. Estas condiciones indican que se otorgará 8% de descuento del costo de la mercancía si la factura se paga dentro de los 10 días siguientes a la fecha de la factura. Si se paga después del décimo día, no se otorga descuento y el pago vence a los 45 días de la fecha de la factura.

   El señor Godínez fabrica utensilios de aluminio para la cocina. El día de hoy recibió un embarque de aluminio con un valor de $185 000. Las condiciones de pago establecidas en la factura son: 5/10, neto 30.

   Como el señor Godínez desea aprovechar el descuento por pronto pago, pero en este momento no tiene dinero, piensa pedir un préstamo en su banco. Determine si le conviene pedir el préstamo sabiendo que la tasa de interés que le cargará el banco es de 35% anual.

Tema especial

El Nacional Monte de Piedad

El Nacional Monte de Piedad es una institución privada dedicada al empeño; esto es, al proceso mediante el cual, el *pignorante* o usuario recibe en forma inmediata una cantidad de dinero en efectivo a cambio de dejar en depósito, y como garantía, un bien de su propiedad.

El Nacional Monte de Piedad, conocido popularmente como montepío, es la institución a la que acuden las personas de escasos recursos que tienen necesidad de pedir prestado. Es una institución de beneficencia que evita que la gente caiga en manos de prestamistas usureros, ya que, en teoría, los intereses que cobra deben ser los usuales en el mercado financiero.

El Nacional Monte de Piedad no es la única institución de este tipo, en la actualidad existen más de 300 casas de empeño. Tanto el Nacional Monte de Piedad como las demás casas de empeño están regidos por la Ley de Instituciones de Asistencia Privada.

La palabra Monte significaba en 1462 lo que hoy conocemos como Banco. Fue en esa fecha cuando nació en Perusa, Italia, el primer Monte, llamado Monte de Misericordia; creado a instancias de Fray Bernabé de Temi. En México, el primer Monte fue fundado en 1775 por don Pedro Romero de Terreros y recibió el nombre de Sacro y Real Monte de Piedad de Ánimas; una casa de préstamos con garantía prendaria, que no cobraba intereses; en su lugar, don Pedro pedía a los deudores que entregaran una limosna como muestra de agradecimiento por el dinero prestado. Posteriormente el Monte de Piedad se convirtió en un organismo del Gobierno Federal y cambió de nombre: Nacional Monte de Piedad. El 13 de junio de 1991 la desaparecida Secretaría de Programación y Presupuesto dejó de considerar al montepío una entidad de la administración pública paraestatal y pasó a ser institución privada.

En general, el préstamo por los objetos empeñados es la tercera parte de su valor y se da un plazo máximo de 4 meses, con opción de desempeño o refrendo en el quinto mes de la fecha en que se realizó la operación. Si el pignorante no rescata el objeto empeñado, porque no pueda o no quiera, éste pasa a remate y una vez vendido se descuenta la cantidad prestada así como los intereses más un cierto porcentaje por comisión y gastos. El resto, si sobra, se le da al dueño del objeto. Si a los 3 meses no se cobra ese dinero sobrante queda a favor de la institución. Obviamente, el negocio de las casas de empeño no es quedarse con los bienes, sino cobrar los intereses y hacer que los clientes empeñen una y otra vez.

El Monte de Piedad cobra un interés cuya tasa es variable, ya que depende del tipo de artículo empeñado y de las condiciones del mercado financiero. Los artículos a empeñar se clasifican en:

- Alhajas y relojes.
- Géneros (casimires, cobijas, edredones, mantelería, etc.)

- Varios (refrigeradores, licuadoras, muebles, etc.)
- Automóviles.
- Hipotecas.

Ejemplo

El 18 de marzo una persona acudió al Monte de Piedad a empeñar un televisor. El valuador le ofreció un préstamo por $1 200, que fue aceptado por el pignorante. Si la institución carga un interés mensual de 2.5% sobre el préstamo, ¿cuánto deberá pagar el dueño del televisor para recuperarlo, el día 25 de mayo?

Solución:

El Monte de Piedad cobra intereses sobre meses nominales y no por días naturales. Esto significa que el mes se considera completo independientemente de la fecha en que se realice el empeño. Por tanto, el tiempo que estuvo empeñado el televisor fue de tres meses.

El monto a pagar es

$$M = 1200[1 + (0.025)(3)] = \$1290$$

En la página Web: http://dns.montepiedad.com.mx, el lector puede ver la historia del Nacional Monte de Piedad, así como los tipos de préstamos existentes, avalúos, etc. En la página de la Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros, www.condusef.gob.mx, se presenta información muy completa sobre las casas de empeño.

4.3 Amortización con interés simple

Muchas deudas se liquidan mediante un pago único en la fecha de vencimiento; sin embargo, es común que los créditos se contraten para pagarlos mediante abonos o pagos parciales. En este caso se dice que el préstamo se amortiza.

Amortizar[5] significa saldar una deuda y sus intereses mediante pagos parciales o abonos, los cuales pueden ser iguales en valor o variables, efectuados a inter-

[5] Del latín *ad*, a y *mortus*, muerte. Literalmente hablando, amortizar una deuda significa darle muerte.

valos de tiempo iguales o diferentes. En la mayoría de las operaciones a crédito se acostumbra saldar las deudas mediante abonos de igual cuantía, de manera que incluyan capital e intereses, y realizados a intervalos de tiempo iguales. Para que esto sea así, basta dividir el monto de la deuda entre el número de pagos, es decir,

$$\text{Abono} = \frac{\text{Monto de la deuda}}{\text{Número de pagos}}$$

La amortización de una deuda puede llevarse a cabo utilizando interés simple o compuesto. En la presente sección se tratará de la amortización con interés simple. En el capítulo 6 se estudiará la amortización con interés compuesto.

La amortización con interés simple se lleva a cabo de dos maneras distintas:

- Con interés global.
- Con intereses sobre saldos insolutos.

Amortización con interés global

En este tipo de amortización los intereses se calculan sobre el total de la deuda, sin tomar en cuenta los pagos parciales efectuados.

Ejemplo 4.21

El señor Medina compra un refrigerador a crédito, cuyo precio de contado es de \$6 000, bajo las siguientes condiciones de pago: tasa de interés global de 39.84% y 6 meses para pagar, dando abonos mensuales iguales en cantidad. Calcule el valor del abono mensual.

Solución:

El monto de la deuda es

$$M = 6\,000\left[1 + \left(\frac{0.3984}{12}\right)(6)\right] = \$7\,195.20$$

Al dividir este monto entre los 6 meses, se obtendrá el valor del abono mensual:

$$\text{Abono mensual} = \frac{7\,195.20}{6} = \$1\,199.20$$

La **Ley Federal de Protección al Consumidor** prohíbe el uso del interés global en todas las operaciones a crédito. El artículo 69 de dicha ley dice textualmente:

"Los intereses se causarán exclusivamente sobre los saldos insolutos del crédito concedido y su pago no podrá ser exigido por adelantado, sino únicamente por periodos vencidos."

Son dos las razones por las cuales se prohíbe el uso del interés global:

1. Es una regla injusta ya que no bonifica intereses por los abonos efectuados.
2. La tasa de interés en realidad es superior a la tasa mencionada. Para demostrarlo se utilizará el ejemplo 4.21.

En el ejemplo 4.21, cada pago de $1 199.20 se divide en dos partes:

$\$1000 \left(\frac{6000}{6}\right)$ para pagar el capital y $199.20 para el pago de los intereses. Cada mes, después de realizado un pago, la deuda se reduce en $1000, pero el deudor sigue pagando los mismos intereses; esto hace que la tasa de interés no sea en realidad del 39.84%, sino que aumente cada mes. Por ejemplo, después de 4 abonos la deuda se reduce a $2 000 y el interés sigue siendo de $199.20; por tanto, la tasa de interés aplicable para el quinto mes es:

$$i = \frac{199.20}{(2\,000)(1\text{ mes})} \times 100 \times 12 = 119.52\%\text{ anual}$$

Al momento del último pago, el deudor paga un interés de $199.20 sobre una deuda de $1 000. La tasa de interés realmente aplicada es:

$$i = \frac{199.20}{(1\,000)(1\text{ mes})} \times 100 \times 12 = 239.04\%\text{ anual}$$

Sólo en el primer mes se aplicó realmente la tasa de interés de 39.84% anual.

Amortización con intereses sobre saldos insolutos

Si la palabra *insoluto* significa *lo no pagado*, entonces los intereses cobrados sobre el saldo insoluto significa el interés calculado en una deuda sobre el saldo que queda por pagar cada vez que se realiza un abono.

Ejemplo 4.22

Resuelva el ejemplo 4.21 si los intereses se cobran sobre el saldo insoluto.

Solución:

El problema se resuelve de dos formas; en primer lugar se resolverá desarrollando una **tabla de amortización**, la cual muestra la evolución de la deuda, periodo a periodo.

En este momento es necesario mencionar la diferencia que existe entre abono y amortización. **Amortizar** significa liquidar el capital mediante una serie de pagos, generalmente iguales, mientras que el **abono** es la *suma de la amortización más el interés generado en el periodo*. Por lo anterior, la *amortización es la parte del abono que reduce el capital de la deuda*. En el ejemplo 4.21, la amortización mensual es:

$$\text{Amortización} = a = \frac{6\,000}{6} = \$1\,000$$

Los intereses mensuales se deben calcular sobre la parte no pagada del capital (saldo insoluto) que va quedando después de cada amortización. Desde el inicio del crédito hasta el final del primer mes, el saldo insoluto es de $6 000. Por tanto, el interés a pagar al efectuar la primera amortización será:

$$I = (6\,000)\left(\frac{0.3984}{12}\right)(1) = 199.20$$

Al final del primer mes se tendrá que pagar $1 000 de amortización más $199.20 de intereses; es decir, se tendrá que dar un abono de $1 199.20.

El saldo insoluto al inicio del segundo mes es de $6 000 − $1 000 = $5 000. El interés a pagar al final del segundo mes es:

$$I = (5\,000)\left(\frac{0.3984}{12}\right)(1) = \$166.00$$

El segundo abono será de $1 000 + $166 = $1 166.

Al pagar el segundo abono el saldo insoluto es de $5 000 − $1 000 = $4 000. El interés a pagar al final del tercer mes es:

$$I = (4\,000)\left(\frac{0.3984}{12}\right)(1) = \$132.80$$

El tercer abono será de $1 000 + $132.80 = $1 132.80.

Continuando de esta manera, es posible elaborar la siguiente tabla de amortización:

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$6 000.00
1	$1 000.00	$199.20	$1 199.20	$5 000.00
2	$1 000.00	$166.00	$1 166.00	$4 000.00
3	$1 000.00	$132.80	$1 132.80	$3 000.00
4	$1 000.00	$ 99.60	$1 099.60	$2 000.00
5	$1 000.00	$ 66.40	$1 066.40	$1 000.00
6	$1 000.00	$ 33.20	$1 033.20	$ 0.00
Total	**$6 000.00**	**$ 697.20**	**$6 697.20**	

El precio total pagado por el refrigerador es de \$6 697.20, de los cuales \$6 000 corresponden al capital y \$697.20 a los intereses. Como se observa, el interés cobrado sobre saldos insolutos es menor que el cobrado mediante el interés global. También se observa que el abono es cada vez menor, debido a que los intereses van decreciendo mes a mes.

Es práctica común que el abono sea igual cada mes. En este caso, el abono mensual constante es:

$$\text{Abono} = \frac{6\,697.20}{6} = \$1\,116.20$$

En las operaciones a crédito de mediano y largo plazo, el cálculo del pago periódico constante, sea éste semanal, quincenal, mensual, etc., se convierte en un trabajo demasiado laborioso y tardado. Por tal motivo se deducirá una fórmula que nos permita obtener el interés total sobre saldos insolutos.

La fórmula se deduce ante el hecho de que los intereses forman una sucesión aritmética, hecho que el lector puede constatar fácilmente de la tabla de amortización elaborada anteriormente.

Sea P el valor de la deuda; n, el número de periodos; i, la tasa de interés (expresada en forma decimal) y a, la amortización. Al dividir el valor de la deuda entre el número de periodos se obtiene a,

$$a = \frac{P}{n} \tag{4.4}$$

Si P es el saldo insoluto al inicio, el interés por pagar al final del primer periodo será de Pi. En el segundo periodo el saldo insoluto es $(P - a)$ y el interés por pagar será $(P - a)i$. El saldo insoluto en el tercer periodo es $(P - 2a)$ y el interés a pagar será $(P - 2a)i$, y así sucesivamente, de tal forma que se tiene el siguiente conjunto de elementos:

$$Pi, (P - a)i, (P - 2a)i, (P - 3a)i, \ldots$$

El conjunto anterior forma una sucesión aritmética con diferencia común $-ai$. Por tanto, es posible calcular el valor del n-ésimo término de la sucesión mediante la ecuación (3.1):

$$a_n = Pi + (n - 1)(-ai) = Pi - ai(n - 1)$$

Al sumar los términos de la sucesión se obtiene el interés total, I. La suma se obtiene mediante la ecuación (3.2):

$$S_n = I = \frac{n}{2}\,[Pi + Pi - ai(n - 1)]$$

Simplificando:

$$I = \frac{ni}{2}\,[2P - a(n - 1)] \tag{4.5}$$

Ejemplo 4.23

Utilice la ecuación (4.5) para calcular el abono mensual constante en el ejemplo 4.22.

Solución:

P = \$6000
a = \$1000
n = 6 meses
i = 39.84/12 = 3.32% mensual

$$I = \frac{(6)(0.0332)}{2}[2(6000) - 1000(6-1)]$$

$$I = \$697.20$$

$$\text{abono mensual} = \frac{\text{monto}}{n} = \frac{6\,000 + 697.20}{6} = \$1\,116.20$$

Ejemplo 4.24

Implementos Agrícolas, S. A., vende un tractor, cuyo precio de contado es de \$525 000, bajo las siguientes condiciones: dar un enganche de 25% del precio de contado y el resto a pagar en 72 abonos quincenales iguales en cantidad, a una tasa de interés simple de 40% sobre saldos insolutos. Calcule el importe del abono quincenal.

Solución:

El valor de la deuda es el precio de contado menos el enganche. Esto es

$$P = 525\,000 - 25\%\text{ de } 525\,000 = \$393\,750$$

La amortización quincenal es

$$a = \frac{393\,750}{72} = \$5\,468.75$$

El interés total a pagar por el crédito se obtiene sustituyendo los datos en la ecuación (4.5):

$$I = \frac{(72)(0.40/24)}{2}[2(393750) - 5\,468.75(72-1)]$$

$$I = 239\,531.25$$

Por tanto,

$$\text{Abono quincenal} = \frac{393\,750 + 239\,531.25}{72} = \$8\,795.57$$

Ejemplo 4.25

Se obtiene un préstamo por $36 000 pagaderos a 10 meses mediante pagos mensuales y 38% sobre saldos insolutos. Calcule los intereses de los primeros 6 meses.

Solución:

La fórmula (4.5) nos permite calcular los intereses que se han cobrado una vez transcurridos n periodos.

$$a = \frac{36\,000}{10} = \$3\,600$$

$$I = \frac{(6)(0.38/12)}{2}[2(36\,000) - 3\,600(6-1)]$$

$$I = \$5\,130$$

Estos son los intereses pagados en los primeros 6 meses. El lector puede comprobar este resultado, elaborando la tabla de amortización.

Ejemplo 4.26

Un préstamo por $90 000 debe liquidarse en un año mediante pagos bimestrales, cobrando una tasa de interés simple sobre saldos insolutos igual a la TIIE vigente en el momento de realizar el pago, más 10 puntos porcentuales. El préstamo fue otorgado el 5 de julio y los pagos deberán hacerse los días 5, empezando con el 5 de septiembre. Obtenga el pago total que se deberá realizar cada bimestre, sabiendo que las TIIE fueron las siguientes:

Bimestre	TIIE
1	10.52%
2	10.31%
3	10.75%
4	11.00%
5	11.40%
6	11.87%

Solución:

Es evidente que el interés total no se calcula mediante la ecuación (4.5), ya que la tasa de interés es variable. Por lo mismo, no es posible obtener un pago bimestral constante. El problema se tiene que resolver bimestre a bimestre. A continuación se muestra la tabla de amortización con una nueva columna.

Bimestre	TIIE más 10 puntos	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0					$90 000.00
1	20.52%	$15 000.00	$ 3 078.00	$ 18 078.00	$75 000.00
2	20.31%	$15 000.00	$ 2 538.75	$ 17 538.75	$60 000.00
3	20.75%	$15 000.00	$ 2 075.00	$ 17 075.00	$45 000.00
4	21.00%	$15 000.00	$ 1 575.00	$ 16 575.00	$30 000.00
5	21.40%	$15 000.00	$ 1 070.00	$ 16 070.00	$ 15 000.00
6	21.87%	$15 000.00	$ 546.75	$ 15 546.75	$ 0.00
Total		**$90 000.00**	**$10 883.50**	**$100 883.50**	

Ejemplo 4.27

Obtenga el precio de contado de una videocámara digital que se compra a crédito, de la siguiente forma: sin enganche y 6 mensualidades de $2 270.86 que incluye intereses a la tasa de 35.4% anual simple sobre el saldo insoluto.

Solución:

Si x es el precio de contado de la videocámara, entonces la amortización será

$$a = \frac{x}{6}$$

Al sustituir los valores en la ecuación (4.5), se tiene

$$I = \frac{(6)(0.354/12)}{2}\left[2(x) - \frac{x}{6}(6-1)\right]$$

$$I = 0.0885\left[x + \frac{x}{6}\right] = 0.10325x$$

Por tanto, el monto será

$$M = x + 0.10325x = 1.10325x$$

El abono mensual es igual al monto dividido entre el número de pagos; por tanto,

$$\text{Abono mensual} = \frac{1.10325x}{6} = 2\,270.85$$

Finalmente,

$$x = \frac{(6)(2\,270.86)}{1.10325} = \$12\,350$$

Ejercicios 4.3

1. En el anuncio de una distribuidora automotriz, aparecido en un periódico local, se menciona que se puede comprar un automóvil pagando un enganche de 20% y el resto en 36 mensualidades con 2% mensual de interés global. Si el automóvil cuesta $243 000, obtenga el abono mensual y el interés que se está pagando por el crédito.

2. Un reloj se puede comprar de contado en $10 600; a crédito se requiere un pago inicial de $1 590. Si se cobra una tasa de interés simple global de 34% y la deuda se liquida en 12 pagos quincenales, ¿cuál será el valor de cada pago?

3. Un crédito se amortiza con 10 abonos quincenales de $572.92 los cuales incluyen intereses de 28% anual global. Determine el capital pedido en préstamo.

4. El señor Romero solicitó a un banco un préstamo por $180 000, a un año de plazo, y una tasa de interés de 3% mensual. Si el señor Romero va a liquidar el adeudo mediante pagos mensuales, determine el valor del abono mensual si,
   a) El interés cobrado es global.
   b) El interés cobrado es sobre saldos insolutos.

5. Roberto debe $4 140, los cuales pagará en 6 pagos mensuales. Los intereses se calculan sobre saldos insolutos con tasa de interés simple de 2.5% mensual. Elabore la tabla de amortización.

6. Se obtiene un préstamo por $20 000 a un año de plazo, se saldará con pagos semanales iguales y 27% de interés simple sobre saldos insolutos. ¿Cuál será el valor del pago semanal? ¿A cuánto ascienden los intereses?

7. En cierta agencia automotriz se vende el modelo *Light* en $165 700, si la compra es al contado. A crédito, el auto se ofrece sin enganche, en 36 mensualidades iguales y con una tasa de interés simple de 39.5% sobre el saldo insoluto. Obtenga el abono mensual.

8. Una tienda departamental vende un equipo de sonido en \$5 300, precio de contado. Para promover sus ventas, lo ofrece a crédito con un enganche de 10% sobre el precio de contado y el saldo en 24 pagos quincenales iguales. Si la tasa de interés es de 2.53% mensual sobre saldos insolutos, calcule el valor del pago quincenal y el interés total que se paga por el crédito.

9. El señor Gómez solicitó un préstamo personal por \$10 000 a una institución de crédito. El plazo es de 8 meses y cada mes deberá amortizar la octava parte del capital más el interés mensual devengado, calculado a 3% mensual sobre el saldo insoluto. Elabore la tabla de amortización.

10. Se compra un PDA (Asistente Personal Digital), cuyo precio de contado es de \$4780, con un pago inicial de 10% y 10 mensualidades iguales con un interés de 42% sobre el saldo insoluto. Calcule los intereses devengados en los primeros,
a) 4 meses.
b) 8 meses.

11. Una persona debe pagar un préstamo de 2 300 dólares en 8 meses a razón de 287.50 dólares por mes, más los intereses respectivos sobre el saldo insoluto. Si la tasa de interés es variable, elabore la tabla de amortización. Las tasas de interés anuales aplicables cada mes son: 8.4, 8.8, 9.3, 9.3, 9.5, 9.0, 9.5 y 10%, respectivamente.

12. Un préstamo por \$18 000 deberá ser liquidado en un semestre mediante pagos mensuales, pagando una tasa de interés simple sobre saldos insolutos igual a la TIIE más 14 puntos porcentuales. Obtenga el pago total que se deberá realizar cada mes, sabiendo que las TIIE fueron las siguientes:

Mes	TIIE
1	9.32%
2	9.14%
3	9.25%
4	9.61%
5	9.74%
6	10.00%

13. Una deuda de \$3 000 se va a pagar mediante 5 pagos mensuales, de la siguiente forma:

Pago	Amortización
1	$350
2	$500
3	$600
4	$750
5	$800

El pago mensual deberá incluir los intereses del saldo insoluto. Si la tasa de interés es de 2.34% mensual, elabore la tabla de amortización.

14. Se compra, a crédito, una membresía de un club deportivo, dando un enganche de 20% del precio de contado y, el resto, a pagar en 18 mensualidades de $3 025.86 cada una, la cual incluye intereses de 32.94% anual simple sobre saldos insolutos. Determine el precio de contado de la membresía.

15. Alberto compra una motocicleta a crédito, sin dar enganche, mediante 18 pagos mensuales de $1 238 cada uno. Determine el precio de contado de la motocicleta, sabiendo que la tasa de interés aplicada fue de 2.64% mensual sobre saldos insolutos.

16. Un comedor tiene un precio de contado de $4 700. Se puede comprar en abonos con un enganche de 15% y 12 pagos mensuales de $442 cada uno. Obtenga la tasa de interés simple sobre saldos insolutos.

17. Un reproductor portátil de CD, marcado con un precio de contado de $1 200, puede adquirirse sin enganche y 3 mensualidades de $460 cada una. Calcule la tasa de interés anual cargada sobre el saldo insoluto.

18. El precio de un lavavajillas es de $7 300. Cuando se compra a crédito se requiere dar un enganche de 10% y el resto se liquida en pagos quincenales iguales de $411.81, que incluyen intereses. Si la tasa de interés simple es de 2.7% mensual sobre el saldo insoluto, encuentre el número de pagos quincenales que liquidan la deuda.

19. Diana compró a crédito una sala que le hubiera costado $5 480 de contado. A crédito tuvo que dar un pago inicial de $1 000 y al saldo se le cargó una tasa de interés simple de 29% anual sobre saldos insolutos. Determine el número de mensualidades, si el valor del pago mensual es de $378.

Ejercicio especial

1. El préstamo más común entre los de corto, mediano y largo plazos es el **crédito simple**. Su característica principal es que sólo se puede utilizar para un proyecto, a través de un contrato que finaliza cuando se termina de pagar el crédito. El crédito simple sirve para apoyar el capital de trabajo y para operaciones de compra venta. La cantidad de dinero prestada se garantiza con bienes muebles o inmuebles. Los intereses, al igual que el capital, se van pagando con abonos mensuales.

   El señor Morales, dueño de una pequeña fábrica, necesita un préstamo por $235 000 para la compra de una máquina. Por tal motivo visita a los ejecutivos de crédito de dos de los bancos donde el señor Morales es cliente, con el fin de obtener un crédito simple. El ejecutivo de Banca Tapatía le ofrece el dinero a dos años de plazo, dando abonos mensuales con una tasa de interés de 33.4% anual sobre saldos insolutos. En cambio, el ejecutivo de Banco de Los Altos de Jalisco le ofrece el mismo plazo, pero los abonos mensuales serán a una tasa de interés de 24.3% anual global.

   a) ¿En cuál banco le conviene al señor Morales pedir el préstamo?

   b) ¿Qué tasa de interés global debería cobrar Banco de Los Altos de Jalisco para que el abono mensual fuera igual en ambas instituciones?

Tema especial

Tarjeta de débito

El ahorro es fundamental para la economía de un país. Al depositar dinero en una cuenta de ahorro o de inversión, parte de él se canaliza a las distintas actividades económicas, como la producción de bienes y servicios y el comercio.

En la actualidad, las opciones de ahorro e inversión que existen son de una gran diversidad, de tal manera que el inversionista puede elegir el instrumento de inversión o la combinación que mejor se adapte a sus necesidades y a sus expectativas de rentabilidad, liquidez y seguridad.

Un instrumento de ahorro muy común y que además se utiliza como medio de pago es la llamada tarjeta de débito. Ésta consiste en una tarjeta plástica por medio de la cual se dispone del dinero propio. Equivalente a una chequera electrónica, su uso está limitado por los fondos que tiene el usuario en una institución bancaria. El usuario recibe un estado de cuenta mensual donde se registran todos los depósitos, retiros e intereses.

El dinero depositado en una cuenta de ahorro o de cheques con tarjeta de débito genera intereses a una tasa variable, los cuales se pagan mensualmente, en la **fecha de corte,**[6] sobre el saldo promedio diario de la cuenta.

Una ventaja de este tipo de cuenta de ahorro es su gran liquidez, ya que el dinero está disponible las 24 horas de todos los días del año mediante los cajeros automáticos. Asimismo, la tarjeta se puede utilizar para pagar directamente consumos hechos en establecimientos comerciales afiliados a la institución bancaria emisora de la tarjeta. El ahorrador al adquirir bienes y servicios mediante la tarjeta está girando sobre sus ahorros, por lo que las cantidades que importen esas operaciones deberán ser menores al saldo actualizado, ya que la tarjeta no es una tarjeta de crédito.

Ejemplo

En cierto banco se paga una *tasa de interés neto*[7] de 10% anual en las cuentas de ahorro con tarjeta de débito. La fecha de corte es el día 30 de cada mes.

La señorita Palacios abrió una cuenta de ahorro, con un depósito inicial de $8 000, el 2 de junio y el banco le entregó una tarjeta de débito. A continuación se muestran los movimientos efectuados en el mes de junio.

Obtenga el interés devengado en el mes.

Fecha	Depósitos	Retiros	Saldo
2 de junio	$ 8 000		$ 8 000
10 de junio		$3 000	$ 5 000
17 de junio	$14 600		$19 600
20 de junio	$ 3 800		$23 400
24 de junio		$4 600	$18 800
27 de junio		$5 100	$13 700

Solución:

El interés que se gana al tener el dinero depositado en una cuenta de ahorro se calcula por medio del método del **Saldo Promedio Diario (SPD)**. El saldo promedio diario es el resultado de sumar cada uno de los saldos diarios registrados en el periodo y de dividir dicha suma entre el total de días del

[6] La fecha de corte es el día en que el banco hace un balance de los depósitos y retiros del cliente, calcula el interés devengado y emite el estado de cuenta.

[7] Tasa de interés neto es la tasa de interés que se paga al cliente después de la deducción del Impuesto Sobre la Renta. La tasa antes de impuestos se llama *tasa de interés bruta*.

periodo. El saldo diario se obtiene sumando al saldo del día anterior, los depósitos del día y restando los retiros realizados el mismo día.

El saldo promedio diario para el mes de junio de la cuenta de ahorro de la señorita Palacios es:

Día	Depósitos	Retiros	Saldo
1			
2	$ 8000		$ 8000
3			$ 8000
4			$ 8000
5			$ 8000
6			$ 8000
7			$ 8000
8			$ 8000
9			$ 8000
10		$3000	$ 5000
11			$ 5000
12			$ 5000
13			$ 5000
14			$ 5000
15			$ 5000
16			$ 5000
17	$14600		$ 19600
18			$ 19600
19			$ 19600
20	$ 3800		$ 23400
21			$ 23400
22			$ 23400
23			$ 23400
24		$4600	$ 18800
25			$ 18800
26			$ 18800
27		$5100	$ 13700
28			$ 13700
29			$ 13700
30			$ 13700
		Suma de saldos diarios	**$362600**

Por tanto, $$SPD = \frac{362\,600}{30} = \$12\,086.67$$

El saldo promedio diario se obtiene, también, de la siguiente forma:

$$SPD = \frac{(8000)(8)+(5000)(7)+(19\,600)(3)+(23\,400)(4)+(18\,800)(3)+(13\,700)(4)}{30}$$

$$SPD = 12\,086.67$$

Una vez conocido el saldo promedio diario, el interés devengado se calcula mediante la fórmula del interés simple:

$$I = (12\,086.67)\left(\frac{0.10}{360}\right)(30) = \$100.72$$

Ejercicios

1. El primer día, después del corte, el saldo en la cuenta de ahorro con tarjeta de débito de Tomás, es de \$1 000. El octavo día deposita \$6 800 y el vigésimo día retira \$2 700. ¿Cuál es el saldo promedio diario si el periodo de corte es de 31 días?
2. Ángela tiene una cuenta maestra y los primeros trece días del mes tuvo un saldo de \$700. ¿Cuánto debe depositar el decimocuarto día para mantener el saldo promedio diario de \$2 000 que el banco le exige? El mes en cuestión es de 30 días.
3. Calcule el saldo promedio durante el mes de noviembre para una cuenta de ahorro con tarjeta de débito que pagó \$58.30 de intereses, sabiendo que la tasa de interés en ese mes fue de 5.3% anual.
4. Antonio posee una cuenta de ahorro con tarjeta de débito en un banco cuya fecha de corte es el día 25 de cada mes. A continuación se muestra el saldo anterior, los depósitos efectuados y los retiros realizados para el ciclo de corte del 26 de julio al 25 de agosto.

   Si la tasa de interés para el mes es de 6.4% anual, obtenga el saldo promedio diario y el interés devengado en el mes.

Fecha	Depósitos	Retiros	Saldo
26 de julio			\$ 1300
30 de [redacted]ulio	\$8750		\$10050
10 de [redacted]osto		\$3400	\$ 6650
16 de a[redacted]osto		\$2700	\$ 3950
21 de agosto		\$1550	\$ 2400

Tema especial

Tarjeta de crédito

La **tarjeta de crédito** es un instrumento financiero, representado por un plástico con cinta magnética o con microchip, mediante el cual un banco, tienda departamental o de autoservicio concede a sus clientes una línea de crédito en cuenta corriente[8] por una cierta cantidad conocida como *límite de crédito*.

Las tarjetas de crédito bancarias surgieron en nuestro país en la década de los sesenta. Fue el Banco Nacional de México, S.A. el primero en lanzar al mercado una tarjeta de crédito, en el año de 1968. En agosto de 1987 los bancos incorporaron a la tradicional tarjeta de crédito el servicio de inversión. Este sistema se conoce actualmente como tarjeta de crédito e inversión.

Si la tarjeta se utiliza para invertir, es necesario que el usuario de la misma abone a su cuenta una cantidad mayor al importe total del saldo a su cargo; es decir, es necesario que se mantenga saldo a favor. Los saldos a favor registrados en la tarjeta de crédito se manejan por medio de un contrato de depósito bancario de dinero a la vista en cuenta corriente.

El saldo a favor empieza a generar intereses desde el momento en que el depósito se abona a la cuenta. Los intereses se calculan mensualmente sobre el saldo promedio diario[9] y se acreditan en la cuenta de la tarjeta en la fecha de corte. En este caso, el cálculo de los intereses devengados es exactamente igual que en una tarjeta de débito.

Cuando la tarjeta se utiliza como instrumento de inversión, todos los consumos y las disposiciones de efectivo que se realicen, se descuentan de los recursos que integran el saldo a favor, sin que el banco cobre comisión alguna y en caso de que este saldo sea rebasado, automáticamente empieza a operar la línea de crédito.

Si el usuario de la tarjeta utiliza la línea de crédito disponible para compras de bienes y servicios y/o disposiciones de efectivo, puede elegir cualquiera de 2 formas de pago:

1. El usuario dispone de un plazo máximo de 20 días naturales, contados a partir del día siguiente al de la fecha de corte de la cuenta para pagar la totalidad de los consumos (compras y/o disposiciones de efectivo). En este caso el banco no cobra cantidad alguna por concepto de intereses.

[8] También conocido como *crédito revolvente*. Éste consiste en que, mientras el usuario vaya pagando, puede utilizarlo cuantas veces quiera, siempre y cuando mantenga un saldo disponible.

[9] Véase el tema especial "Tarjeta de débito".

Al utilizar esta forma de pago, el usuario puede tener hasta 50 días de plazo para pagar sin intereses: 30 días de corte a corte y 20 días de fecha de corte a fecha límite de pago.

2. Esta opción consiste en amortizar la deuda mediante pagos mensuales no menores al *pago mínimo* especificado en el estado de cuenta. La cantidad mínima a pagar depende del banco emisor de la tarjeta; por lo general es una cantidad que varía de 5 a 12% de la deuda.

En la mayoría de las tarjetas de crédito los intereses se cobran mensualmente, utilizando una **tasa de interés ordinaria anual** sobre el saldo promedio diario del adeudo. La tasa de interés ordinaria se calcula sumando a la Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE) cierto número de puntos porcentuales. La tasa de interés ordinaria viene en el estado de cuenta.

Ejemplo

En cierto banco, el contrato establece que la tasa de interés ordinaria anual para tarjeta de crédito se obtiene de la siguiente forma: la tasa de interés anual se determina sumando hasta 40 puntos porcentuales al promedio aritmético de la TIIE, cotización a plazo de 28 días, que haya dado a conocer el Banco de México a través del Diario Oficial de la Federación los días jueves de las últimas cuatro semanas, a la fecha de corte.

Suponga que el promedio aritmético de la TIIE de las últimas 4 semanas fue de 9.24% y los puntos porcentuales a sumar son 23. Por tanto, la tasa de interés aplicable será

$$9.24 + 23 = 32.24\% \text{ anual}$$

En caso de que el usuario no realice oportunamente el pago mínimo mensual, tendrá que pagar intereses moratorios sobre el pago mínimo vencido del crédito. Los intereses moratorios son, por lo general, más altos que los intereses ordinarios. La tasa de interés moratoria se calcula multiplicando la tasa de interés ordinaria por un factor que determina el banco.

El *saldo promedio diario* es el resultado de sumar cada uno de los saldos diarios registrados en el periodo y de dividir dicha suma entre el total de días del periodo. El saldo diario se obtiene sumando al saldo del día anterior, las compras y disposiciones del día y restando los pagos realizados el mismo día.

Los intereses devengados por crédito para un determinado mes son la suma de los intereses del saldo promedio diario sin compras y disposiciones del mes actual más los intereses del saldo promedio diario de compras y disposiciones del mes anterior.

A continuación se muestra un ejemplo para obtener el interés mensual a pagar por el uso de una tarjeta de crédito. Para esto, se utilizarán los estados de cuenta mostrados en las figuras 4.1 y 4.2. Se desea obtener el interés mensual para el ciclo de corte del 6 de febrero del 2003 al 5 de marzo del 2003 (véase figura 4.1). La figura 4.1 muestra el estado de cuenta actual y la figura 4.2 muestra el estado de cuenta del mes anterior.

BANCA TAPATÍA

Estado de Cuenta

Información de la cuenta		Resumen de Saldos y Movimientos	
Límite de crédito	$25 000.00	Saldo anterior	$5 237.03
Crédito disponible	$ 19 715.02	Compras y otros cargos	$1 520.00
Fecha de corte	05/marzo/2003	Pagos y depósitos	$1 800.00
Días del periodo	28	Intereses por crédito	$ 285.17
Favor de pagar antes de	25/marzo/2003	IVA	$ 42.78
Pago mínimo	$ 528.50	Saldo actual	$5 284.98

Fecha de registro	Detalle de las transacciones	Cantidad
Febrero 14	Centro Automotriz Guadalajara	$ 590.00
Febrero 16	Hotel La Sierra Aguascalientes	$ 930.00
Febrero 22	Su pago – Gracias	$1 800.00
Marzo 05	*Interés* Compras Sujeto IVA	$ 285.17
Marzo 05	IVA por Intereses y Comisiones	$ 42.78

Resumen Financiero			
Compras y disposiciones	Saldo promedio diario	Tasa de interés mensual	Intereses del mes
Mes anterior	$1 525.48	4.76%	$ 72.61
Mes actual	$4 465.60	4.76%	$212.56

Figura 4.1

BANCA TAPATÍA

Estado de Cuenta

Información de la cuenta		Resumen de Saldos y Movimientos	
Límite de crédito	$25 000.00	Saldo anterior	$4 350.00
Crédito disponible	$ 19 762.97	Compras y otros cargos	$ 2 561.00
Fecha de corte	05/febrero/2003	Pagos y depósitos	$2 000.00
Días del periodo	31	Intereses por crédito	$ 283.50
Favor de pagar antes de	25/febrero/2003	IVA	$ 42.53
Pago mínimo	$ 523.70	Saldo actual	$ 5 237.03

Fecha	Detalle de las transacciones	Cantidad
Enero 08	Papelería El Gozne Zapopan, Jal.	$ 630.00
Enero 16	Rest. Los Camachos Guadalajara	$ 460.00
Enero 21	Cd. Store Guadalajara	$ 1 123.00
Enero 23	Su Pago – Gracias	$2 000.00
Febrero 02	Dulces Azteca San Luis Potosí	$ 348.00
Febrero 05	*Interés* Compras Sujeto IVA	$ 283.50
Febrero 05	IVA por Intereses y Comisiones	$ 42.53

Resumen Financiero			
Compras y disposiciones	Saldo promedio diario	Tasa de interés mensual	Intereses del mes
Mes anterior	$2 315.40	4.92%	$ 113.92
Mes actual	$3 446.77	4.92%	$169.58

Figura 4.2

Cálculo del saldo promedio diario sin compras y disposiciones del mes actual

La figura 4.1 muestra que el ciclo de corte va del 6 de febrero al 5 de marzo del 2003 y la fecha de corte es el 5 de marzo del 2003.

Al inicio del periodo (6 de febrero del 2003) el usuario de la tarjeta tenía un saldo anterior de $5 237.03 y dentro del periodo se realizó un abono el 22 de febrero por $1 800. Por tanto, entre el 6 de febrero y el 21 de febrero, inclusive (16 días), el usuario de la tarjeta mantuvo un saldo insoluto por $5 237.03. Después de dar el abono, el nuevo saldo, \$5 237.03 − \$1 800 = \$3 437.03, se mantuvo por 12 días (del 22 de febrero al 5 de marzo, inclusive). Por tanto, el saldo promedio diario sin compras y disposiciones del mes actual es:

$$SPD = \frac{(5\,237.03)(16) + (3\,437.03)(12)}{28} =$$

El interés a pagar es:

$$I = (4\,465.60)(0.0476)(1) = \$212.56$$

La tasa de interés del mes se muestra en el estado de cuenta actual.

En el cálculo del saldo promedio diario del saldo anterior cada banco emplea su propio método. En el ejemplo que se está analizando, utilizado por muchos bancos, al saldo anterior, mostrado en el estado de cuenta actual, no se le restaron los intereses y las comisiones e IVA mostradas en el estado de cuenta del mes anterior. En otros bancos se lleva a cabo la resta de estas cantidades antes de realizar el cálculo del saldo promedio. Es necesario que el lector verifique cuál método es el utilizado por su banco, lo cual puede hacer leyendo el contrato.

Cálculo del saldo promedio diario por compras y disposiciones del mes anterior

Si el usuario de la tarjeta realizó compras y/o disposiciones de efectivo utilizando su crédito durante el mes anterior, se debe calcular el saldo promedio diario para calcular los intereses correspondientes, para hacerlo se utiliza el estado de cuenta del mes anterior (figura 4.2).

El estado de cuenta del mes anterior muestra que se realizaron cuatro compras: una, registrada el 8 de enero del 2003, por \$630; otra, registrada el 16 de enero del 2003, por \$460; una tercera, registrada el 21 de enero del 2003, por \$1123 y la última, registrada el 2 de febrero del 2003, por \$348. El ciclo de corte va del 6 de enero de 2003 al 5 de febrero del 2003. El saldo promedio diario por compras y disposiciones del mes anterior es:

$$SPD = \frac{(630)(8) + (1\,090)(5) + (2\,213)(12) + (2\,561)(4)}{31} = \$1\,525.48$$

El interés por pagar por compras y disposiciones del mes anterior es:

$$I = (1\,525.48)(0.0476)(1) = \$72.61$$

Por tanto, el interés total devengado en el ciclo de corte del 6 de febrero al 5 de marzo del 2003 es de \$212.56 + \$72.61 = \$285.17.

Para más información sobre la tarjeta de crédito, visite la página de la Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros: www.condusef.gob.mx

Ejercicios

1. ¿Es posible utilizar una tarjeta de crédito bancaria para realizar compras sin pagar por el crédito?
2. Explique la diferencia entre una tarjeta de crédito y una tarjeta de débito.
3. Lea el contrato de una tarjeta de crédito y responda las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuál es la tasa de referencia utilizada por el banco?
   b) ¿Cómo se forma la tasa de interés aplicable?
4. La tasa de interés mensual que cobra el banco emisor de cierta tarjeta de crédito es de 3.63%. Obtenga el interés que deberá pagar un tarjetahabiente que tuvo un saldo promedio diario de $4 230.56.
5. Un tarjetahabiente pagó $226.22 de intereses el mes pasado. Si la tasa de interés fue de 1.81% mensual, ¿cuál fue el saldo promedio diario?
6. Un tarjetahabiente recibió el estado de cuenta de la figura 4.3. Observe los saldos promedio diarios mostrados en el resumen financiero, así como la tasa de interés mensual y los intereses del mes. Verifique los intereses cobrados.
7. Utilice dos estados de cuenta consecutivos, propios o de algún familiar, y verifique los saldos promedio diarios (o el saldo promedio total) y el interés cobrado.

   En la siguiente página se presenta a manera de ejemplo, un estado de cuenta bancario, donde podrá observar el saldo promedio diario.

Serfin light

TARJETAS DE CREDITO.
PERIFERICO SUR NO. 4407
COL. JARDINES EN LA MONTANA DEL. TLALPAN
MEXICO D.F. 14210

No. DE CUENTA	
FECHA LIMITE DE PAGO	ENE 08,2003
PAGO TOTAL DEL MES	$12,093.43
PAGO MINIMO GLOBAL	$544.00

CANTIDAD A PAGAR

R.F.C. BSE-770701-LR8

Efectúe su pago en las sucursales Serfin.
Emitir cheque a nombre de BANCA SERFIN, S.A. anotando al frente el número de la tarjeta.

HOJA 1 DE 1

DESPRENDA AQUI

R.F.C. VIAH531119KW5

PAGO MINIMO GLOBAL	$544.00		
FECHA LIMITE DE PAGO	ENE 08, 2003	SALDO GLOBAL ANTERIOR	$12,425.20
NUMERO DE CUENTA		+COMPRAS Y OTROS CARGOS	$0.00
FECHA DE CORTE	DIC 19, 2002	+PROMOCIONES NUEVAS	$0.00
LIMITE DE CREDITO	$25,000.00	+DISPOSICIONES EN EFECTIVO	$0.00
CREDITO DISPONIBLE	$12,906.57	-PAGOS	$600.00
MONTO SUJETO A I.V.A.	$141.82	-OTROS ABONOS	$0.00
No. DE DIAS EN EL PERIODO	30	-RENDIMIENTO	$0.00
SALDO DE INVERSION	$0.00	+INTERESES DEL MES	$246.96
PAGO TOTAL DEL MES	$12,093.43	+I.V.A./I.S.R.	$21.27
		SALDO GLOBAL NUEVO	$12,093.43

CUENTA NORMAL

PAGO MINIMO PARA CUENTA NORMAL $544.00

FECHA DE REGISTRO	DESCRIPCION	NUMERO DE REFERENCIA	FECHA DE OPERACION	CANTIDAD
11 DIC	SU PAGO - GRACIAS	75471462345345054683120	11 DIC	600.00-
19 DIC	*INTERES* COMPRAS SUJETO IVA		19 DIC	141.82
19 DIC	*INTERES* COMPRAS NO SUJETOS A IVA		19 DIC	105.14
19 DIC	IVA SOBRE COMISIONES E INTERESES		19 DIC	21.27

RESUMEN FINANCIERO

	SALDO PROMEDIO DIARIO SUJETO A CARGOS FINANCIEROS	TASA MENSUAL	INTERESES DEL MES
MES ACTUAL	$12,245.19	1.93%	$235.84
MES ANTERIOR	$577.41	1.93%	$11.12

	SALDO DIARIO PROMEDIO EN INVERSIONES	TASA ANUAL	RENDIMIENTO
MES ACTUAL	$0.00	0.00%	$0.00

DISPONE DE 45 DIAS NATURALES DE LA FECHA DE CORTE PARA CUALQUIER ACLARACION

BANCA SERFIN, S.A. INSTITUCIÓN DE BANCA MÚLTIPLE,
GRUPO FINANCIERO SANTANDER SERFIN

CENTRO DE ATENCION TELEFONICA SERFIN, LAS 24 HORAS, LOS 365 DIAS DEL AÑO: D.F. Y AREA METROPOLITANA: 5169-4300
DESDE EL INTERIOR DEL PAIS SIN COSTO: 01(800)50-100-00; DESDE E.U. O CANADA: 1(888)845-8628.

Figura 4.3

4.4 Descuento simple

En algunas operaciones de crédito bancarias se acostumbra cobrar el interés en el momento mismo en que se efectúa el préstamo. Cobrar el interés por adelantado, en lugar de cobrarlo hasta la fecha de vencimiento, se llama **descuento bancario** o simplemente **descuento**.

Al interés cobrado anticipadamente se le llama **descuento** y la cantidad de dinero que recibe el solicitante del préstamo, una vez descontados los intereses, se llama **valor efectivo**.

Como ejemplo, suponga que una persona solicita un préstamo por $10 000, a 2 meses de plazo, y los intereses se cobrarán por adelantado. Si la tasa de interés es de 3% mensual, el interés anticipado o descuento a cobrar en el momento de recibir el préstamo es:

$$\text{Intereses anticipados} = \text{Descuento} = (10\,000)(0.03)(2) = \$600$$

El valor efectivo o cantidad recibida por el solicitante será:

$$\text{Valor efectivo} = 10\,000 - 600 = \$9\,400$$

La persona que solicita el préstamo recibe en realidad $9 400, en lugar de los $10 000 solicitados, pero al cabo de los dos meses tendrá que pagar $10 000. Por tanto, los $10 000 solicitados, que nunca se reciben, se convierten en el monto a pagar.

Con el fin de indicar explícitamente que en un préstamo los intereses se cobrarán de manera anticipada, la tasa de interés cambia de nombre, se llama **tasa de descuento** y se representa mediante la letra d.

Con base en lo expuesto anteriormente, el descuento se obtiene mediante la siguiente fórmula

$$D = Mdt \tag{4.6}$$

en donde D es el descuento o intereses cobrados anticipadamente, M es el monto a pagar; esto es, la cantidad solicitada en préstamo y que nunca se recibe, d es la tasa de descuento y t es el plazo.

Como el Valor Efectivo (VE) es el monto a pagar menos el descuento, entonces

$$VE = M - D \tag{4.7}$$

Sustituyendo (4.6) en (4.7), se tiene

$$VE = M - Mdt$$

Factorizando la expresión anterior,

$$VE = M(1 - dt) \tag{4.8}$$

Ejemplo 4.28

Sandra solicita un préstamo quirografario[10] por $118 000 a un plazo de 60 días, siendo 27% la tasa de descuento. Calcule a cuánto ascenderá el descuento y cuál es el valor efectivo.

Solución:

El descuento se puede calcular mediante la ecuación (4.6):

$$D = (118\,000)\left(\frac{0.27}{360}\right)(60)$$

$$D = \$5\,310$$

El valor efectivo será:

$$VE = 118\,000 - 5\,310$$

$$VE = \$112\,690$$

Resumiendo: Sandra pide un préstamo bancario por $118 000, a un plazo de 60 días. Como el préstamo se realiza a descuento, Sandra paga de manera anticipada los intereses, que son $5 310 y recibe $112 690. Sandra firma un pagaré en el que se compromete a pagar $118 000 al cabo de 60 días.

Ejemplo 4.29

Con respecto al ejemplo 4.28, muestre la diferencia entre el préstamo descontado a 27% y un préstamo de $118 000 con interés simple de 27%.

Solución:

La diferencia se muestra en la siguiente tabla.

	Préstamo con descuento	Préstamo con intereses
El solicitante recibe	$112 690	$118 000
Intereses [redacted]dos	$ 5 310	$ 5 310
El solicitante liquida	$118 000	$123 310

[10] Se trata de un crédito otorgado por una institución bancaria a un cliente, quien se obliga mediante un pagaré, a devolver la cantidad solicitada a la fecha de vencimiento. Este tipo de crédito se llama quirografario debido a que no requiere garantías ya que el préstamo se respalda solamente con la firma del cliente, aunque puede ser también con aval. Los plazos que se conceden normalmente son de 30, 60 y 90 días.

La práctica del descuento, además de permitir al prestamista disponer de inmediato del dinero correspondiente a los intereses, hace que la tasa de interés que se está pagando por el préstamo sea mayor que la indicada. Esta tasa de interés recibe el nombre de **tasa de rendimiento** y se representa por la letra r.

Ejemplo 4.30

Calcule la tasa de rendimiento del ejemplo 4.28.

Solución:

El capital recibido por el solicitante del préstamo es de $112 690 y el monto a pagar es de $118 000 al cabo de 60 días, por tanto la tasa de rendimiento se calcula despejando i de la fórmula del monto simple:

$$r = i = \frac{M - P}{Pt} = \frac{118\,000 - 112\,690}{(112\,690)(60)}$$

$$r = 0.00078534 \text{ por día}$$

$$r = 0.078534\% \text{ diario} = 28.27225\% \text{ anual}$$

La tasa de interés realmente pagada por el solicitante del préstamo es de 28.27225% anual.

Generalizando el ejemplo 4.30, es posible obtener la fórmula para calcular la tasa de rendimiento en un problema de descuento. La fórmula es la siguiente:

$$r = \frac{M - VE}{(VE)(t)} \tag{4.9}$$

en donde M es el monto a pagar, VE es el valor efectivo y t es el plazo.

Ejemplo 4.31

Un banco le cobra $445 de descuento al señor Aldama por un préstamo bancario a un mes de plazo. Si la tasa de descuento es de 30% anual,

a) ¿Cuánto debe pagar al vencimiento?

b) ¿Cuánto recibe el señor Aldama?

c) ¿Cuál es la tasa de rendimiento?

Solución:

a) Despejando M de la ecuación (4.6), se tiene

$$M = \frac{D}{d\,t} = \frac{445}{\left(\frac{0.30}{12}\right)(1)} = \$17\,800$$

b) De la ecuación (4.7) se calcula el valor efectivo:

$$VE = M - D = 17\,800 - 445 = \$17\,355$$

c)
$$r = \frac{17\,800 - 17\,355}{(17\,355)(1)} = 0.025641025 \text{ por mes}$$

$$r = 2.5641025\% \text{ mensual} = 30.76923\% \text{ anual}$$

Ejemplo 4.32

¿Qué cantidad deberá solicitar en préstamo una persona que necesita $80 000, a pagar en 12 semanas, si la tasa de descuento es de 30% anual?

Solución:

El plazo es de 12 semanas, esto es, 84 días.

En este caso se pregunta el monto. Por tanto, se despeja M de la ecuación (4.8):

$$M = \frac{VE}{1 - dt} = \frac{80\,000}{1 - \left(\frac{0.30}{360}\right)(84)} = \$86\,021.51$$

Ejemplo 4.33

Obtenga la relación entre la tasa de descuento y la tasa de rendimiento.

Solución:

Sea:

M = cantidad solicitada en préstamo

d = tasa de descuento aplicada

t = plazo del préstamo

Se supone que d y t están expresadas en la misma unidad de tiempo. El descuento es:

$$D = Mdt$$

y el valor efectivo es:

$$VE = M - D = M - Mdt$$

Por la ecuación (4.9), se tiene

$$r = \frac{M - VE}{(VE)(t)} = \frac{M - (M - Mdt)}{(M - Mdt)(t)} = \frac{M - M + Mdt}{Mt(1 - dt)} = \frac{Mdt}{Mt(1 - dt)}$$

Por tanto,

$$r = \frac{d}{1 - dt} \qquad (4.10)$$

Observe que la tasa de rendimiento depende únicamente de la tasa de descuento y del tiempo que dura el préstamo, siendo independiente de la cantidad solicitada.

Ejemplo 4.34

Una persona solicita un préstamo por una determinada cantidad de dinero. Si el plazo es a dos meses y la tasa de descuento es de 35%, ¿cuál es la tasa de rendimiento?

Solución:

Utilizando la ecuación (4.10) se tiene

$$r = \frac{\left(\frac{0.35}{12}\right)}{1 - \left(\frac{0.35}{12}\right)(2)} = 0.030973451 \text{ por mes}$$

$$r = 3.0973451\% \text{ mensual} = 37.1681\% \text{ anual}$$

El tenedor de un pagaré no puede exigir el cobro del mismo antes de la fecha de vencimiento; por tanto, si desea hacerlo efectivo antes de dicha fecha lo puede vender a una institución bancaria, empresa o institución de factoraje, o bien, a cualquier persona, física o moral, que lo acepte. El nuevo dueño se convierte en el beneficiario. Esta característica del pagaré lo hace un instrumento valioso en el mundo de los negocios.

Al comprar un pagaré antes de la fecha de vencimiento, es común que el comprador aplique una tasa de descuento sobre el valor de vencimiento del documento, por el tiempo que falta para que el pagaré venza. Esta operación recibe el nombre de **descuento de un pagaré**.

Descontar un pagaré equivale a un préstamo igual al valor de vencimiento del documento que el banco, u otra persona física o moral, concede al propietario del mismo, aceptando como garantía el documento en cuestión.

Un pagaré se puede descontar una o más veces antes de la fecha de vencimiento, y cada comprador descuenta el pagaré por el tiempo que falta para su vencimiento.

Por lo general, la tasa de interés aplicada en el préstamo original y la(s) tasa(s) de descuento aplicada(s) al venderlo no son iguales.

Se llama **valor efectivo del pagaré** a la cantidad que resulta después de restar el descuento del valor de vencimiento. Esto es, valor efectivo de un pagaré es el valor que éste tiene en la fecha en que se descuenta.

Ejemplo 4.35

El 14 de abril, la empresa Productos Químicos Alfa vende diversos reactivos a un laboratorio por un valor total de $53 160. El dueño del laboratorio firma un pagaré con vencimiento el 14 de julio e interés de 24.36% anual. Si el 25 de mayo la empresa descuenta el pagaré en un banco, ¿cuál es la cantidad que recibe sabiendo que la tasa de descuento fue de 27% anual?

Solución:

En primer lugar es necesario obtener el valor de vencimiento del pagaré, ya que el descuento se lleva a cabo sobre dicho valor.

$$M = 53\,160\left[1 + \left(\frac{0.2436}{360}\right)(91)\right] = \$56\,433.42$$

El valor efectivo se calcula directamente utilizando la ecuación (4.8):

$$VE = 56\,433.42\left[1 - \left(\frac{0.27}{360}\right)(50)\right] = \$54\,317.17$$

Ejercicios 4.4

1. Una persona solicita un préstamo por $5 400 a dos meses de plazo, siendo 33% la tasa de descuento. Calcule el descuento y el valor efectivo.
2. Obtenga el descuento y el valor efectivo de 9 200 € (euros) con vencimiento dentro de 120 días, si la tasa de descuento es de 8% anual.

3. Un fabricante de ropa pidió prestado $258 700 a un banco el 19 de abril. El préstamo se descontó a 2.61% mensual y se tiene que liquidar el 15 de junio. ¿Qué cantidad recibió el fabricante?

4. El director de una escuela solicitó un préstamo por $36 000 a 45 días de plazo, descontados a 3.2% mensual, para la compra de un proyector de video.
   a) Si el equipo cuesta $30 600 más 15% de IVA, ¿tendrá suficiente para pagar el proyector?
   b) ¿Cuánto se necesita pedir con el fin de obtener la cantidad exacta para pagar el proyector?

5. Octaviano pide un préstamo por $4 600 a 100 días de plazo y recibe únicamente $4 140. ¿Cuál es la tasa de descuento? Utilice año natural.

6. Daniel firma un pagaré por $6 320 a 3 meses de plazo y recibe un valor efectivo de $5 925. ¿Cuál fue la tasa de descuento? ¿Cuál es la tasa de rendimiento?

7. Se carga un descuento de $858 por un préstamo bancario a 2 meses. Si la tasa de descuento es de 3% mensual, ¿cuánto se debe liquidar en la fecha de vencimiento? ¿Qué cantidad recibe el solicitante?

8. Calcule la fecha de vencimiento de un documento que se descuenta el 3 de mayo con una tasa de descuento de 34.77%. El valor efectivo es de $11 698.66 y el valor de vencimiento es $12 000.

9. ¿Qué tasa de rendimiento obtiene una empresa de factoraje financiero[11] que utiliza una tasa de descuento de 31% en todas sus operaciones de descuento a 45 días de plazo?

10. ¿Cuánto recibe el señor Mejía por un pagaré con valor de vencimiento por $17 000, que descuenta en un banco un mes y medio antes de su vencimiento, si se le aplica una tasa de descuento de 3.11% mensual? ¿Qué tasa de rendimiento ganó el banco?

11. ¿Qué cantidad deberá solicitar en préstamo una persona que necesita 22 000 dólares, a pagar en 3 meses, si hace la solicitud a un banco que le aplica una tasa de descuento de 0.67% mensual?

12. Carlos necesita $10 795 el día 7 de marzo y reintegra el dinero el día 30 del mismo mes. ¿Qué préstamo debe solicitar al banco si la tasa de descuento es de 33%?

[11] Véase el tema especial "Factoraje".

13. ¿Con qué tasa de descuento se negocia un pagaré el 22 de junio si vence el 4 de agosto y tiene un valor de vencimiento de $24 750 y el descuento fue por $1 182.50? ¿Cuál fue la tasa de rendimiento? Utilice año natural.

14. Guillermo solicitó un préstamo quirografario a 3 meses de plazo. Si la tasa de descuento fue de 23.8%, ¿cuál fue la tasa de rendimiento para el banco?

15. Un comerciante descuenta dos pagarés en el banco donde tiene su cuenta de cheques. Uno de los documentos tiene un valor de vencimiento por $28 400 y vence dentro de 13 días, el otro tiene un valor de vencimiento por $31 375 y vence dentro de 28 días. Si el banco aplica una tasa de descuento de 32%, encuentre la cantidad total de dinero que recibirá el comerciante.

16. Hace 20 días se firmó un pagaré con valor de vencimiento por $8 430 y 30 días de plazo. Si hoy se descuenta en un banco a una tasa de descuento de 37.8%, ¿qué cantidad de dinero se recibe? ¿Qué cantidad se descontó?

17. ¿Cuál es el valor de vencimiento de un pagaré que se descuenta a 7.29% trimestral, 37 días antes del vencimiento, si el valor efectivo es de $18 664.45?

18. Calcule en qué fecha se descontó un pagaré con valor de vencimiento por $13 455 y fecha de vencimiento 19 de noviembre, si se recibieron $13 141 y la tasa de descuento fue de 15% semestral.

19. Sara compra un órgano electrónico dando un pago inicial de $5 000 y el resto, $23 450, deberá pagarlo en 60 días con una tasa de interés de 21.9% anual. Como Sara firmó un pagaré, el gerente del establecimiento lo descuenta al día siguiente en su banco, a 24.4%. ¿Qué cantidad de dinero obtiene el gerente? ¿Qué tasa de rendimiento obtiene el banco?

20. El 18 de noviembre del 2003, Ediciones Thor, S. A. descontó un pagaré en un banco que utiliza una tasa de descuento de 30%. Obtenga el valor efectivo. Vea el pagaré en la siguiente página.

21. ¿Cuál es el valor de vencimiento de un pagaré que queda en poder del banco, si el prestatario recibe un valor efectivo de $35 474.90? El plazo es de 45 días, la tasa de descuento es de 27.16% y se cobra una comisión de 2.5% sobre el valor de vencimiento.

P A G A R É

Documento número: Único BUENO POR: $314 500.00

En México, D.F. a 15 de octubre de 2003

Debo(emos) y pagaré(mos) incondicionalmente por este Pagaré a la orden de Ediciones Thor, S.A. en México, D.F. el día 15 de enero del 2004.

La cantidad de:

Trescientos catorce mil quinientos pesos 00/100 Moneda Nacional

Valor recibido a mi(nuestra) entera satisfacción. La suma anterior causará intereses a la tasa de 25% anual hasta la fecha de su vencimiento, y si no es pagada al vencimiento causará una tasa de interés moratorio de 37.5% anual.

Nombre: René Loreto

Dirección: Av. Arquimedes #120

Población: México, D.F. Acepto(amos)

22. ¿Qué tasa de descuento le corresponde a una tasa de rendimiento de 27.13% anual, para un plazo de 5 quincenas?

23. El señor Romo transfirió un pagaré a un prestamista particular. El documento tiene un valor de vencimiento por $68 000 y vence dentro de 2 meses. Si el prestamista desea obtener una tasa de rendimiento de 60% anual, obtenga la tasa de descuento y el valor efectivo recibido por el señor Romo.

Ejercicios Especiales

1. Alfonso compra mercancía en Abarrotera La Fortuna por un total de $21 430, con el fin de venderla en su tienda de abarrotes. Como Alfonso es muy buen cliente, se le concede crédito por 45 días, simplemente firmando un pagaré con una tasa de interés de 22% anual.

   Debido a la necesidad de liquidez, el gerente de la Abarrotera decide descontar el pagaré 19 días después de firmado por Alfonso. El gerente tiene la opción de descontar el documento en el Banco del Sur o en la empresa de factoraje financiero Valores de Occidente. El banco aplica una tasa de descuento de 24% mientras que Valores de Occidente aplica una tasa de descuento de 20%.

a) ¿Cuál opción le conviene más al gerente de la Abarrotera? ¿Qué conclusión puede usted sacar de esto?
b) ¿Cuál sería la mejor opción, si el Banco del Sur descontara el documento a 24% anual, pero como descuento racional?[12]
c) ¿Qué tasa de interés debería utilizar el Banco del Sur para que el descuento racional sea igual al descuento aplicado por Valores de Occidente?

2. Alejandro Jiménez, fabricante de telas, vendió mercancía por un valor total de $167 870 a Armando Durán, comerciante minorista. Debido a un problema, Armando no pudo pagar al vencer la factura y Alejandro aceptó un pagaré a 80 días de plazo con intereses de 33%. Sesenta días antes del vencimiento del pagaré, Alejandro, necesitado de liquidez, descontó el documento en el banco que le maneja sus cuentas. La tasa de descuento fue de 35.8%.

a) ¿Cuánto recibió Alejandro por el pagaré?
b) ¿Cuánto ganó o perdió Alejandro?
c) ¿Cuánto hubiera ganado o perdido de haber descontado el pagaré 70 días antes del vencimiento?
d) ¿Cuánto ganó el banco?
e) Si Alejandro hubiera querido tener una ganancia de $5 000, ¿cuándo debió descontar el pagaré?

3. El 12 de mayo se descuenta un pagaré, recibiéndose una cantidad igual al 92% de su valor de vencimiento. Si la fecha de vencimiento es el 11 de julio, ¿cuál es la tasa de descuento?

Tema especial

CETES

Los **Cetes** (*Certificados de la Tesorería de la Federación*) son títulos de crédito al portador en los cuales se consigna la obligación del Gobierno Federal a pagar su valor nominal a la fecha de su vencimiento. La primera emisión de Cetes se llevó a cabo en enero de 1978 y fueron creados mediante un decreto

[12] Véase el ejemplo 4.19.

publicado en el Diario Oficial de la Federación el 28 de noviembre de 1977. Los Cetes son emitidos por conducto de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, siendo el Banco de México el agente financiero (intermediario) exclusivo para su colocación y redención.

Los Cetes no contienen estipulación sobre pago de intereses, sino que se venden a los inversionistas abajo de su valor nominal. Esto es, se colocan mediante una tasa de descuento.[13] La ganancia que recibe el inversionista es la diferencia entre el precio de compra y el valor nominal o de vencimiento. Por tanto, el rendimiento obtenido es en realidad una ganancia de capital,[14] no un interés. Sin embargo, en la práctica se refiere a los Cetes como un instrumento que paga intereses.

- La tasa de descuento aplicable a los Cetes es variable; es la que corresponde a las condiciones que prevalecen en el momento en el mercado de dinero. En un principio, las tasas de descuento eran fijadas por el Banco de México. Sin embargo, a partir de septiembre de 1982 se estableció un sistema de "subastas", donde el Banco de México participa como vendedor y las casas de bolsa, instituciones de crédito, instituciones de finanzas y otras personas expresamente autorizadas participan como postores. De esta forma, las tasas de descuento son fijadas de acuerdo con las solicitudes y posturas.

Las principales características de los Cetes son:

- Son títulos de deuda del Gobierno Federal al portador y su valor nominal es de $10. Esto es, el Gobierno Federal se compromete a pagar $10 por cada Cete en la fecha de su vencimiento.
- Se compran y venden únicamente a través de casas de bolsa e instituciones de crédito.
- Están garantizados por el Gobierno Federal, por lo que su seguridad es prácticamente total.
- Es una inversión de alta liquidez ya que los Cetes se pueden comprar y vender en cualquier día hábil en lo que se llama el *mercado secundario.*
- Los Cetes pertenecen al mercado de dinero ya que son a corto plazo. Los principales plazos a que se emiten son: 28, 91, 182 y 364 días; sin embargo, en algunas ocasiones se ofrecen emisiones con otros vencimientos. El plazo máximo es de 364 días.

[13] En la jerga bursátil se dice que los Cetes se colocan *bajo par.*
[14] Ganancia de capital es la diferencia obtenida al comprar un título a determinado precio y venderlo tiempo después, a un precio más alto.

- El rendimiento obtenido por las personas físicas por compra-venta de Cetes está exento del impuesto sobre la renta, debido a que se trata de una ganancia de capital; en tanto que las personas morales deben acumular dicha ganancia a su base gravable.
- En todos los cálculos sobre Cetes se considera el año comercial; esto es, el año de 360 días.
- Se emiten semanalmente los días jueves, excepto cuando el jueves es día de descanso obligatorio. Asimismo, ese día se publica un anuncio de colocación de los Cetes en los principales diarios del país. El anuncio muestra los siguientes datos:
  - Número de la emisión
  - Monto de la emisión
  - Fecha de la emisión
  - Fecha de vencimiento
  - Plazo
  - Valor nominal
  - Tasa de descuento promedio ponderado a la que se coloca la emisión
  - Tasa de rendimiento promedio ponderado equivalente a la tasa de descuento

La figura 4.4 muestra un anuncio de colocación de Cetes.
Hay tres cálculos básicos que se llevan a cabo con los Cetes:

- Cálculo del precio de compra de un Cete.
- Cálculo de la tasa de rendimiento.
- Cálculo del precio de un Cete con venta antes de su vencimiento.

Como ejemplo, suponga que se desea saber cuál es el precio de un Cete de la emisión realizada el 20 de marzo del 2003 y con fecha de vencimiento 19 de junio del 2003. Véase el anuncio de colocación (figura 4.4).

$$\text{Descuento} = (10)\left(\frac{0.0863}{360}\right)(91) = \$0.218147$$

$$\text{Precio del Cete} = \text{Valor nominal} - \text{Descuento} = 10 - 0.218147 = \$9.781853$$

Al comprar un Cete de esta emisión particular, el precio que se paga por el Certificado es de \$9.781853. Si el comprador mantiene en su poder el Certificado hasta la fecha de su vencimiento, recibirá \$10 por él. Otra forma de obtener el precio del Cete es por medio de la ecuación (4.8).

Si se compran 85 000 Cetes de esta emisión, se pagarán (9.781853)(85000) = \$831 457.51 y al cabo de 91 días se cobrará (10)(85000) =

Figura 4.4

\$850 000. La diferencia entre el precio de compra y la cantidad cobrada al vencimiento es la ganancia de capital.

$$\text{Ganancia de capital} = 850\,000 - 831\,457.51 = \$18\,542.49$$

La tasa de rendimiento se obtiene por medio de las ecuaciones (4.9) o (4.10). Se deja como ejercicio para el lector verificar que la tasa de rendimiento del Cete es de 8.82% anual.[15]

[15] Por costumbre, en todos los cálculos de Cetes se considera el año comercial. Sin embargo, el año en realidad consta de 365 días y, puesto que los Cetes se negocian día con día, para obtener el rendimiento real éste debe obtenerse sobre el número real de días en el año.

En algunas ocasiones el inversionista vende sus Cetes antes de la fecha de vencimiento. Cuando esto sucede se utiliza una tasa de descuento que puede ser igual, menor o mayor a la tasa de descuento original. Si la tasa de descuento es igual a la tasa de descuento original, la tasa de rendimiento a la compra es igual a la tasa de rendimiento a la venta. Si la tasa de descuento es menor que la tasa de descuento original, el inversionista recibe una tasa de rendimiento mayor de lo pactado. Si la tasa de descuento es mayor que la tasa de descuento original, la tasa de rendimiento es menor que lo pactado. La tasa de descuento depende principalmente de la tasa de la última emisión de Cetes, y en segundo lugar, de otros factores como la oferta o demanda de Cetes y de la cantidad que se pretenda invertir.

Tomemos como ejemplo la emisión a 91 días de plazo, mostrada en la figura 4.4. Suponga que un Cete de esta emisión se vende anticipadamente a los 35 días de adquirido, con una tasa de descuento de 9.87%.

En este caso, un Cete comprado el día de la emisión (20 de marzo del 2003) y conservado hasta su vencimiento (19 de junio del 2003), muestra los siguientes resultados:

$$\text{Precio del Cete} = \$9.781853$$

$$\text{Tasa de rendimiento} = 8.82\%\ \text{anual}$$

Por otra parte, al venderlo faltando 56 días para su vencimiento, el precio del Cete es:

$$\text{Precio del Cete} = 10\left[1 - \left(\frac{0.0987}{360}\right)(56)\right] = \$9.846467$$

Es decir, a los 35 días se vende en \$9.846467 un Cete con precio original de \$9.781853; por tanto, la ganancia de capital es de \$0.064614. La tasa de rendimiento es

$$r = \frac{(0.064614)(360)}{(9.781853)(35)} = 6.794\%\ \text{anual}$$

Para más información sobre los Cetes, visite las siguientes páginas de Internet:

Banco de México: www.banxico.org.mx

Comisión Nacional Bancaria y de Valores: www.cnbv.gob.mx

Bolsa Mexicana de Valores: www.bmv.com.mx

Ejercicios

1. El 21 de enero se lanza una emisión de Cetes con fecha de vencimiento 18 de febrero y tasa de descuento de 9.12% anual. Una persona desea invertir $1 000 000 en Cetes de esta emisión. Calcule:
   a) El precio de un Cete.
   b) El número de Cetes comprados.
   c) La utilidad total obtenida.
   d) La tasa de rendimiento.
2. El señor Avila desea invertir en Cetes y le ofrecen un paquete de 72 500 Cetes a 91 días de plazo. Si la tasa de descuento es de 10%,
   a) ¿Cuánto deberá pagar por el paquete?
   b) ¿Cuánto recibirá en la fecha de vencimiento?
   c) ¿Cuál es la tasa de rendimiento?
   d) ¿De cuánto es la ganancia?
3. Agustín adquiere Cetes de la emisión del 20 de marzo del 2003 y 182 días de plazo (véase la figura 4.4). El 9 de mayo, Agustín vende sus Cetes, con una tasa de descuento de 8.9%. Determine:
   a) El precio inicial del Cete.
   b) La tasa de rendimiento obtenida por Agustín.
   c) El precio del Cete al cual compra el otro inversionista.
   d) La tasa de rendimiento del otro inversionista.
4. El señor Báez desea invertir $800 000 en Cetes a 28 días de plazo. Si desea ganar un rendimiento de 10.11%, calcule:
   a) La tasa de descuento.
   b) El número de Cetes que podrá comprar.
   c) La utilidad obtenida.

Tema especial

Factoraje

El **factoraje financiero** es un mecanismo de financiamiento a corto plazo mediante el cual una empresa comercial, industrial, de servicios o persona física con actividad empresarial, promueve su crecimiento mediante la venta de sus cuentas por cobrar vigentes a un organismo financiero especializado llamado **empresa de factoraje**. La empresa de factoraje compra los documentos aplicando una tasa de descuento sobre el valor de vencimiento.

Mediante el factoraje el empresario logra resolver su problema de liquidez, ya que logra convertir en efectivo sus cuentas por cobrar, representadas por facturas, contrarrecibos, pagarés, letras de cambio u otros documentos análogos.

La palabra **factoraje** proviene de la palabra *factor*. **Factor** (del latín *facio*, hacer; *facere*, el que hace) significa, entre otras acepciones, persona que hace una cosa. Esto es, el factor es la persona que por cuenta de un tercero realiza un acto determinado.

Se sabe que en Babilonia, hacia el año 600 a.C. y en Roma, hacia el 240 a.C., se realizaban operaciones semejantes al factoraje actual. En el siglo XVII d.C. los industriales ingleses ampliaron el factoraje a las colonias del Nuevo Mundo. En ese tiempo, el factoraje era un servicio mercantil que gestionaba pedidos y financiaba al proveedor.

En Nueva York y otros puertos de América, los factores actuaban como agentes aduanales para todo lo que llevaban y traían los barcos. Las oficinas del factor recibieron el nombre de factorías y con el tiempo empezaron a desarrollar actividades industriales.[16]

Con el tiempo, las colonias fueron teniendo mayores necesidades de productos, mismos que no podían surtir las compañías británicas, creando la necesidad de ampliar su capacidad de producción, pidiendo a los factores los pagos por adelantado. De esta manera obtenían el dinero para ampliar la empresa y comienza a definirse la función del factor como aquella que se encarga de financiar a las empresas por medio de la compra de sus carteras.

El factoraje en México es realmente nuevo. Fue a principios de los años sesenta que se fundaron simultáneamente dos empresas de factoraje. Hasta 1980 sólo existían 4 empresas de factoraje en el país, pero en 1986 empezó el desarrollo de este tipo de empresas hasta contar con más de 40 a principios de la década de 1990. Con la crisis económica desatada en diciembre de 1994 muchas empresas de factoraje quebraron.

El factoraje no suple a otras fuentes de financiamiento, ya que por sus características complementa las alternativas existentes. Las empresas de factoraje ofrecen servicios técnicos sumamente especializados, enfocados a lograr la eficiencia del manejo de las cuentas por cobrar.

El factoraje es un sistema integral de apoyo financiero mediante el cual una empresa, llamada **cedente**, cede sus cuentas por cobrar a la empresa de factoraje, obteniendo a cambio un alto porcentaje de efectivo que normalmente oscila entre un 70% y un 95% del valor de las cuentas por cobrar. La empresa de factoraje, posteriormente, realiza la cobranza y le entrega a la empresa cedente la diferencia del porcentaje que no le entregó al inicio, esto es de 5% a 30% restante. El cargo financiero de la operación puede cobrarse en el porcentaje entregado al inicio, o bien, en el que queda por reembolsar.

Existen básicamente dos modalidades de factoraje:

- Factoraje con recurso
- Factoraje sin recurso

[16] De aquí resulta que a una fábrica se le llame *factoría*.

Factoraje con recurso

El cliente queda obligado solidariamente a responder del pago de los derechos de crédito cedidos, en forma puntual y oportuna. Así, en caso de incumplimiento por parte del deudor, el cedente está obligado a garantizar el pago a la empresa de factoraje.

En esta modalidad, la empresa de factoraje adquiere las cuentas por cobrar y efectúa anticipos a cuenta del pago a la empresa cedente, mismo que completa en la fecha en que las cuentas por cobrar son liquidadas por los deudores (compradores o clientes del cedente). El anticipo fluctúa entre 70% y 95% del valor insoluto de las cuentas por cobrar.

Factoraje sin recurso

El cliente no se compromete a responder solidariamente ante la empresa de factoraje por el pago de los derechos de crédito transmitidos; esto es, la empresa de factoraje asume el riesgo de insolvencia de las cuentas por cobrar adquiridas. Lo anterior implica para la empresa de factoraje un conocimiento amplio de los deudores de las cuentas por cobrar y del riesgo que cada una de ellas implica.

En esta modalidad, el cedente obtiene de manera anticipada hasta un 90% de sus cuentas por cobrar.

Ejemplo

Grasas y Aceites, S. A., tiene cuentas por cobrar por un valor total de \$230000 y una fecha de vencimiento de 30 días. El gerente de la planta acude a una empresa de factoraje con el fin de ceder las facturas. ¿Qué cantidad recibirá si la empresa de factoraje le diera un *aforo*[17] de 80%, le aplicará una tasa de descuento igual a la TIIE (9.78% en este momento) más 16 puntos porcentuales y le cobrará una comisión de 0.5%?

Solución:

$$\text{Valor aforado} = (230\,000)(0.80) = \$184\,000$$

$$\text{Descuento} = (184\,000)\left(\frac{0.2578}{360}\right)(30) = \$3\,952.93$$

$$\text{Comisión} = (184\,000)(0.005) = \$920$$

[17] Aforo es la cantidad que se anticipa sobre el valor de las cuentas por cobrar. Como ya se mencionó, esta cantidad varía entre 70% y 95%.

$$\text{Cantidad que recibirá la compañía} = 184\,000 - 3\,952.93 - 920 = \$179\,127.07$$

El resto, \$46 000 (230 000 − 184 000), lo recibirá en cuanto sean cobradas las facturas.

Si el lector desea obtener más información sobre el factoraje financiero, puede visitar las siguientes páginas de Internet:

Asociación Mexicana de Factoraje Financiero y Actividades Similares, A.C.: www.factoraje.com.mx

Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros: www.condusef.gob.mx

Ejercicio

Resuelva el ejemplo suponiendo que el aforo es de 90%, la tasa de descuento es igual a la TIIE vigente al día de hoy más 14 puntos porcentuales y la comisión es de 1%. Busque el valor de la TIIE en la sección financiera de un diario.

Interés compuesto e inflación

Si quieres saber el valor del dinero,
prueba a pedirlo prestado.
Benjamín Franklin
Físico, filósofo y político norteamericano

Objetivos

Al finalizar el estudio de este capítulo el alumno podrá:

- Distinguir la diferencia entre interés simple y compuesto.
- Resolver problemas de interés compuesto.
- Distinguir la diferencia entre tasas de interés nominal, efectiva y equivalente.
- Plantear y resolver problemas de ecuaciones de valor a interés compuesto.
- Explicar el concepto de inflación y resolver problemas relacionados con ella.

5.1 Interés compuesto

En el interés simple el capital que genera el interés permanece constante todo el tiempo que dura el préstamo. En cambio, en el interés compuesto el interés generado en un periodo dado se convierte en capital para el siguiente periodo. Esto es, el interés simple generado al final del primer periodo se suma al capital original, formándose un nuevo capital. Con este nuevo capital se calcula el interés simple generado en el segundo periodo y el interés se suma al capital, y así sucesivamente. La suma total obtenida al final del proceso se conoce como **monto compuesto** o **valor futuro**. A la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le llama **interés compuesto**; esto es:

$$I = F - P \tag{5.1}$$

en donde I representa el interés compuesto; F, el monto compuesto y P, el capital original.

El interés compuesto se puede definir como la operación financiera en la que el capital aumenta al final de cada periodo por adición de los intereses vencidos.

El periodo convenido para convertir el interés en capital se llama **periodo de capitalización** o **periodo de conversión**. Así, por ejemplo, la expresión *periodo de capitalización semestral* (o *periodo de conversión semestral*) significa que el interés ganado por un cierto capital se capitaliza, es decir, se suma al capital al término de cada 6 meses. De igual forma, al decir que un periodo de capitalización es mensual se está indicando que al final de cada mes se capitaliza (se suma al capital) el interés ganado a lo largo del mes. El periodo de capitalización se define como el intervalo de tiempo al final del cual se capitalizan los intereses generados en dicho intervalo.

El interés puede capitalizarse anual, semestral, mensual o semanalmente entre otros. El número de veces que el interés se capitaliza en un año se conoce como **frecuencia de capitalización** o **frecuencia de conversión**. Así, la frecuencia de capitalización para una inversión con capitalización de intereses cada mes es 12; si la capitalización de los intereses es bimestral, la frecuencia de capitalización es 6 y si los intereses se capitalizan trimestralmente, la frecuencia de capitalización es 4.

En la página siguiente se presenta una tabla que muestra las frecuencias de capitalización más comunes.

En todo problema de interés compuesto, al dar la tasa de interés se debe mencionar enseguida el periodo de capitalización. Por ejemplo:

24% anual capitalizable cada semestre
33% capitalizable mensualmente[1]

[1] De acuerdo a lo mencionado en el capítulo 4, se entiende que se trata de una tasa de interés anual con capitalización de intereses en forma mensual.

Si los intereses se capitalizan cada	La frecuencia de capitalización es
Año	1
Semestre	2
Cuatrimestre	3
Trimestre	4
Bimestre	6
Mes	12
Quincena	24
Semana	52
Día	365

1.45% mensual capitalizable cada mes
12.3% trimestral con capitalización quincenal
28% convertible cada mes[2]

El periodo de capitalización es un dato necesario en los problemas de interés compuesto. Al efectuar un cálculo de interés compuesto es necesario que la tasa de interés esté expresada en la misma unidad de tiempo que el periodo de capitalización; es decir, la tasa debe convertirse a **tasa de interés por periodo de capitalización**. Por ejemplo, si en un problema la tasa de interés es de 36% capitalizable cada mes, entonces, a fin de realizar los cálculos, ésta se convertirá en tasa mensual:

$$\frac{36\%}{12} = 3\% \text{ mensual capitalizable cada mes}$$

Otro ejemplo: si el problema marca una tasa de 1.5% quincenal capitalizable cada bimestre, entonces la tasa deberá convertirse a tasa bimestral:

$$(1.5)(4) = 6\% \text{ bimestral capitalizable cada bimestre.}^{3}$$

Ejemplo 5.1

Tomás invierte $500 000 a 15% anual capitalizable cada mes, a un plazo de 6 meses. Calcule:

a) El monto compuesto al cabo de 6 meses.
b) El interés compuesto ganado.
c) Compare el monto compuesto con el monto simple.

[2] Ésta es otra forma de indicar la capitalización de los intereses. El 28% es anual y los intereses se capitalizan cada mes.
[3] Se multiplica por cuatro porque un bimestre consta de cuatro quincenas.

Solución:

a) Como el periodo de capitalización es mensual, es necesario convertir la tasa de interés anual a tasa de interés mensual:

$$i = \frac{15}{12} = 1.25\% \text{ mensual} = 0.0125 \text{ por mes.}$$

Capital original	\$500 000.00
Interés del primer mes = (500 000)(0.0125)(1) =	\$6 250.00
Monto al final del primer mes	\$506 250.00
Interés del segundo mes = (506 250)(0.0125)(1) =	\$6 328.13
Monto al final del segundo mes	\$512 578.13
Interés del tercer mes = (512 578.13)(0.0125)(1) =	\$6 407.23
Monto al final del tercer mes	\$518 985.36
Interés del cuarto mes = (518 985.36)(0.0125)(1) =	\$6 487.32
Monto al final del cuarto mes	\$525 472.68
Interés del quinto mes = (525 472.68)(0.0125)(1) =	\$6 568.41
Monto al final del quinto mes	\$532 041.09
Interés del sexto mes = (532 041.09)(0.0125)(1) =	\$6 650.51
Monto al final del sexto mes	\$538 691.60

El monto compuesto obtenido al final de los 6 meses es de \$538 691.60.

El cálculo anterior se puede expresar en forma tabular, de la siguiente forma:

Mes	Capital al inicio del mes	Interés ganado en el mes	Monto compuesto al final del mes
1	\$500 000.00	\$6 250.00	\$506 250.00
2	\$506 250.00	\$6 328.13	\$512 578.13
3	\$512 578.13	\$6 407.23	\$518 985.36
4	\$518 985.36	\$6 487.32	\$525 472.68
5	\$525 472.68	\$6 568.41	\$532 041.09
6	\$532 041.09	\$6 650.51	\$538 691.60

La tabla anterior recibe el nombre de **tabla de capitalización**.

b) El interés compuesto de la inversión se obtiene usando la ecuación (5.1)

$$I = 538\,691.60 - 500\,000 = \$38\,691.60$$

c) Si la inversión hubiera sido con interés simple, el monto obtenido sería:

$$M = 500\,000\,[1 + (0.0125)(6)] = \$537\,500$$

Comparando los dos montos, se observa que el interés compuesto es mayor que el interés simple. Esto se debe a que en el interés compuesto se ganan intereses sobre los intereses capitalizados. Debido a la capitalización de los intereses, el monto compuesto crece en forma geométrica, mientras que el monto simple crece en forma aritmética.

El ejemplo 5.1 mostró la forma como se puede calcular el monto compuesto utilizando la fórmula del interés simple. Esta forma de calcular el monto compuesto es laboriosa y tardada. Imagine el lector el tiempo que se tardaría en calcular el monto compuesto si el tiempo de inversión fuera de 5 años (¡60 periodos de capitalización!). A fin de ahorrar tiempo, a continuación se deduce una fórmula que permitirá obtener el monto compuesto de manera directa.

Sea P un capital invertido a la tasa de interés compuesto i por periodo de capitalización. Se desea obtener el monto compuesto F al cabo de n periodos de capitalización.

Número de periodo de capitalización	Capital al inicio del periodo	Interés ganado en el periodo	Monto compuesto al final del periodo
1	P	Pi	$P + Pi = P(1 + i)$
2	$P(1 + i)$	$P(1 + i)\,i$	$P(1 + i) + P(1 + i)\,i$ $= P(1 + i)\,[1 + i]$ $= P(1 + i)^2$
3	$P(1 + i)^2$	$P(1 + i)^2\,i$	$P(1 + i)^2 + P(1 + i)^2\,i$ $= P(1 + i)^2\,[1 + i]$ $= P(1 + i)^3$
4	$P(1 + i)^3$	$P(1 + i)^3\,i$	$P(1 + i)^3 + P(1 + i)^3\,i$ $= P(1 + i)^3\,[1 + i]$ $= P(1 + i)^4$

De la tabla anterior se observa que el monto compuesto al final del primer periodo es $P(1 + i)$; el monto compuesto al final del segundo periodo es $P(1 + i)^2$; el monto compuesto al final del tercer periodo es $P(1 + i)^3$, y así sucesivamente, de tal forma que al final de n periodos de capitalización el monto compuesto lo da:

$$F = P(1 + i)^n \tag{5.2}$$

en donde F es el monto compuesto o valor futuro de un capital original P, i es la tasa de interés por periodo de capitalización (expresada en forma decimal) y n es el número total de periodos de capitalización.

Ejemplo 5.2

Determine el monto compuesto después de 4 años, si se invierten $100 000 a una tasa de 18% con capitalización trimestral.

Solución:

La tasa de interés dada es anual y el periodo de capitalización es trimestral. Por tanto, la tasa de interés por periodo de capitalización es:

$$i = \frac{18}{4} = 4.5\% \text{ trimestral capitalizable cada trimestre.}$$

El tiempo de inversión es de 4 años, esto es, 16 trimestres, ya que un año consta de 4 trimestres. Por tanto, hay 16 periodos de capitalización.

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (5.2) se tiene

$$F = 100\,000\,(1 + 0.045)^{16} = 100\,000\,(1.045)^{16}$$

La expresión anterior se puede evaluar utilizando logaritmos o, de manera directa, mediante una calculadora científica, financiera o graficadora.

$$F = \$202\,237$$

Ejemplo 5.3

¿Qué cantidad de dinero se habrá acumulado al cabo de 10 años si se invierten \$28 000 a 1% mensual con intereses capitalizables cada bimestre?

Solución:

La tasa de interés es de 1% mensual, pero pagadera cada bimestre; por tanto, se paga 2% en cada periodo bimestral.

Como el tiempo total de inversión es de 10 años, el número total de periodos de capitalización (n) será de 60 bimestres, ya que cada año consta de 6 bimestres.

Al sustituir los datos en la fórmula (5.2), se tiene:

$$F = 28\,000\,(1 + 0.02)^{60}$$
$$F = \$91\,868.86$$

Ejemplo 5.4

¿Qué interés producirá un capital de \$50 000 invertido a 15% anual compuesto cada 28 días, en 2 años? Utilice el año natural.

Solución:

La palabra *compuesto cada 28 días significa capitalizable cada 28 días*. La tasa de interés por periodo de capitalización se obtiene de la siguiente forma

Un año tiene $\frac{365}{28} = 13.03571429$ periodos de 28 días. Por tanto, la tasa de interés por periodo de capitalización será:

$$\frac{15\%}{13.03571429} = 1.150684931\% \text{ por periodo (de 28 días).}$$

En 2 años de inversión, se tendrán $(2)(13.03571429) = 26.07142858$ periodos de capitalización.

Al sustituir los datos en la ecuación 5.2, se tiene:

$$F = 50\,000\,(1 + 0.01150684931)^{26.07142858}$$

$$F = \$67\,377.43$$

Por tanto:

$$I = 67\,377.43 - 50\,000 = \$17\,377.43$$

Ejemplo 5.5

Si el costo de la energía eléctrica va a aumentar 3.16% mensual durante los próximos 12 meses, ¿de cuánto será el aumento total expresado en porcentaje?

Solución:

Para resolver el problema se debe conocer, o bien suponer, el costo actual de la energía eléctrica. Supongamos que en este momento el kilowatt-hora tiene un costo de \$2.00. Por tanto, el costo al cabo de un año será:

$$F = 2\,(1 + 0.0316)^{12} = \$2.9051$$

El incremento de la energía eléctrica en el año será de $2.9051 - 2.00 = \$0.9051$. Si x representa el porcentaje total de aumento, entonces:[4]

$$(2)(x) = 0.9051$$

$$x = 0.45255 = 45.255\% \text{ de incremento en el año.}$$

El lector puede verificar fácilmente que el incremento total en el año no se obtiene mediante la multiplicación de 3.16% por 12, como posiblemente varios de los lectores hubieran pensado. ¿Puede el lector explicar por qué?

[4] Véase el capítulo 2, sección 2.2.

Ejemplo 5.6

Se invirtieron $200 000 en un banco por 5 años. Cuando se realizó el depósito, el banco pagaba 16.8% capitalizable cada trimestre. Tres años y medio después, la tasa cambió a 14% capitalizable cada mes. Calcule el monto al finalizar los cinco años.

Solución:

Se calcula el monto que se obtiene en 3.5 años (14 trimestres), cuando la tasa de interés es de 16.8% anual con capitalización trimestral:

$$F = 200\,000\left(1 + \frac{0.168}{4}\right)^{14} = \$355\,777.16$$

El monto final se obtiene considerando que $355 777.16 es el capital invertido por un año y medio (18 meses) a la tasa de 14% capitalizable cada mes:

$$F = 355\,777.16\left(1 + \frac{0.14}{12}\right)^{18} = \$438\,381.27$$

Ejemplo 5.7

El 1 de abril de 2000 se efectuó un depósito de $8 000 en un banco que pagaba 25% de interés capitalizable cada mes. El 1 de octubre de 2001 se depositaron $21 000 en la cuenta, y ese mismo día la tasa de interés cambió a 18% capitalizable cada quincena. ¿Cuál fue el saldo el 1 de noviembre de 2003, si la tasa de interés volvió a cambiar el 1 de enero de 2003 a 9% capitalizable cada mes?

Solución:

En primer lugar se obtiene el monto al 1 de octubre de 2001. Del 1 de abril de 2000 al 1 de octubre de 2001 hay 18 meses; por tanto, $n = 18$:

$$F = 8\,000\left(1 + \frac{0.25}{12}\right)^{18} = \$11595.17092$$

El monto compuesto el 1 de octubre de 2001 fue de $11 595.17092. Como ese día se realizó un depósito de $21 000, el saldo es de $32 595.17092. Este saldo es el capital a utilizar para obtener el monto al 1 de enero de 2003.

Ya que la capitalización de los intereses del 1 de octubre de 2001 al 1 de enero de 2003, es quincenal se tiene que $n = 30$ quincenas. Por tanto:

$$F = 32\,595.17092\left(1 + \frac{0.18}{24}\right)^{30} = \$40\,785.41701$$

Para el 1 de enero de 2003, el monto fue de \$40785.41701. Ese día la tasa de interés cambia, tanto en valor numérico como en frecuencia de capitalización. Del 1 de enero de 2003 al 1 de noviembre de 2003, hay 10 meses, por tanto, $n = 10$. El monto al 1 de noviembre de 2003 es:

$$F = 40\,785.41701\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{10} = \$43\,949.65$$

El **valor presente** o **valor actual** de una cantidad de dinero a interés compuesto tiene un significado igual al del interés simple. Esto es, el valor presente de un monto F que vence en fecha futura es la cantidad de dinero que, invertida hoy a una tasa de interés dada, producirá el monto F, después de varios periodos de capitalización.

El concepto de valor presente es uno de los más útiles en la matemática financiera, ya que permite obtener el valor que tienen en el momento actual un conjunto de cantidades que han de vencer en el futuro.

Para calcular el valor presente de un monto compuesto conocido se despeja P de la ecuación (5.2).

Ejemplo 5.8

¿Cuál es el valor presente de \$16000 que vencen dentro de 2 años, si la tasa de interés es de 38% y los intereses se capitalizan cada bimestre?

Solución:

La tasa de interés es de 38% anual, es decir, $\frac{38}{6}$% bimestral. Si en dos años hay 12 bimestres, el número total de capitalizaciones será 12.

Al despejar P de la ecuación (5.2) y sustituir los valores numéricos, se obtiene:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} = \frac{16\,000}{\left(1 + \frac{0.38}{6}\right)^{12}}$$

$$P = \$7657.50$$

Al invertir $7657.50 en este momento, al cabo de 2 años se tendrá $16000, siempre y cuando la tasa de interés sea de 38% con capitalización bimestral. En otras palabras, $7657.50 y $16000 son cantidades *equivalentes* a la tasa 38% con capitalización de intereses cada bimestre, durante 12 periodos de capitalización.

También se puede decir que $16000 son el **valor futuro** de $7657.50, si la tasa de interés es de 38% anual capitalizando los intereses en 12 periodos bimestrales.

Ejemplo 5.9

Luis recibió una herencia de medio millón de pesos y quiere invertir una parte de este dinero en un fondo de jubilación. Piensa jubilarse dentro de 25 años y para entonces desea tener $12000000 en el fondo. ¿Qué parte de la herencia deberá invertir ahora si el dinero estará ganando una tasa de interés compuesto cada mes de 13.25% anual?

Solución:

$F = \$12\,000\,000$

$i = 13.25\%\text{ anual} = \dfrac{13.25}{12}\%\text{ mensual}$

$n = (25)(12) = 300\text{ meses}$

$$P = \frac{12\,000\,000}{\left(1+\dfrac{0.1325}{12}\right)^{300}} = \$445\,107.66$$

Ejemplo 5.10

En la compra de un automóvil, el señor Soto da un enganche de $20000 y acuerda pagar $106577.73 cuatro meses después (cantidad que incluye los intereses por el financiamiento). Si la tasa de interés es de 35% compuesto cada mes, encuentre el precio de contado del automóvil.

Solución:

A los $106577.73 se deben rebajar los intereses del financiamiento, y a la cantidad resultante se le suma el anticipo. Es decir, el precio de contado del automóvil es el anticipo más el valor presente de $106577.73:

$$\text{Precio de contado del automóvil} = 20000 + \frac{106\,577.73}{\left(1+\frac{0.35}{12}\right)^4} = \$115\,000$$

Ejemplo 5.11

Alejandro está vendiendo un departamento y recibe las siguientes ofertas:

- Daniel le ofrece $210 000 de contado.
- Armando le ofrece un anticipo de $100 000 y el saldo en dos pagarés de $71 430 cada uno a 6 y 10 meses de plazo.

Si Alejandro puede invertir a 1.2% mensual con capitalización mensual, ¿cuál alternativa le conviene más?

Solución:

Para comparar las alternativas es necesario trasladar todas las cantidades al mismo instante. Aunque la fecha de comparación puede ser cualquiera, es usual tomar el tiempo presente, ya que es el momento en que se toma la decisión.

El valor presente de la primera alternativa es $210 000 y el valor presente de la segunda es:

$$P = 100\,000 + \frac{71\,430}{(1+0.012)^6} + \frac{71\,430}{(1+0.012)^{10}} = \$229\,894.31$$

A Alejandro le conviene aceptar la oferta de Armando, ya que es $19 894.31 mayor que la oferta de Daniel en el momento actual. Es necesario tener en mente que una modificación en la tasa de interés y/o en el tiempo puede conducir a una decisión distinta.

Ejemplo 5.12

El 10 de marzo de 2003, el señor Aldo prestó al señor Cruz $50 000, cobrándole una tasa de interés de 28.44% con capitalización diaria. El señor Cruz firmó un pagaré con vencimiento al 10 de septiembre de 2003. El 18 de julio de 2003, el señor Aldo descontó el documento en un banco a una tasa de 25.18% capitalizable cada día. ¿Cuánto dinero recibió el señor Aldo por el pagaré? Utilice el año comercial.

Solución:

Observe que el descuento del pagaré se lleva a cabo utilizando interés compuesto; por tal motivo no se utiliza la fórmula de descuento vista en la sección 4.4, del capítulo 4.

Para resolver el problema es necesario, en primer lugar, calcular el monto de la deuda o valor de vencimiento del pagaré:

$$F = 50\,000\left(1 + \frac{0.2844}{360}\right)^{184} = \$57\,819.47$$

La cantidad que recibirá el señor Aldo por parte del banco, será el valor presente del pagaré al 18 de julio, esto es, a 54 días antes del vencimiento.

$$P = \frac{57\,819.47}{\left(1 + \frac{0.2518}{360}\right)^{54}} = \$55\,677.09$$

Ejemplo 5.13

¿A qué tasa de interés compuesto se deben depositar \$11 500 para disponer de \$13 000 en un plazo de 15 meses? Considere que los intereses se capitalizan cada quincena.

Solución:

La solución se obtiene despejando i de la ecuación (5.2), lo cual puede hacerse de dos formas distintas.

Método 1

$$F = P(1 + i)^n$$

$$\frac{F}{P} = (1 + i)^n$$

Sacando raíz n-ésima a ambos lados de la igualdad:

$$\sqrt[n]{\frac{F}{P}} = 1 + i$$

Por tanto,

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1$$

En este caso:

$P = \$11\,500$

$F = \$13\,000$

$n = 30$ quincenas

Sustituyendo los valores numéricos:

$$i = \sqrt[30]{\frac{13\,000}{11\,500}} - 1$$

$$i = \sqrt[30]{1.130434783} - 1 = 0.004095106 = 0.4095106\% \text{ quincenal}$$

$$i = 9.8283\% \text{ anual.}$$

Método 2

$$F = P(1 + i)^n$$

Aplicando logaritmos decimales a ambos lados de la ecuación anterior:

$$\log F = \log P + n \log (1 + i)$$

$$\log F - \log P - n \log (1 + i)$$

Por tanto,

$$\log (1 + i) = \frac{\log F - \log P}{n}$$

Al sustituir los valores numéricos en la expresión anterior obtenemos:

$$\log (1 + i) = \frac{\log 13\,000 - \log 11\,500}{30} = 0.00177485$$

Por tanto:

$$1 + i = \text{antilog } 0.00177485 = 10^{0.00177485}$$

$$1 + i = 1.004095106$$

$$i = 0.004095106 = 0.4095106\% \text{ quincenal}$$

$$i = 9.8283\% \text{ anual.}$$

Ejemplo 5.14

Se desea duplicar un capital en un año. Si la capitalización se lleva a cabo cada semana, ¿a qué tasa de interés debe invertirse?

Solución:

Sea x el capital inicial; por tanto, el valor futuro o monto compuesto será $2x$.

Si la capitalización de los intereses es semanal, en un año de inversión hay 52 capitalizaciones. Por tanto:

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 = \sqrt[52]{\frac{2x}{x}} - 1 = \sqrt[52]{2} - 1$$

$i = 0.01341899$ por semana $= 1.341899\%$ semanal $= 69.7788\%$ anual.

Ejemplo 5.15

En el mes de enero de 2002 la renta diaria de películas en DVD era de \$24, en el videoclub Azteca. Durante el año la renta se incrementó al final de cada trimestre, de la siguiente manera:

Trimestre	Porcentaje de incremento
1	10%
2	7%
3	6%
4	4%

a) Calcule la renta diaria de una película a principios de enero de 2003.

b) Calcule el porcentaje total de aumento en el año.

c) Calcule la tasa trimestral de incremento promedio en el precio de la renta.

Solución:

a) Al tener tasas variables, la fórmula (5.2) no sirve. El problema se resuelve en partes, trimeste a trimestre, como se muestra en la siguiente tabla.

Trimestre	Renta al inicio del trimestre	Incremento al final del trimestre	Renta al final del trimestre
1	\$24.00	\$2.40	\$26.40
2	\$26.40	\$1.85	\$28.25
3	\$28.25	\$1.70	\$29.95
4	\$29.95	\$1.20	\$31.15

A principios de enero de 2003, la renta diaria de películas en DVD costaba \$31.15

b) El aumento total en el año fue de 31.15 − 24 = \$7.15. Si x es el porcentaje total de incremento en el año, entonces:

$$(x)(24) = 7.15$$

$$x = 0.2979 = 29.79\%$$

c) La tasa trimestral promedio es aquella tasa constante que, aplicada 4 veces en el año, convierte la renta diaria de \$24.00 en \$31.15. Por tanto, aplicando la fórmula del ejemplo 5.13, se tiene:

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 = \sqrt[4]{\frac{31.15}{24}} - 1$$

$$i = 0.067361914 \text{ por trimestre} = 6.7362\% \text{ trimestral en promedio}$$

La renta diaria de películas aumentó un 6.7362% cada trimestre, en promedio.

Ejemplo 5.16

¿En cuánto tiempo se triplicará un capital si la tasa de interés es de 18% compuesto cada cuatrimestre?

Solución:

Sea x el capital inicial; por tanto, el monto será $3x$. Al sustituir estos valores en la ecuación (5.2), se tiene:

$$3x = x\left(1 + \frac{0.18}{3}\right)^n$$

$$\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} = \left(1 + \frac{0.18}{3}\right)^n$$

$$3 = \left(1 + \frac{0.18}{3}\right)^n$$

Aplicando logaritmos a ambos lados de la igualdad anterior:

$$\log 3 = n \log\left(1 + \frac{0.18}{3}\right)$$

$$n = \frac{\log 3}{\log 1.06} = 18.85417668 \text{ cuatrimestres}$$

Se requieren 18.85417668 cuatrimestres para triplicar un capital cualquiera, que es un poco más de 75 meses. En la realidad, el capital debe permanecer invertido un número entero de periodos de capitalización. Por tanto, el capital permanecerá invertido hasta que transcurran 19 cuatrimestres (76 meses). El monto obtenido será ligeramente superior al triple del capital.

Ejercicios 5.1

1. Calcule el monto y el interés compuesto al cabo de 6 meses de $60 000, invertidos a 28.8% anual capitalizable cada mes. Elabore la tabla de capitalización.
2. Se invierten $20 000 a 1.12% mensual de interés compuesto cada mes, por tres años y 4 meses. ¿Cuál es la cantidad acumulada al término de ese tiempo? ¿A cuánto asciende el interés ganado?
3. El costo actual del pasaje en el transporte colectivo de la ciudad es de $5 y se prevén aumentos de 15% cada año, durante 5 años. Mediante una tabla de capitalización, diga cuál será el precio del pasaje al cabo de 5 años.
4. En las cuentas de ahorro, el *ABC Bank* de Houston, Texas ofrece una tasa de interés anual de 5.6% capitalizable diariamente. Si se invierten 22 000 dólares el 4 de enero de 2002, ¿cuál fue el valor futuro el 19 de noviembre de 2003? Utilice año real.
5. Un anuncio bancario publicado en la prensa dice: "El dinero que usted invierte con nosotros gana intereses a 9.7% convertible cada día". Encuentre el interés ganado si usted decide invertir $75 730 durante 3 años en dicho banco. Utilice año comercial.
6. Roberto solicita un préstamo de $25 000, a 3 meses de plazo, con una tasa de interés de 13% semestral capitalizable cada mes. En el contrato se estipula que en caso de moratoria, el deudor debe pagar 4% mensual simple sobre el saldo vencido. ¿Qué cantidad deberá pagar Roberto si liquida su deuda a los 3 meses y 15 días?
7. En 1626, Peter Minuit de la Compañía de las Indias Occidentales Holandesas, compró a los indígenas que habitaban la Isla de Manhattan, los derechos de la Isla por una cantidad equivalente a unos 80 dólares de 2002. Si ese dinero se hubiera invertido a 6.5% de interés capitalizable cada año, ¿cuánto dinero se tendría a principios de 2003?
8. Se invirtieron $30 000 a 1.65% mensual de interés compuesto mensualmente por un año y 5 meses.
   a) Obtenga el valor futuro al final de ese tiempo.

b) ¿Cuánto más se ganó con el interés compuesto que lo que se hubiera ganado con el interés simple?

9. El consumo de agua de cierta población se incrementa 2% cada 6 meses. Si actualmente esta población consume 9 150 000 m^3 de agua semestralmente, ¿cuál será el consumo dentro de tres años y medio?

10. Cuando Arturo cumplió 4 años de edad, su abuelo le obsequió \$20 000 para que fueran invertidos y, posteriormente, utilizados en su educación universitaria. Sus padres depositaron el dinero en una cuenta que paga 14.4% con capitalización quincenal. Si la tasa de interés permanece constante, ¿cuánto habrá en la cuenta cuando Arturo esté listo para ir a la universidad, a los 18 años de edad?

11. Una persona tiene que elegir entre invertir \$80 000 a 9% capitalizable cada 14 días, por un año, o hacerlo a 10.4% con capitalización bimestral, por un año. ¿Qué es mejor?

12. Se estima que en las condiciones económicas actuales, una casa, cuyo precio actual es de \$780 000, aumentará su valor cada año en 7% sobre el valor del año anterior, durante los próximos 8 años. ¿Cuál será su valor al final de dicho plazo?

13. Las ventas de un almacén de abarrotes se han estado incrementando a un promedio de 5% mensual. Si el mes pasado se tuvieron ventas por \$1 160 000, ¿cuál será el volumen estimado de ventas para dentro de 6 meses? ¿En qué porcentaje aumentaron las ventas en el lapso de 6 meses?

14. Si usted comienza en un trabajo con un sueldo de \$13 230 al mes y se le va a conceder un aumento de 4% cada cuatrimestre, ¿cuánto estará ganando dentro de 3 años? ¿Cuál será el porcentaje total de aumento en los 3 años?

15. Si el precio del litro de leche va a estar aumentando 2.5% cada mes durante un año, ¿cuál será el aumento total expresado en porcentaje? Si el precio actual del litro de leche es de \$6.80, ¿cuánto costará al cabo de un año?

16. Noemí le presta a su primo \$7 000 durante 6 meses, cobrándole una tasa de interés simple de 1.5% mensual. Al final de este tiempo, deposita el monto obtenido en una cuenta de ahorro que le paga 7% capitalizable cada semana. ¿Cuánto dinero tendrá Noemí al cabo de 2 años?

17. Se depositan \$38 000 en una cuenta que paga 10% capitalizable cada 91 días. La tasa se mantiene constante durante 2 años. Al cabo de ese tiempo, la tasa cambia a 8% capitalizable cada mes. Obtenga el monto después de 2 años más.

18. La población de un país se incrementa en 1.8% cada año. ¿Cuál será la población dentro de 7 años, si la actual es de 5 895 000?

19. ¿En cuál banco conviene invertir $26 000 durante 6 meses: en el Banco del Norte, que paga 16% de interés simple, o en el Banco del Sur, que paga 14.75% anual convertible cada mes?

20. Una inversión de 20 000 € se efectúa a 10 años. Durante los primeros 6 años la tasa de interés compuesto cada semestre es de 8% anual. Posteriormente, la tasa desciende a 5% anual capitalizable semestralmente, durante un año y medio. El resto del tiempo la tasa aumenta a 7% capitalizable cada mes. ¿Cuál es el monto final de la inversión?

21. Obtenga el interés que devenga un capital de $30 000 invertidos el 30 de septiembre, con vencimiento el 30 de diciembre del mismo año. Los intereses se pagan y capitalizan los días 30 de cada mes. La tasa de interés aplicable a la inversión es 80% de la TIIE vigente, que se supone para octubre de 9.45%; para noviembre, 10.42% y para diciembre, 9.8%.

22. Se invierten $18 500 a 7.75% capitalizable quincenalmente. A los 6 meses, la tasa de interés cambia a 8.6% capitalizable cada mes y en ese momento se retiran $4 000. Pasados 10 meses, la tasa se vuelve a incrementar, a 9.15% capitalizable cada mes y en ese momento se depositan $6 000. Obtenga el monto al cabo de 3 años, contados a partir del depósito de los $18 500.

23. ¿Cuál es el valor presente de $14 986.15 a pagar dentro de 5 meses, si la tasa de interés es 2.25% mensual capitalizable cada quincena?

24. ¿Qué cantidad debe invertirse en este momento a 7.8% capitalizable cada mes para convertirse en $1 000 000 en 15 años? ¿Cuánto interés se habrá ganado?

25. Un padre de familia desea tener $100 000 disponibles para cuando su hija ingrese a la universidad, dentro de 3 años, y costear, con ese dinero, los dos primeros semestres de su carrera. ¿Qué cantidad debe depositar hoy en el banco, de tal manera que dentro de 3 años tenga los $100 000? La tasa que le paga el banco es de 14% con capitalización bimestral.

26. Una empresa solicita un préstamo bancario que recibirá de la siguiente forma: $2 000 000 en este momento, $3 000 000 dentro de 3 meses y $8 000 000 dentro de 10 meses. Obtenga el valor presente del préstamo, considerando una tasa de interés de 15% anual capitalizable cada quincena.

27. ¿Cuánto vendía una empresa hace 18 meses si las ventas se han estado incrementando, desde entonces, en 2% trimestral y actualmente vende $1 170 000?

28. Se forma un fideicomiso para la educación universitaria de una niña, mediante un solo pago, de manera que dentro de 17 años haya 100 000 dólares. Si el fondo gana intereses a razón de 7% capitalizable cada cuatrimestre, ¿cuál debe ser el depósito inicial?

29. ¿Qué oferta es más conveniente si deseamos vender una pequeña fábrica de cromado de plástico, si el rendimiento del dinero es de 21% con capitalización mensual?

a) $16 250 000 de contado.

b) $5 000 000 de enganche, $7 000 000 a un año y $9 000 000 a un año y medio.

30. Un pagaré, fechado el 27 de marzo, estipula el pago de $36 189 más intereses de 27% capitalizable cada quincena para dentro de 10 meses. Si el deudor desea saldar su deuda el 27 de septiembre, encuentre la cantidad a pagar suponiendo un rendimiento de 29% compuesto mensual.

31. Calcule el precio de contado de una impresora multifuncional, que se compra a crédito mediante un enganche de 10% del precio de contado y se firma un pagaré que vence dentro de un trimestre por $1 938.40, que incluye intereses a 30% con capitalización mensual.

32. Carlos tiene dos deudas: una por $5 730 a pagar en 14 meses y otra de $9 675 a pagar en 20 meses. Carlos desea pagar sus deudas en este momento, ya que acaba de recibir $12 000 del fondo de ahorro de la empresa donde trabaja. Si el valor del dinero es 1.82% mensual capitalizable en forma bimestral, ¿tendrá lo suficiente para saldar sus deudas?

33. Existe en México una forma de ahorro muy utilizada por las clases media y popular: Las tandas.[5]

La tanda es un mecanismo informal de ahorro y consiste en que un grupo de personas acuerda aportar una cantidad determinada de dinero cada periodo, por ejemplo cada quincena, durante un plazo determinado por el número de personas que entran al grupo. La suma total de las aportaciones, de cada periodo, se entrega a uno de los participantes.

[5] La tanda es conocida por los expertos en finanzas como *ROSCA*, por sus siglas en inglés: Rotating Savings and Credit Association.

Como la cantidad aportada es siempre la misma, esto equivale a una disminución del *valor real* de la suma a lo largo del tiempo. Es decir, las primeras personas que reciben su dinero son las beneficiadas con esta forma de ahorro, mientras que las últimas se perjudicarán, ya que recibirán una cantidad inferior, en términos reales, a lo que hubieran obtenido de poner sus aportaciones periódicas en una institución que pague intereses.

Andrés participa en una tanda y le toca la quincena número 15 para cobrar. Si al cobrar recibirá $10 000, ¿cuál es el valor presente de su tanda, si la tasa de interés promedio es 12% compuesto cada quincena?

34. ¿Qué tiempo es necesario para que $3 600 se conviertan en $9 055.14, a una tasa semestral de 9.44% convertible cada semestre?

35. Una persona deposita 9 270 € en una cuenta de ahorros que paga 5.13% anual convertible cada semana. ¿En qué tiempo se tendrá un monto de 12 300 €?

36. La señora Durán deposita cierto capital en un Pagaré con Rendimiento Liquidable al Vencimiento a 28 días de plazo. El ejecutivo bancario que la atiende le informa que la tasa de interés se mantendrá en 9% anual. Si la señora Durán reinvierte, cada 28 días, el capital junto con los intereses, ¿en cuánto tiempo se duplicará el capital?

37. Si las ventas de una compañía aumentan 13% anual y las ventas de 2002 fueron de 3.54 millones de pesos, ¿cuándo llegarán las ventas a los 10 millones de pesos, suponiendo que la tasa de crecimiento se mantiene constante?

38. ¿Cuánto tiempo le tomará a una inversión incrementarse 45% del capital original, si la tasa de interés es de 2% mensual capitalizable cada cuatrimestre?

39. Pedro es el beneficiario de un fideicomiso establecido para él por sus padres, cuando nació. Si la cantidad original ahorrada fue de $53 000 y actualmente el monto es de $346 172, ¿qué edad tiene actualmente Pedro? El dinero gana un interés de 9.42% capitalizable cada mes.

40. Una compañía realizó una inversión de $4 345 000 hace un año en un nuevo proceso de producción y ha obtenido hasta la fecha una utilidad de $960 700. ¿Qué tiempo hubiera tenido que pasar de haberse colocado este dinero en una inversión financiera a 6.43% anual capitalizable cada mes, para obtener la misma utilidad?

41. ¿A qué tasa de interés se deben depositar $5 000 para disponer de $7 000 en un plazo de 4 años, considerando que los intereses se capitalizan cada 2 meses?

42. César invirtió 14 500 dólares en un negocio y en 18 meses ganó 6 516.25 dólares. Si hubiera invertido el dinero en un banco, ¿qué tasa de interés anual capitalizable cada mes le hubiera proporcionado la misma ganancia?

43. El señor Lomelí tiene la opción de liquidar una deuda pagando $2 300 ahora o pagar $2 800 dentro de 7 meses. Si opta por hacerlo dentro de 7 meses, ¿qué tasa de interés anual se le carga, sabiendo que los intereses se capitalizan cada quincena?

44. La falta de reservas territoriales es la razón principal por la que los precios de los terrenos en la zona metropolitana de Guadalajara se han disparado en los últimos años. Por ejemplo, en Jardines Alcalde en 1998 el precio del metro cuadrado de terreno se ubicaba en un promedio de $800, y a finales de 2002 se cotizó en $2 350, en promedio. Calcule,
a) el porcentaje de aumento en el precio del terreno.
b) el porcentaje anual de aumento promedio.

45. Según una noticia dada a conocer por un periódico, la demanda de gas natural en el 2003 para la zona occidental del centro del país, que comprende Aguascalientes, Colima, Guanajuato, Jalisco, Michoacán, Nayarit, Querétaro, San Luis Potosí y Zacatecas, fue de 546 millones de pies cúbicos. Si se estima que la demanda para el 2011 será de 1 063 millones de pies cúbicos, calcule,
a) la tasa promedio anual de crecimiento.
b) la demanda de gas natural para el año 2015, suponiendo que el porcentaje de crecimiento promedio se mantiene constante.

46. Carlos compró un curso de inglés en CD-ROM en $300 y lo vendió, tres semanas después, en $450. Considerando la capitalización de intereses en forma semanal, ¿qué tasa anual de rendimiento obtuvo?

47. En la sección financiera de un periódico se dio a conocer que el precio del litro de gas LP aumentó cada mes, todo el año 2002, logrando un incremento total de 41% en el año. Si en enero de 2003 el precio de un litro de gas LP era de $3.60, encuentre,
a) el precio de un litro de gas en enero de 2002.
b) el incremento mensual promedio.

48. A Luis, al ser contratado por una compañía, le ofrecen un sueldo de $9 225 al mes y el siguiente plan de aumentos:
8% cuando cumpla 3 meses
12% cuando cumpla 6 meses
18% cuando cumpla un año
a) ¿Cuál será el sueldo de Luis dentro de un año?
b) ¿Cuál será el porcentaje total de incremento en el año?
c) ¿Cuál será el incremento mensual promedio?

49. Si Ángela deposita \$5 000 ahora, \$7 000 dentro de 3 meses y \$10 000 dentro de 5 meses, ¿dentro de cuántos meses, a partir de ahora, su monto total será de \$24 505, si la tasa de interés es de 5.5% semestral capitalizable cada quincena?

50. Las ventas de un fabricante de chocolate crecieron 4.24% en el primer trimestre del año, 5.2% en el segundo trimestre, 5.21% en el tercero y 6.0% en el cuarto. Determine,
a) el porcentaje de crecimiento en el año.
b) el porcentaje de crecimiento promedio mensual.

51. ¿Qué monto se obtiene en 50 meses a la tasa de 1.15% mensual convertible cada mes, si se ganaron intereses por \$18 125.76? ¿Qué capital se invirtió?

52. ¿Cuál era el precio de una computadora hace 4 meses, si actualmente cuesta \$16 931.42 y tuvo los siguientes incrementos mensuales?

Mes	Incremento
1	3.0%
2	5.0%
3	5.0%
4	6.5%

53. El 30 de noviembre de 2002 el gobierno anunció un aumento de 15% al precio de las gasolinas, efectivo a partir del 1 de diciembre de 2002; posteriormente, tendrá incrementos de 1% cada fin de mes, durante todo el 2003. Si el gobierno ha estimado que la inflación de 2003 será de 13%, diga si el incremento acumulado al precio de la gasolina será menor a la inflación esperada.

54. El saldo de una cuenta en el banco era \$84 865.39 el 10 de agosto de 2003. La cuenta se abrió el 10 de julio de 2000 y el 10 de septiembre de 2002 se realizó un depósito por \$19 800. ¿Cuál fue el capital originalmente depositado, si la tasa de interés fue de 13% anual convertible en forma mensual?

55. Miriam deposita cierta cantidad de dinero en un banco que le paga 12% capitalizable cada bimestre. ¿En cuánto tiempo los intereses generados serán iguales a 113% del capital invertido?

Ejercicios especiales

1. David es el gerente de una tienda de artesanías y un cliente le compró hace un mes mercancía por $135 000. Como David le otorgó crédito por 3 meses, el cliente firmó un pagaré en donde se establece una tasa de interés de 29.2% capitalizable cada mes.

   El día de hoy se le presentó una emergencia a David y necesita dinero; por tal motivo, solicita un crédito personal por dos meses a su banco y, como garantía de pago, endosa el pagaré que tiene en su poder.

   El banco acepta la garantía y fija una tasa de interés de 30% capitalizable cada 14 días. ¿Cuánto se le puede prestar como máximo si el banco tiene la política de prestar en una proporción de dos a uno? Es decir, si presta un peso por cada dos que se da en garantía ¿Puede decir cuál es la razón de esta política de préstamo? Investigue en los bancos de su localidad la política establecida para el otorgamiento de un crédito.

2. Beatriz, directora de finanzas de una empresa, solicita un crédito por $1 000 000 al banco que le lleva la mayor parte de sus cuentas, y de acuerdo a los flujos de efectivo esperados, puede pagarlo dentro de 6 meses. Ella tiene como objetivo pagar una tasa máxima de interés de 30% capitalizable cada mes. El ejecutivo del banco que la atiende le dice que su solicitud fue aceptada bajo los siguientes términos: se le prestará el dinero a 3 meses de plazo y una tasa de interés de 24.8% capitalizable cada mes. A los 3 meses el préstamo se renueva, por otros 3 meses, pero la tasa de interés puede cambiar.

   Si Beatriz acepta la operación, ¿qué tasa de interés capitalizable cada mes debe utilizarse en la segunda parte del préstamo, para que la tasa de interés sea de 30% anual para los 6 meses?

3. En esta sección el lector aprendió que el interés compuesto es siempre mayor que el interés simple, para un mismo capital invertido a la misma tasa y mismo tiempo. Con el fin de ver de manera gráfica la diferencia entre ambos tipos de interés, suponga que se depositan $10 000 en la cuenta A, que genera intereses a una tasa de 18% anual simple. Por tanto, el monto al final de *t* años es

$$M = 10\,000(1 + 0.18t) \qquad (1)$$

   Suponga que también se depositan $10 000 en la cuenta *B*, la cual genera intereses de 18% capitalizable cada mes, de modo que el monto compuesto al final de *t* años se obtiene así:

$$F = 10\,000\left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^{12t} \qquad (2)$$

Utilice papel milimétrico, una calculadora graficadora o una computadora para trazar las gráficas de las ecuaciones (1) y (2), utilice un intervalo de tiempo de 0 a 10 años. ¿Qué conclusiones obtiene a partir del análisis de las gráficas?

5.2 Interés compuesto con periodos de capitalización fraccionarios

La fórmula del interés compuesto se dedujo bajo la suposición de un número entero de periodos de capitalización. Sin embargo, como se muestra en el ejemplo 5.4, la fórmula también puede utilizarse si se presentan fracciones de periodo.

Ejemplo 5.17

Obtenga el monto compuesto de 12 500 a 20% capitalizable cada semestre al cabo de 2 años y 3 meses.

Solución:

Como un semestre son 6 meses, y 2 años 3 meses son 27 meses, entonces:

$$n = \frac{27}{6} = 4.5 \text{ semestres}$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (5.2):

$$F = 12\,500\left(1 + \frac{0.20}{2}\right)^{4.5} = \$19\,194.51$$

El procedimiento anterior recibe el nombre de **cálculo teórico** y se utiliza en muchos problemas reales, como el del ejemplo 5.4. Sin embargo, en algunas otras situaciones reales se acostumbra utilizar la llamada **regla comercial**, que consiste en obtener el monto compuesto para los periodos enteros de capitalización y utilizar el interés simple para la fracción de periodo.

Ejemplo 5.18

Resuelva el ejemplo anterior según la regla comercial.

Solución:

Se obtiene el monto compuesto para los 4 periodos semestrales (2 años), que son los periodos completos.

$$F = 12\,500\left(1 + \frac{0.20}{2}\right)^4 = \$18\,301.25$$

En seguida se calcula el monto simple para la fracción de periodo, utilizando como capital el monto compuesto obtenido previamente. La fracción de periodo son 3 meses.

$$M = 18\,301.25\left[1 + \left(\frac{0.20}{12}\right)(3)\right] = \$19\,216.31$$

Como se observa, la regla comercial proporciona un monto mayor que el cálculo teórico. Sin embargo, el cálculo teórico es más justificable desde el punto de vista lógico, matemático y de justicia. En este libro, *a menos que se indique lo contrario, se utilizará el cálculo teórico*.

Así como existen dos formas de obtener el monto compuesto cuando se presentan periodos de capitalización fraccionarios, de igual manera existen dos formas de obtener el valor presente a partir de un valor futuro cuando hay fracciones de periodo: el cálculo teórico y la regla comercial.

Ejemplo 5.19

Encuentre el valor presente de $71 644.95 que vencen dentro de un año y diez meses, si la tasa de interés es de 1.5% mensual capitalizable cada cuatrimestre. Utilice el cálculo teórico y la regla comercial.

Solución:

Cálculo teórico

Un año y diez meses son 22 meses, por tanto, $n = \frac{22}{4} = 5.5$ cuatrimestres, así que:

$$i = 1.5\% \text{ mensual} = 6\% \text{ cuatrimestral}$$

Por tanto:

$$P = \frac{71\,644.95}{(1 + 0.06)^{5.5}} = \$52\,000$$

Regla comercial

Primero se calcula el valor actual para los periodos completos de capitalización; esto es, 5 cuatrimestres:

$$P = \frac{71\,644.95}{(1 + 0.06)^5} = \$53\,537.27$$

Utilizando $53 537.27 como valor futuro se calcula el valor presente, empleando la fórmula del interés simple, para la fracción del periodo, que es de 2 meses:

$$P = \frac{53\,537.27}{1 + (0.015)(2)} = \$51\,977.93$$

Ejercicios 5.2

1. José deposita dinero en el banco a 2 años de plazo y una tasa de interés compuesto cada trimestre de 14% anual. Debido a una emergencia, debe retirar su dinero al cabo de 10 meses. ¿Cuál será el monto que recibirá si depositó $70 000 y suponemos que no hay ningún tipo de penalización? Resuelva mediante el cálculo teórico y la regla comercial.

2. Encuentre el valor futuro de $46 630 en 3 años y 5 meses, a 23% con capitalización anual. Resuelva mediante el cálculo teórico y la regla comercial.

3. Obtenga el monto, utilizando el cálculo teórico, de 22 000 dólares por 7 años y 8 meses, a 10.7% capitalizable cada semestre.

4. Encuentre el monto de 25 000 € a 0.63% mensual capitalizable cada quincena al cabo de 2 años, 8 meses y 20 días. Utilice la regla comercial.

5. El 30 de junio de 2003 el señor Arana solicitó un crédito por $180 000 a 25% con capitalización semestral. ¿Cuánto tuvo que pagar el 18 de septiembre de 2003? Resuelva utilizando el cálculo teórico y la regla comercial.

6. Obtenga el valor presente de $13 360 que vencen dentro de 7 meses y 12 días, si la tasa de interés es de 34% con capitalización mensual. Utilice el cálculo teórico y la regla comercial.

7. ¿Cuál es el valor actual de 25 000 dólares que vencen dentro de 15 meses, si la tasa de interés es de 9.8% anual capitalizable cada dos meses? Utilice la regla comercial.

8. Calcule el valor presente de $139700 que vencen dentro de 4 meses y 25 días, si la tasa de interés es de 26% convertible cada quincena. Utilice el cálculo teórico.

9. Gabriel le compró a Yolanda una casa que cuesta $475 000 de contado. La compra fue a crédito, a un año de plazo y tasa de interés de 25% capitalizable cada mes. Transcurridos 5 meses, Yolanda descuenta el pagaré firmado por Gabriel, en un banco que emplea una tasa de interés de 29% capitalizable cada bimestre. ¿Qué cantidad recibe Yolanda? Utilice la regla comercial.

10. Una persona invierte 85 000 dólares el 20 de enero en un banco estadounidense que ofrece 5.25% anual capitalizable el último día de cada mes. Calcule el monto que podrá retirar el 23 de diciembre del mismo año. Utilice la regla comercial.

11. Paty invirtió $15 600 hace 15 meses en una cuenta que capitaliza los intereses cada bimestre. Si el monto de la cuenta al día de hoy es de $17 877.93, obtenga la tasa de interés anual utilizando el procedimiento teórico.

12. Estela invierte hoy $12 365 a 8.5% anual capitalizable cada quincena. ¿En cuánto tiempo se tendrá un monto de $15 428? Utilice el procedimiento teórico.

Ejercicio especial

1. Resuelva el ejercicio 11 utilizando la regla comercial.

Tema especial

El anatocismo

Por Alberto Calva-Mercado
Director General de Acus Consultores, S.C.

En 1998 se cuestionó la legalidad del **anatocismo** (del griego *aná*, reiterar y *tokinós*, dar en interés), palabra usada en Derecho para indicar la capitalización de los intereses, o sea, la generación de intereses sobre intereses, dando lugar a una gran controversia que llegó hasta la *Suprema Corte de Justicia de la Nación* (SCJN).

En octubre del mismo año, la SCJN falló a favor del anatocismo; esto es, el Pleno de la Suprema Corte legitimó el cobro de intereses sobre intereses en las deudas bancarias.

Pero, ¿qué es esto? ¿Qué implica esto sobre el costo de un crédito? ¿Es correcto o no?

El efecto matemático

Lo más interesante de esto es el efecto matemático que trae consigo la capitalización de los intereses. En el caso de un interés simple, los intereses siempre se calculan sobre el monto inicial. En el caso de un interés compuesto, o una capitalización de intereses, los intereses se calculan sobre el monto inicial más los intereses acumulados.

Veamos el ejemplo de nuestra tabla. Estamos suponiendo que se tiene una tasa de interés de 30% anual, que equivale a una tasa de 2.50% mensual (30% entre 12). En la tabla se muestra el efecto de la capitalización.

TABLA
EL INTERÉS COMPUESTO O LA CAPITALIZACIÓN DE INTERESES
(Tasa anual de 30%)

Mes	Tasa de interés	Saldo inicial	Intereses	Saldo final
1	2.50%	100 000	2 500	102 500
2	2.50%	102 500	2 563	105 063
3	2.50%	105 063	2 627	107 689
4	2.50%	107 689	2 692	110 381
5	2.50%	110 381	2 760	113 141
6	2.50%	113 141	2 829	115 969
7	2.50%	115 969	2 899	118 869
8	2.50%	118 869		121 840
9	2.50%	121 840	3 046	124 886
10	2.50%	124 886	3 122	128 008
11	2.50%	128 008	3 200	131 209
12	2.50%	131 209	3 280	134 489

El mes 1 comenzamos con una deuda de $100 000 y se incurre en $2 500 de intereses (2.50% de 100 000). Esto nos da un saldo final de $102 500. Hasta aquí no hay ninguna diferencia entre el interés compuesto y el interés simple, ya que sólo es el primer periodo.

En el mes 2 comenzamos con una deuda de $102 500 pesos y se incurre en $2 563 de intereses (2.50% de $102 500). Esto da un saldo final de $105 063. Si el interés hubiese sido simple los intereses del segundo mes se habrían calculado sobre $100 000 al igual que en el mes 1.

De esta manera, al finalizar el mes 12 se tiene un saldo de $134 489, que incluye el capital inicial de $100 000 y $34 489 de intereses sobre un esquema compuesto. Si el cobro de intereses hubiera sido simple, el saldo final sería solamente de $130 000 ($100 000 más 30%).

Como se observa, el efecto composición trae consigo un incremento en el saldo final, ya que se pagaron intereses sobre intereses y no sólo sobre el capital inicial. En este caso, el saldo final con la capitalización de intereses es $4 489 mayor o 3.45% mayor.

Vale la pena comentar que el efecto composición no es siempre el mismo. Mientras más pequeña es la tasa, la capitalización de intereses pierde importancia. Por el contrario, mientras mayor es la tasa, la capitalización de los intereses cobra importancia.

Por ejemplo, si partiéramos de $100 000 y aplicáramos una tasa de 9% anual (o 0.75% mensual), entonces el monto final al cabo de 12 meses sería de $109 381 pesos con interés compuesto y de $109 000 con interés simple, lo que implica una diferencia de $381 y de sólo 0.35%.

En cambio, si partiéramos de $100 000 y aplicáramos una tasa de 60% anual (o 5.00% mensual), el monto final al cabo de 12 meses sería de $179 586 con interés compuesto y de $160 000 con interés simple, lo que implica una diferencia de $19 586 o 12.24%.

Como se ve, es definitivamente más caro el interés compuesto que el interés simple.

¿Deben capitalizarse los intereses?

Y llegamos a la pregunta fundamental, ¿deben o no de capitalizarse los intereses en los créditos?

La respuesta creemos que debe ser afirmativa.

¿Por qué? Hay dos razones para ello:

a) La contraparte de un crédito es el ahorrador. Este último si recibe un interés compuesto, o bien lo puede lograr simplemente retirando y reinvirtiendo su dinero cada mes. ¿No parece lógico que ambos lados tengan el mismo tratamiento?

b) Cuando un deudor no paga los intereses entonces ya tiene una deuda nueva. Simplemente debía haber pagado y no lo hizo, por lo que debería de pagar el costo financiero de los recursos que se requieren para apoyar su nueva deuda.

El lector que desee ampliar su conocimiento sobre el tema del anatocismo, visite la página Web de Javier Bonilla en
www.javierbonilla.com/114.html y
www.javierbonilla.com/115.html

5.3 Tasa de interés nominal, equivalente y efectiva

La tasa de interés anual que se capitaliza m veces en un año se llama **tasa de interés nominal** o simplemente **tasa nominal**. La tasa nominal es la tasa de interés convenida en una operación financiera y queda estipulada en los contratos; por esta razón también se llama tasa contractual. Las tasas de interés que se han utilizado hasta el momento, en todos los ejemplos y ejercicios, han sido tasas nominales.

Se dice que *dos tasas de interés anuales con diferentes periodos de capitalización son equivalentes si producen el mismo monto compuesto al final de un plazo dado.* Por ejemplo, al invertir \$1 000 a 25% capitalizable cada trimestre, el monto obtenido al final de dos años será \$1 624.17. Si el dinero se invierte a 24.372774% con capitalización quincenal, al final de dos años se tendrá un monto de \$1 624.17. Como el monto compuesto es el mismo en ambos casos, se dice que las tasas de interés son equivalentes.

Sea i la tasa de interés anual nominal capitalizable, m veces en un año y, sea i_{eq} la tasa de interés anual nominal equivalente capitalizable q veces en un año. Si se invierte \$$P$ a la tasa de i%, el monto al cabo de t años será:

$$F_1 = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$$

La misma cantidad \$$P$ invertida a i_{eq}% proporcionará un monto, al cabo de t años, de:

$$F_2 = P\left(1 + \frac{i_{eq}}{q}\right)^{qt}$$

Por definición de tasa equivalente:

$$F_1 = F_2$$

Por tanto:

$$P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} = P\left(1 + \frac{i_{eq}}{q}\right)^{qt}$$

Es decir:

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} = \left(1 + \frac{i_{eq}}{q}\right)^{qt}$$

Elevando ambos lados de la igualdad anterior a la potencia $\frac{1}{qt}$, se tiene:

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{mt}{qt}} = \left(1 + \frac{i_{eq}}{q}\right)$$

Esto es:

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{q}}-1=\frac{i_{eq}}{q}$$

Por tanto:

$$i_{eq}=\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{q}}-1\right]q \qquad (5.3)$$

Ejemplo 5.20

Halle la tasa de interés nominal con capitalización semestral que sea equivalente a la tasa de 20% capitalizable cada mes.

Solución:

Debemos hallar la tasa nominal anual capitalizable cada semestre que genere el mismo monto compuesto que la tasa nominal anual de 20% capitalizable cada mes.

Si $i = 20\%$ anual, $m = 12$ y $q = 2$, entonces:

$$i_{eq}=\left[\left(1+\frac{0.20}{12}\right)^{\frac{12}{2}}-1\right]2$$

$$i_{eq}=\left[\left(1+\frac{0.20}{12}\right)^{6}-1\right]2=(1.104260424-1)(2)=0.208520848$$

$$i_{eq}=20.852085\%\text{ anual capitalizable cada semestre.}$$

Una tasa equivalente muy utilizada en diversas situaciones financieras es la **tasa de interés anual efectiva** o simplemente **tasa efectiva**, simbolizada como i_e. La *tasa efectiva* se define como la tasa de interés capitalizable una vez al año que equivale a una tasa nominal i capitalizable m veces al año. La tasa efectiva es la tasa de rendimiento que se obtiene al cabo de un año debido a la capitalización de los intereses; esto es, la tasa efectiva refleja el efecto de la reinversión. A la tasa efectiva también se le llama **rendimiento anual efectivo**.

Si un determinado capital se invierte a una tasa de interés capitalizable cada año, el monto compuesto al final del primer año es el mismo que el monto obtenido por interés simple a un año de plazo. Por tal motivo, la tasa efectiva anual también, puede, definirse de la siguiente manera: la tasa efectiva anual es la *tasa de interés simple* que produce el mismo interés en un año que la tasa nominal capitalizada m veces al año.

La fórmula de la tasa efectiva se obtiene de la ecuación (5.3), haciendo que el valor de q sea igual a uno. Esto es:

$$i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 \tag{5.4}$$

Ejemplo 5.21

¿Cuál es la tasa efectiva del dinero invertido a la tasa nominal de 21.4% capitalizable en forma trimestral?

Solución:

$$i = 21.4\% \text{ anual}$$

$$m = 4 \text{ periodos de capitalización en el año.}$$

Por tanto:

$$i_e = \left(1 + \frac{0.214}{4}\right)^4 - 1 = 1.231794214 - 1 = 23.1794\% \text{ anual.}$$

Si una persona invierte dinero a 21.4% anual capitalizable cada trimestre, la tasa de interés realmente ganada es de 23.1794% anual.

Ejemplo 5.22

¿En cuál banco invertiría usted su dinero: en el banco *ABC* que ofrece un 26% con capitalización diaria; o en el banco *XYZ* que ofrece un 27.5% capitalizable cada 28 días?

Solución:

Cuando un inversionista tiene dos o más alternativas de inversión con distintas tasas nominales y diferentes periodos de capitalización, la forma de decidir cuál inversión es la más redituable es comparando las tasas efectivas. En este caso, el banco que proporcione la tasa efectiva más alta, es el que conviene para invertir.

La tasa efectiva en el banco *ABC* es:

Si $i = 26\%$ y $m = 365$ días,

entonces:

$$i_e = \left(1 + \frac{0.26}{365}\right)^{365} - 1 = 29.681\% \text{ anual.}$$

La tasa efectiva en el banco *XYZ* es:

$$\text{Si } i = 27.5\% \text{ y } m = \frac{365}{28} = 13.03571429 \text{ periodos de 28 días,}$$

entonces:

$$i_e = \left(1 + \frac{0.275}{13.03571429}\right)^{13.03571429} - 1 = 31.277\% \text{ anual.}$$

Se escogería el banco *XYZ*.

Ejemplo 5.23

Determine la tasa de interés nominal que produce un rendimiento de 16.1292% anual efectivo, si el interés se capitaliza cada quincena.

Solución:

Se conoce el valor de i_e (0.161292) y el de m (24); por tanto, se despeja i de la ecuación (5.4):

$$i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

$$i_e + 1 = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

$$\sqrt[m]{i_e + 1} = 1 + \frac{i}{m}$$

$$\sqrt[m]{1 + i_e} - 1 = \frac{i}{m}$$

Por tanto:

$$i = \left[\sqrt[m]{1 + i_e} - 1\right]m$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación anterior, se tiene:

$$i = \left[\sqrt[24]{1 + 0.161292} - 1\right](24) = [1.00625 - 1](24)$$

$$i = 15\% \text{ anual capitalizable cada quincena.}$$

Ejemplo 5.24

¿Cuál será el monto de $20 000 en 4 años si se invierten a una tasa efectiva de 8% anual? Los intereses se capitalizan cada mes.

Solución:

Método 1
Al ser la tasa efectiva de interés capitalizable cada año, entonces:

$$F = 20\,000\,(1 + 0.08)^4 = \$27\,209.78$$

Método 2
A partir de la tasa efectiva se obtiene la tasa nominal capitalizable cada mes, como se hizo en el ejemplo 5.23. Utilizando la tasa nominal, se calcula el monto:

$$i = \left[\sqrt[12]{1 + 0.08} - 1\right] 12 = 7.720836\% \text{ anual capitalizable cada mes}$$

Por tanto:

$$F = 20\,000\left(1 + \frac{0.07720836}{12}\right)^{48} = \$27\,209.78$$

En ocasiones es necesario conocer la tasa efectiva para un periodo diferente a un año. En este caso, es necesario modificar la fórmula de tasa efectiva anual. Si en la ecuación (5.4), en lugar de elevar el binomio a la potencia m (número de periodos de capitalización en un año), se eleva a la potencia n (cualquier número de periodos de capitalización), se obtiene la fórmula para la tasa efectiva en un periodo conformado por n periodos de capitalización. Esto es:

$$i_{ep} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^n - 1 \qquad (5.5)$$

donde i_{ep} es la tasa efectiva por periodo, que consta de n periodos de capitalización.

Ejemplo 5.25

Se invierten $85 000 a una tasa nominal de 18% capitalizable cada mes, durante 9 meses. Calcule,

a) El monto al final de los 9 meses.
b) La tasa efectiva anual.
c) La tasa efectiva en el periodo de 9 meses.

Solución:

a)

$$F = P\left(1 + i/m\right)^n$$

$$F = 85\,000\left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^9 = \$97\,188.15$$

b)

$$i_e = \left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^{12} - 1 = 19.561817\% \text{ anual.}$$

c) Para obtener la tasa efectiva en el periodo de 9 meses, se utiliza la ecuación (5.5), donde n es el número de periodos de capitalización en el periodo especificado; en este caso, $n = 9$:

$$i_{ep} = \left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^{9} - 1 = 14.339\% \text{ en el periodo de 9 meses.}$$

Otra forma de obtener la tasa efectiva en el periodo de 9 meses es mediante el cálculo de la tasa de interés necesaria para que un capital de \$85 000 se convierta en \$97 188.15 en el periodo de 9 meses, esto es,

$$i = \frac{I}{(P)(1 \text{ periodo})} = \frac{97\,188.15 - 85\,000}{85\,000} = 14.339\% \text{ en el periodo.}$$

Ejemplo 5.26

La tasa de interés que cobra un banco en los préstamos personales es de 21% capitalizable cada mes. Calcule la tasa efectiva y la tasa efectiva por periodo semestral.

Solución:

La tasa efectiva es la tasa efectiva anual, que se obtiene mediante la ecuación (5.4):

$$i_e = \left(1 + \frac{0.21}{12}\right)^{12} - 1 = 23.1439\% \text{ anual.}$$

La tasa efectiva para el periodo semestral se obtiene mediante la ecuación (5.5), donde $n = 6$, ya que en el periodo semestral hay seis periodos de capitalización:

$$i_{ep} = \left(1 + \frac{0.21}{12}\right)^{6} - 1 = 10.9702\% \text{ por periodo semestral.}$$

Ejercicios 5.3

1. ¿Cuál es la tasa de interés nominal capitalizable cada mes equivalente a la tasa nominal de 38% capitalizable trimestralmente?

2. Obtenga la tasa nominal capitalizable cada cuatrimestre equivalente a la tasa de 27.4% capitalizable cada bimestre.

3. Calcule la tasa anual de interés con capitalización cada 14 días equivalente a la tasa de 18% capitalizable cada 91 días.

4. ¿Cuál es la tasa de interés anual que, capitalizada cada semana, produce igual monto que 11% capitalizable cada mes?

5. Determine la tasa de interés efectiva que se recibe de un depósito bancario, si la tasa nominal es de 11.84% capitalizable cada semana.

6. Calcule la tasa efectiva anual correspondiente a la tasa nominal de 28.157% capitalizable cada 28 días.

7. Encuentre la tasa efectiva anual correspondiente a la tasa de 1.84% quincenal capitalizable cada quincena.

8. El Banco del Norte ofrece 9.75% capitalizable cada día, y el Banco del Sur ofrece 10.53% capitalizable cada mes. ¿Cuál banco escogería usted?

9. El señor Montes desea un préstamo personal a 2 años de plazo y le ofrecen las siguientes opciones:
a) 26% capitalizable cada trimestre.
b) 26.845% capitalizable cada semestre.
¿Qué oferta debe aceptar?

10. ¿Cuál es la tasa nominal que produce un rendimiento de 24.75% anual efectivo, si el interés se capitaliza cada bimestre?

11. Un agiotista desea ganar 80% anual efectivo sobre un préstamo con intereses capitalizables cada mes. Encuentre la tasa nominal que debe cobrar. ¿Cuál será la tasa de interés equivalente si éstos se capitalizaran cada quincena?

12. Una institución bancaria anuncia que otorga una tasa efectiva de 13%. Encuentre la tasa de interés nominal si la capitalización es diaria.

13. ¿Cuál es la tasa nominal que produce un rendimiento de 28.4% anual efectivo, si el interés se capitaliza cada 7 días?

14. Encuentre el monto y el interés compuesto de 36000 dólares invertidos durante 8 años a una tasa efectiva de 7%, si los intereses se capitalizan cada quincena.

15. Calcule el monto de 12000 € en 15 años, si se invierten a una tasa efectiva de 8% anual.

16. Calcule el monto de $100 000 en 9 meses, si se invierten a una tasa efectiva de 10.3813% anual y los intereses se capitalizan cada trimestre.

17. El 11 de mayo se invierten 13 800 dólares a una tasa efectiva de 8.5%. ¿Cuál será el monto el 22 de septiembre del mismo año?

18. ¿Cuánto deberá invertirse ahora para tener $600 000 en dos años, si la tasa de interés es de 15.6% anual efectivo?

19. El gerente de un supermercado necesitará $140 000 para el 15 de diciembre del presente año. ¿Cuánto debe depositar en este momento (9 de abril) en un banco que paga 11.8% de interés efectivo?

20. Lolita solicita un préstamo por $5 400 para la compra de una lavadora y acuerda pagar $6 051.53 al cabo de 6 meses. Si el interés cobrado fue capitalizado cada mes,
a) ¿Qué tasa nominal anual pagó?
b) ¿Qué tasa efectiva pagó?
c) ¿Qué tasa efectiva pagó en el periodo de 6 meses?

21. Juan Pablo tiene dinero invertido en una Sociedad de Inversión que paga intereses diariamente. Durante un periodo de 2 años, en que no realizó depósitos ni retiros, su cuenta pasó de $90 000 a $108 900. Calcule,
a) La tasa nominal anual.
b) La tasa efectiva anual.
c) La tasa efectiva del periodo (de dos años).

22. Patricia invirtió $44 600 a 3 meses de plazo. Si la tasa de interés es de 7% capitalizable cada quincena, encuentre,
a) La tasa de interés por periodo de capitalización.
b) La tasa efectiva anual.
c) La tasa efectiva para el periodo de los 3 meses.

23. Sofía le prestó a un amigo $20 000 a 10 meses de plazo, cobrándole una tasa de interés de 15% capitalizable cada bimestre. ¿Qué tasa efectiva ganó Sofía en el periodo de los 10 meses?

24. El señor Mendoza prestó $62 840 a 28% convertible cada mes, por 5 meses. Determine,
a) El valor futuro al final del periodo.
b) La tasa efectiva por periodo de 5 meses.
c) La tasa efectiva anual.
d) La tasa equivalente con periodo de capitalización bimestral.

25. El precio de contado de una impresora es de $3 320. Se compra a crédito mediante un pago inicial de 10% y $3 210 a los 3 meses de la compra. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva del periodo?

26. Se tiene una tasa nominal de 5% bimestral con capitalización mensual. Calcule la tasa bimestral efectiva.

5.4 Ecuaciones de valor

Hay ocasiones en que un deudor desea reemplazar un conjunto de deudas, previamente contraídas con un determinado acreedor, por otro conjunto que le sea equivalente, pero con otras cantidades y fechas de vencimiento.

Para lograr lo anterior es necesario plantear una **ecuación de valores equivalentes** o simplemente **ecuación de valor**. Una ecuación de valor es una igualdad que establece que la suma de los valores de un conjunto de deudas es igual a la suma de los valores de un conjunto de deudas propuesto para reemplazar al conjunto original, una vez que sus *valores de vencimiento* se han trasladado a una fecha común, llamada **fecha focal** o **fecha de valuación**. La fecha focal, elegida arbitrariamente, nos permite plantear la ecuación de valor.

La ecuación de valor se basa en que el dinero tiene un valor que depende del tiempo. El valor futuro de una cantidad invertida o prestada es mayor que su valor presente debido a los intereses que gana. Inversamente, el valor presente de una cantidad de dinero es menor que su valor futuro debido al descuento racional que ocurre. Por tal motivo, *dos o más cantidades de dinero no se pueden sumar mientras no se hayan trasladado todas a una fecha de comparación, llamada fecha focal.*

Las ecuaciones de valor son una de las técnicas más útiles de la matemática financiera, ya que nos permiten resolver diversos tipos de problemas financieros. Asimismo, son la base para el estudio de las anualidades, que se analizarán en los siguientes capítulos.

Para facilitar la solución de problemas financieros es conveniente utilizar lo que se conoce como **diagramas de tiempo**. Éstos consisten en una línea horizontal con una escala de tiempo en años, meses, días, etc., dependiendo del problema, y en ella se indican los montos de las deudas, tanto originales como propuestas. Las obligaciones originales, por lo general, se colocan arriba del diagrama de tiempo y las nuevas obligaciones se colocan abajo.

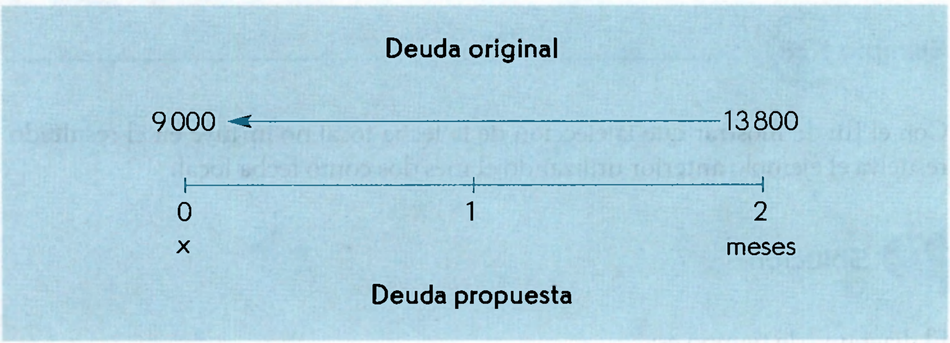
Ejemplo 5.27

Una persona tiene una deuda que debe saldarse de la siguiente forma: $9 000 en este momento y $13 800 dentro de dos meses. Si desea saldar completamente su deuda el día de hoy, ¿cuánto tendrá que pagar, si la tasa de interés es de 24% anual capitalizable cada mes?

Solución:

En primer lugar se establece la fecha focal, ya que ésta es básica para la solución del problema. Si el deudor desea saldar su deuda el día de hoy, no deberá pagar \$22 800 (9 000 + 13 800), pues \$13 800 son un valor futuro, mientras que \$9 000 vencen hoy. Recuerde: *dos o más cantidades no se pueden sumar mientras no coincidan en el tiempo sus valores de vencimiento.* Lo que se puede hacer es calcular el valor presente de \$13 800 y, entonces sí, sumar esta cantidad a los \$9 000. Por tanto, el día de hoy parece una fecha focal *natural* en este problema, aunque puede elegirse cualquier otro momento como fecha focal.

El diagrama de tiempo sería el siguiente:



El 0 representa el momento actual o presente y x representa la cantidad total a pagar el día de hoy para saldar la deuda; esto es, el pago propuesto. Observe cómo el conjunto original de obligaciones se coloca en la parte superior y la obligación propuesta, en la inferior. Esto es con el fin de tener un orden y poder identificar fácilmente las obligaciones originales de las propuestas. La flecha indica que el valor futuro (\$13 800) se traslada al momento actual, debido a que este momento se ha tomado como fecha focal. Trasladar un valor futuro al momento actual significa que se obtiene el valor presente de él, dos meses antes de su vencimiento. Esto es:

$$P = \frac{13\,800}{\left(1 + \frac{0.24}{12}\right)^2} = \$13\,264.13$$

Una vez trasladados los \$13 800 todas las cantidades (9 000, 13 264.13 y x) se encuentran, ya, en una fecha común en la que es posible su comparación y, por tanto, se puede plantear la ecuación de valor siguiente:

Valor total de las deudas originales = Valor total de las deudas propuestas

Esto es:

$$9000 + 13\,264.13 = x$$

Es decir:

$$x = \$22\,264.13$$

El deudor tendrá que pagar $22 264.13 el día de hoy y saldar así su deuda.

$22 264.13 es una cantidad equivalente a la deuda original, ya que al recibir esta cantidad, el acreedor puede tomar los $9 000 pesos que vencen en ese momento y el resto, $13 264.13, al invertirlo a la tasa de 24% capitalizable cada mes, por 2 meses, proporcionará la cantidad que hubiera recibido originalmente si no se hubiese cambiado la forma de saldar la deuda original:

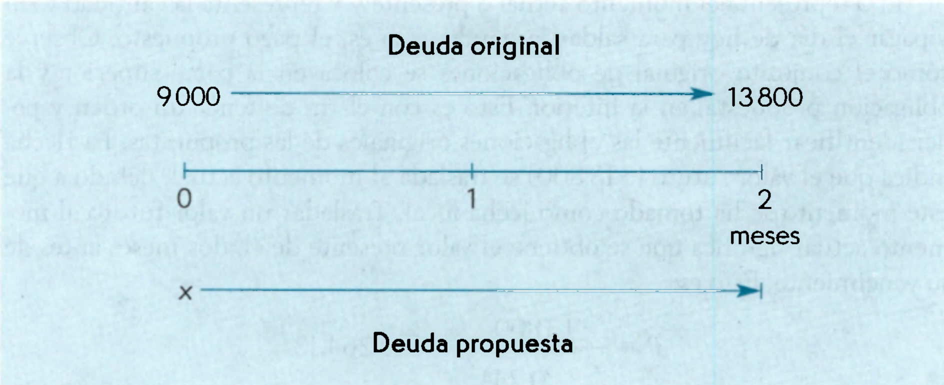
$$F = 13\,264.13\left(1+\frac{0.24}{12}\right)^2 = \$13\,800$$

Ejemplo 5.28

Con el fin de mostrar que la elección de la fecha focal no influye en el resultado, resuelva el ejemplo anterior utilizando el mes dos como fecha focal.

Solución:

El diagrama de tiempo es:



Las flechas muestran que las cantidades $9 000 y $$x$ se trasladan a la nueva fecha focal. $13 800 se encuentra en la fecha focal.

Como la fecha focal se encuentra en el futuro con respecto a las cantidades que se están trasladando, se calcula el monto (F_1) de $9 000 y el monto ($F_2$) de $$x$, a 2 meses de plazo.

$$F_1 = 9\,000\left(1 + \frac{0.24}{12}\right)^2 = \$9\,363.60$$

$$F_2 = x\left(1 + \frac{0.24}{12}\right)^2 = \$1.0404\,x$$

Al realizar el cambio de las cantidades a la fecha focal, las tres cantidades se encuentran en un punto común del tiempo, siendo posible plantear la ecuación de valor:

Valor total de las deudas originales = Valor total de las deudas propuestas

Esto es:

$$F_1 + 13\,800 = F_2$$

Por tanto:

$$9\,363.60 + 13\,800 = 1.0404\,x$$

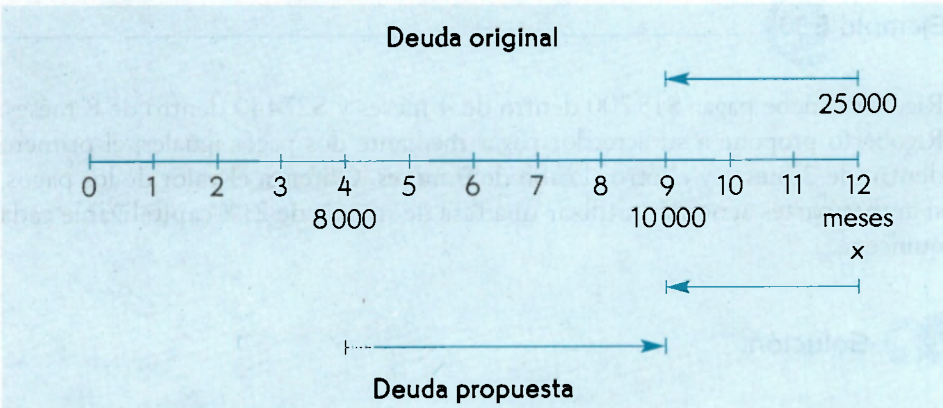
$$x = \frac{9\,363.60 + 13\,800}{1.0404} = \$\,22\,264.13$$

Ejemplo 5.29

Una deuda de $25 000, con intereses incluidos, vence en un año. El deudor da un abono de $8 000 a los 4 meses y otro de $10 000 a los 9 meses. Encuentre la cantidad a pagar en la fecha de vencimiento, si se acuerda un interés de 2.5% mensual capitalizable cada mes.

Solución:

El diagrama de tiempo es el siguiente:



x representa la cantidad a pagar en la fecha de vencimiento. El diagrama muestra que la fecha focal se ubicó en el mes 9.

La fecha focal se encuentra en el pasado con respecto a los \$25 000, por tanto, será necesario calcular el valor presente de \$25 000 a 3 meses de plazo, así que:

$$P_1 = \frac{25\,000}{(1 + 0.025)^3} = \$23\,214.99$$

La fecha focal se encuentra en el futuro con respecto a los \$8 000, por tanto, es necesario calcular el monto de \$8 000 a 5 meses de plazo.

$$F = 8\,000\,(1 + 0.025)^5 = \$9\,051.27$$

La fecha focal se encuentra en el pasado con respecto a \$$x$, por tanto, será necesario calcular el valor presente de \$$x$ a 3 meses de plazo.

$$P_2 = \frac{x}{(1 + 0.025)^3} = \frac{x}{1.076890625}$$

Los \$10 000 se encuentran en la fecha focal, por tanto, no se trasladan. Al encontrarse todas las cantidades en la fecha focal, se plantea la ecuación de valor:

Valor total de las deudas originales = Valor total de las deudas propuestas

Esto es:

$$P_1 = 10\,000 + F + P_2$$

Por tanto:

$$23\,214.99 = 10\,000 + 9\,051.27 + \frac{x}{1.076890625}$$

$$x = \$4\,483.87$$

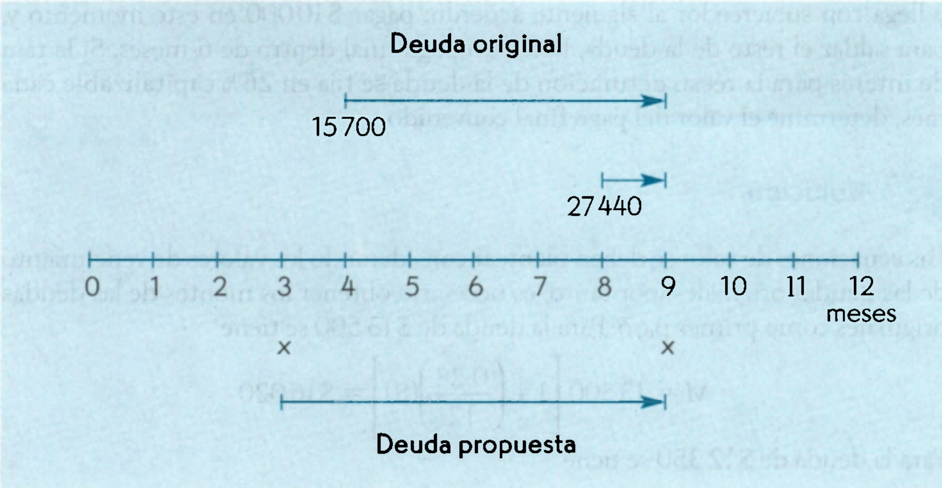
En la fecha de vencimiento se deberá pagar \$4 483.87.

Ejemplo 5.30

Rigoberto debe pagar \$15 700 dentro de 4 meses y \$27 440 dentro de 8 meses. Rigoberto propone a su acreedor pagar mediante dos pagos iguales; el primero dentro de 3 meses y el otro al cabo de 9 meses. Obtenga el valor de los pagos, si ambas partes acuerdan utilizar una tasa de interés de 21% capitalizable cada quincena.

Solución:

El diagrama de tiempo es el siguiente:



x representa el valor de los nuevos pagos. Si la fecha focal se ubica en el mes 9, al trasladar las cantidades a la fecha focal, se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$15\,700\left(1+\frac{0.21}{24}\right)^{10}+27\,440\left(1+\frac{0.21}{24}\right)^{2}=x\left(1+\frac{0.21}{24}\right)^{12}+x$$

$$17\,129.12307+27\,922.30087=1.11020345\,x+x$$

$$45\,051.42394=2.11020345\,x$$

Por tanto:

$$x=\$21\,349.33$$

La deuda original queda sustituida por dos pagos iguales de \$21 349.33 cada uno; el primero con vencimiento a 3 meses y el segundo con vencimiento a 9.

El lector notará que, en este ejemplo, las cantidades no se trasladaron a la fecha focal por separado; en vez de esto, la ecuación de valor se planteó de manera directa. Este método se usará de aquí en adelante.

Observe que, al resolver los ejemplos anteriores, que si la flecha va dirigida hacia la derecha (la cantidad se traslada en sentido positivo) se utiliza la fórmula del monto; si la flecha va dirigida hacia la izquierda (la cantidad se traslada en sentido negativo) se utiliza la fórmula del valor presente.

Ejemplo 5.31

Gabriela contrajo una deuda hace 5 meses por \$13 500 a 28% de interés simple y con fecha de vencimiento dentro de 3 meses. Además, debe pagar otra deuda contraída hace un mes por \$12 350 a 23% capitalizable cada mes y que vence dentro de 2 meses. Gabriela desea modificar las condiciones originales de sus deudas y llega con su acreedor al siguiente acuerdo: pagar $10 000 en este momento y, para saldar el resto de la deuda, hacer un pago final dentro de 6 meses. Si la tasa de interés para la reestructuración de la deuda se fija en 26% capitalizable cada mes, determine el valor del pago final convenido.

Solución:

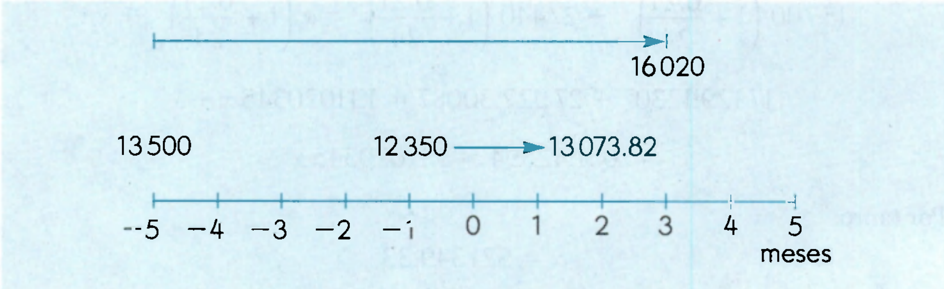
Las ecuaciones de valor se deben plantear considerando los valores de vencimiento de las deudas originales; por tanto, es necesario obtener los montos de las deudas originales como primer paso. Para la deuda de $13 500 se tiene

$$M = 13\,500\left[1+\left(\frac{0.28}{12}\right)(8)\right] = \$16\,020$$

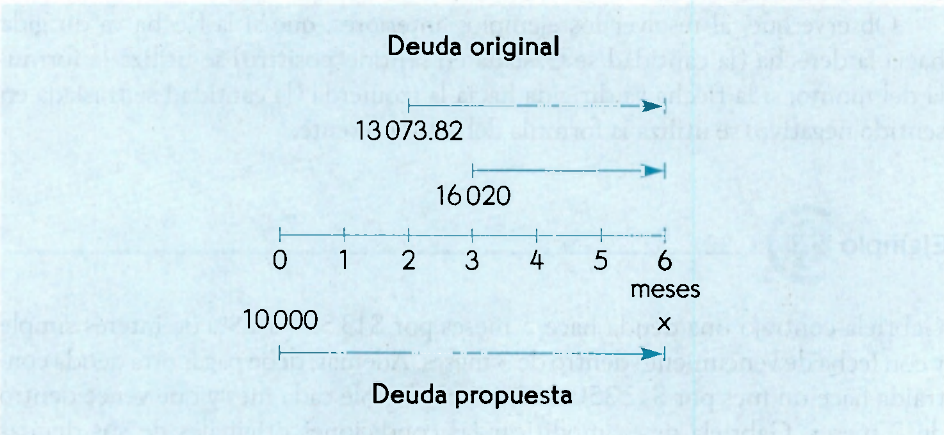
Para la deuda de $12 350 se tiene

$$F = 12\,350\left(1+\frac{0.23}{12}\right)^{3} = \$13\,073.82$$

El diagrama de tiempo es el siguiente:



Una vez conocidos los valores de vencimiento de las deudas originales, se elabora el diagrama de tiempo para la reestructuración de la deuda. Si la fecha focal se ubica en el mes seis, entonces:



x es el valor del pago que se deberá realizar al cabo de 6 meses. La ecuación de valor es:

$$13\,073.82\left(1+\frac{0.26}{12}\right)^4 + 16\,020\left(1+\frac{0.26}{12}\right)^5 = 10\,000\left(1+\frac{0.26}{12}\right)^6 + x$$

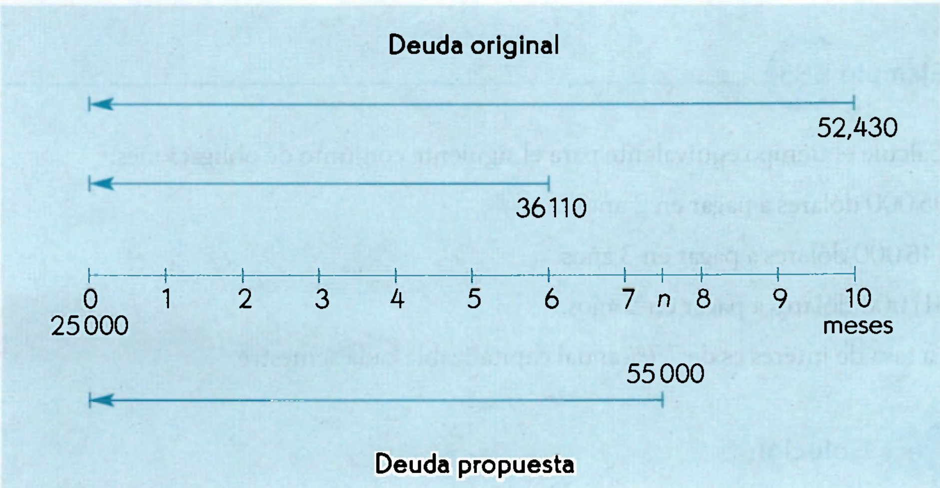
Por tanto:

$$x = \$19\,955.78$$

Ejemplo 5.32

Tomás tiene las siguientes deudas con el señor De la Vega: \$36 110 que pagará dentro de 6 meses y \$52 430 que debe pagar dentro de 10 meses. El señor De la Vega aceptó recibir un abono, el día de hoy, de \$25 000 que Tomás tenía disponibles. Si Tomás desea liquidar su adeudo mediante un segundo pago de \$55 000, ¿en qué fecha deberá realizarlo? La tasa de interés acordada es de 24% capitalizable cada quincena.

Solución:



Observe que el pago de \$55 000 se ha fijado en un momento indeterminado, n, que en este caso es la incógnita. Si la fecha focal se determina que sea el momento actual, se plantea así la ecuación de valor:

$$\frac{36\,110}{\left(1+\frac{0.24}{24}\right)^{12}} + \frac{52\,430}{\left(1+\frac{0.24}{24}\right)^{20}} = 25\,000 + \frac{55\,000}{\left(1+\frac{0.24}{24}\right)^{n}}$$

$$32\,045.79152 + 42\,968.71658 = 25\,000 + \frac{55\,000}{(1.01)^n}$$

Por tanto:

$$\frac{55\,000}{(1.01)^n} = 50\,014.5081$$

Es decir:

$$(1.01)^n = \frac{55\,000}{50\,014.5081} = 1.099680914$$

Aplicando logaritmos:

$$n \log 1.01 = \log 1.099680914$$

Por tanto:

$$n = \frac{\log 1.099680914}{\log 1.01} = 9.54943719 \text{ quincenas} = 9 \text{ quincenas y } 8 \text{ días.}$$

El pago se debe realizar dentro de 9 quincenas y 8 días a partir de la fecha focal; es decir, a partir de hoy.

La fecha en la cual un conjunto de deudas, con fechas de vencimiento diferentes, se liquida mediante un pago único igual a la suma de las deudas, se llama **fecha equivalente**. El tiempo que debe transcurrir desde el momento actual hasta la fecha equivalente se conoce como **tiempo equivalente**.

Ejemplo 5.33

Calcule el tiempo equivalente para el siguiente conjunto de obligaciones:

95 000 dólares a pagar en 2 años.

146 000 dólares a pagar en 3 años.

311 000 dólares a pagar en 5 años.

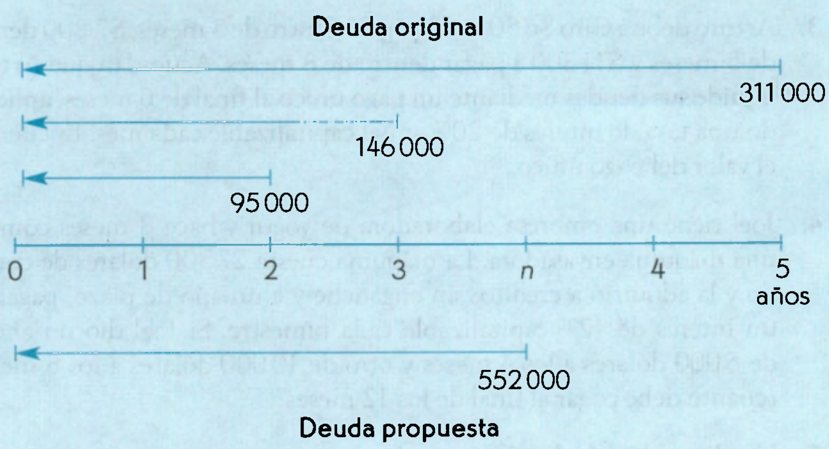
La tasa de interés es de 7.7% anual capitalizable cada semestre.

Solución:

Cuando se pide calcular el tiempo equivalente no se da como dato el valor del pago único que se desea hacer, se entiende que éste es igual a la suma del conjunto original de obligaciones. En este caso es de 552 000 dólares.

$$\frac{95\,000}{\left(1+\frac{0.077}{2}\right)^4} + \frac{146\,000}{\left(1+\frac{0.077}{2}\right)^6} + \frac{311\,000}{\left(1+\frac{0.077}{2}\right)^{10}} = \frac{552\,000}{\left(1+\frac{0.077}{2}\right)^n}$$

$$411\,221.033 = \frac{552\,000}{(1.0385)^n}$$



Por tanto,

$$(1.0385)^n = \frac{552\,000}{411\,221.033} = 1.34234379$$

Aplicando logaritmos,

$$n \log 1.0385 = \log 1.34234379$$

Por tanto,

$$n = 7.793481 \text{ semestres} = 46.760888 \text{ meses.}$$

El pago único que liquida las deudas deberá hacerse a los 3 años, 10 meses, 23 dias a partir del día de hoy.

Ejercicios 5.4

1. La señora López debe pagar al señor Gómez \$6 250 dentro de 2 meses y \$8 630 dentro de 5 meses. Si la señora López desea liquidar su deuda en este momento, ¿qué cantidad deberá pagar si la tasa de interés es de 2.12% mensual capitalizable cada mes?

2. Carlos debe las siguientes cantidades al señor García:
   - \$2 100 a pagar dentro de un mes.
   - \$3 200 a pagar dentro de dos meses.
   - \$4 300 a pagar dentro de tres meses.

   El día de hoy, Carlos recibió el fondo de ahorro de la empresa donde trabaja y desea liquidar su adeudo, de manera anticipada, con el señor García. ¿Qué cantidad tendrá que pagar el día de hoy en sustitución del adeudo original, si la tasa de interés se fija en 30% capitalizable cada quincena?

3. Arturo debe a Ciro \$6 500 que pagará dentro de 3 meses, \$7 800 dentro de 5 meses y \$11 300 a pagar dentro de 8 meses. Acuerdan que Arturo liquide sus deudas mediante un pago único al final de 6 meses, aplicando una tasa de interés de 20% anual capitalizable cada mes. Encuentre el valor del pago único.

4. Joel tiene una empresa elaboradora de yogur y hace 8 meses compró una máquina envasadora. La máquina cuesta 27 300 dólares de contado y la adquirió a crédito, sin enganche y a un año de plazo, pagando un interés de 12% capitalizable cada bimestre. Si Joel dio un abono de 5 000 dólares a los 4 meses y otro de 10 000 dólares a los 6 meses, ¿cuánto debe pagar al final de los 12 meses?

5. Un cliente le debe las siguientes facturas:
   - \$9 400 a pagar en 30 días
   - \$13 850 a pagar en 60 días
   - \$18 635 a pagar en 90 días

   El cliente desea reestructurar su adeudo, de la siguiente forma: hacer un pago de \$35 000 dentro de 90 días y el resto pagarlo en este momento. Si usted acepta, aplicando una tasa de interés de 28% capitalizable cada mes, ¿cuánto le deberá pagar el día hoy?

6. Se tienen los siguientes pagarés:

Valor de vencimiento	Fecha de vencimiento
\$11 730	15 de marzo
\$21 355	20 de abril
\$16 963	25 de mayo
\$23 928	31 de julio

   Se desea sustituirlos por un único pagaré con fecha de vencimiento 31 de octubre. Si el momento actual es 21 de febrero, ¿cuál será el valor de vencimiento del nuevo pagaré, si la operación se efectúa con una tasa de interés compuesto cada día de 34.37%? Utilice año natural.

7. Una deuda de 2 000 000 de dólares que vence en 2 años y otra de \$3 500 000 que vence en 4 años se va a pagar mediante un pago de 300 000 dólares realizado en este momento y tres pagos iguales que se harán dentro de uno, dos y tres años, respectivamente. Si el rendimiento del dinero es de 8% anual capitalizable cada trimestre, ¿de cuánto deben ser los pagos?

8. El señor Curiel debe pagar \$33 000 el día de hoy. Propone a su acreedor saldar la deuda efectuando 3 pagos mensuales iguales y sucesivos,

efectuando el primer pago dentro de un mes. Si la tasa promedio en el mercado financiero es de 19% capitalizable en forma quincenal, encuentre el valor de los pagos.

9. Una fábrica de artículos metálicos adquiere materia prima y acuerda pagarla en 3 pagos de \$173 000 cada uno, a 1, 2 y 3 meses de plazo. Transcurrido un mes, la fábrica se ve obligada a renegociar la deuda mediante dos pagos a 3 y 6 meses, a partir de ese momento. ¿Cuál será el monto de estos pagos, si la tasa de interés acordada es de 2.4% mensual capitalizable cada mes y el segundo pago será 30% mayor que el primero?

10. Sandra compra un automóvil a crédito, cuyo precio de contado es de \$310 000. Acuerda con la agencia automotriz pagar un enganche de 30% y a los 6 meses liquidar el resto pagando una tasa de interés de 16% capitalizable cada mes. Habiendo transcurrido 3 meses, renegocia la deuda y la agencia acepta un pago inmediato de \$60 000 y el resto a pagar dentro de 6 meses. ¿Cuánto tendrá que pagar a los 6 meses de renegociada la deuda?

11. Una persona firmó un pagaré por \$25 160 a 4 meses de plazo, el cual causará intereses de 26% capitalizable cada bimestre. Desea reestructurar su deuda sustituyendo el pagaré original por dos pagarés de igual cuantía con vencimientos a uno y tres meses. ¿Cuál será el valor de los nuevos documentos si la tasa de interés para la reestructuración es de 31.7% capitalizable cada mes?

12. El dueño de un taller compró herramienta especializada por un valor de \$200 000. Dio un enganche de \$40 000 y el resto por pagar a un año, al 25% de interés capitalizable cada mes. Tres meses después dio un abono de \$20 000 y 4 meses después dio otro abono de \$40 000. ¿Cuánto deberá pagar en la fecha de vencimiento, si en el mes diez desea dar un tercer abono igual a 60% del valor del pago que dará en el mes doce?

13. Un deudor desea hacer 4 pagos iguales a 3, 6, 9 y 12 meses, en sustitución de los siguientes pagarés:
    - \$8 695 a pagar en 3 meses con tasa de interés simple de 2% mensual.
    - \$19 930 a pagar en 6 meses con tasa de interés de 28% capitalizable bimestralmente.
    - \$65 000 a pagar en 12 meses con tasa de interés de 30% capitalizable cada quincena.

    Calcule el valor de los pagos iguales, si la tasa de interés empleada para la renegociación de la deuda es de 30% capitalizable cada trimestre.

14. El director de una escuela compró un proyector de acetatos a crédito. El precio de contado es de $5 130, y lo va a pagar mediante 3 abonos mensuales iguales, comenzando dentro de un mes. Si la tasa de interés es de 23.14% capitalizable cada mes, calcule el abono mensual.

15. En determinada fecha, una persona firmó un pagaré por un préstamo de $27 200 a 90 días de plazo e intereses a la tasa de 3.1% mensual simple. 30 días después firmó otro pagaré con valor de vencimiento por $36 700 a 90 días de plazo. 60 días después de haber firmado el primer documento, conviene con su acreedor en pagar $15 000 en ese momento y reemplazar los dos pagarés por uno solo a 90 días, contados a partir de ese momento, a la tasa de 31.2% anual capitalizable cada día. Utilizando año natural, determine el pago único convenido.

16. Martha tiene dos opciones para pagar cierto artículo que compró:
1a. Opción: Pagar $3 000 a los 4 meses y $6 000 a los 8 meses.
2a. Opción: Pagar $$x$ a los 2 meses, $$2x$ a los 4 meses y $$3x$ a los 6 meses.

Si la tasa de interés es de 20% anual capitalizable cada mes y los dos conjuntos de obligaciones son equivalentes, encuentre el valor de los pagos.

17. Víctor, que acaba de cumplir los 15 años de edad, es el beneficiario de un seguro de vida por $1 000 000. El dinero está depositado en un fideicomiso que gana 14.8% compuesto mensualmente, y le será entregado a Víctor en 2 pagos: el primer pago se hará en el momento en que cumpla 18 años y el segundo pago cuando cumpla 21 años. Si el segundo pago debe ser 50% mayor que el monto del primer pago, ¿cuál será el monto de cada uno de los pagos?

18. El día de hoy se cumplen 2 meses de que una persona consiguió un préstamo por $40 000 con tasa de interés de 28% capitalizable cada trimestre y vencimiento a 5 meses. Cuatro meses antes de aquella fecha, había firmado un pagaré con valor de vencimiento por $36 356 a un plazo de 6 meses. Hoy da un abono de $20 000 y acuerda liquidar su adeudo con otro pago dentro de 6 meses. ¿De cuánto será este pago si la tasa de interés se fija en 30% anual capitalizable cada mes? Utilice el procedimiento teórico.

19. Arturo debe pagar $40 000 dentro de 3 meses, $50 000 dentro de 6 meses y $70 000 dentro de 9 meses, más los intereses correspondientes a la tasa de 30.6% capitalizable cada mes. Llega a un acuerdo con su acreedor para pagar de la siguiente forma: un pago dentro de 6 meses, otro dos meses después y un tercer pago un mes después de realizado el segundo. Si la tasa de interés es de 1.5% mensual capitalizable cada quincena, encuentre el valor de los pagos, si el primer pago debe ser 50% del tercero y el segundo debe ser 30% mayor que el primero.

20. Al comprar una camioneta, cuyo precio de contado es de $285 000, se acuerda en pagarla con un enganche y 3 abonos adicionales iguales al enganche, a uno, dos y tres trimestres, con intereses de 21% capitalizable cada mes.
Poco tiempo después de la compra, se hace un nuevo convenio para cancelar la deuda mediante dos pagos: el primero a los 3 meses de la operación de compraventa y el segundo a 6 meses de la misma fecha, por una cantidad igual al triple de la primera. ¿De cuánto será cada pago si se mantiene la misma tasa de interés?

21. Una empresa adeuda a un banco dos pagarés. El primero de ellos es por $600 000 y vence en tres meses, mientras que el segundo es por $750 000 y vence en 5 meses. Si la empresa desea saldar la deuda al banco mediante un pago único por $1 346 981.50, ¿en qué fecha debe realizarse el pago, si la tasa de interés acordada es de 27% capitalizable cada quincena?

22. Al señor Rizo, su deudor le ofrece un pago de $14 500 en sustitución de los siguientes documentos:
- $3 100 que vencen en 3 meses
- $5 300 que vencen en 6 meses
- $7 250 que vencen en 9 meses

¿En qué fecha se debe pagar los $14 500 si la tasa de interés es de 34% convertible cada mes?

23. Se debe pagar una deuda de la siguiente forma: 34 800 dólares al cabo de un año; 45 620 dólares dentro de un año y medio y 76 300 dólares dentro de 2 años. Se desea reemplazar la deuda mediante dos pagos de 80 000 dólares cada uno. Si uno de los pagos se efectuara al cabo de 10 meses, ¿cuándo se debe efectuar el segundo pago, si la tasa de interés es de 10% capitalizable cada bimestre?

24. Se debe pagar la cantidad de $440 cada mes, durante 6 meses, empezando dentro de un mes. Encuentre el tiempo equivalente considerando una tasa de mercado de 21.5% capitalizable cada mes.

25. Una compañía adeuda al banco $270 000 con vencimiento a 10 meses y $510 000 con vencimiento a 20 meses. Desea liquidar la deuda mediante un pago único igual a la suma de los montos que se deben. ¿En qué fecha deberá pagar, si la tasa de interés es de 2.38% mensual con capitalización trimestral? Utilice el procedimiento teórico.

26. Se tienen los siguientes vencimientos:
- $1 200 a 2 meses y 33% de interés simple
- $2 800 a 4 meses a 40% capitalizable cuatrimestralmente

Obtenga el tiempo equivalente utilizando una tasa de interés de 30% compuesto cada quincena.

27. La tienda departamental *La Francesa* ofrece una sala por \$8 700, precio de contado. Puede comprarse a crédito mediante 3 pagos iguales de \$3 014.45 cada uno; el primer pago sería el día de la compra y los otros dos a 1 y 2 meses. ¿Cuál es la tasa de interés anual, si los intereses se capitalizan mensualmente?

28. El día de hoy, el gerente de la cafetería de una universidad compró dos hornos iguales para hacer pizzas. Los hornos los compró a crédito, sin enganche, debiendo pagar \$10 000 al término de 2 meses y \$18 672.67 al final de 4 meses. ¿Cuál es la tasa de interés anual capitalizable cada quincena, si el precio de contado de un horno es de \$12 860?

Ejercicios especiales

Aunque no son muy comunes, los problemas donde se plantean ecuaciones de valor a interés simple, existen. Para plantear una ecuación de valor a interés simple, se utiliza la fórmula del monto simple, en lugar de la fórmula del monto compuesto.

En los problemas de ecuaciones de valor a interés simple es necesario que las partes comprometidas fijen de común acuerdo la fecha focal, ya que en este caso, el resultado varía al tomar una fecha focal u otra.

1. El señor Gómez solicitó un préstamo por \$19 000 a 7 meses de plazo y una tasa de interés simple de 28%. Si realiza un pago de \$8 000 a los 3 meses, ¿cuánto deberá pagar al final de los 7 meses? Utilice como fecha focal,
a) El mes siete.
b) El momento actual.

2. El señor Chávez compra una estufa a crédito, cuyo precio de contado es de \$4 730, bajo las siguientes condiciones: sin enganche, 3 meses para pagar dando abonos mensuales iguales y una tasa de interés simple de 38%. Calcule el valor del abono mensual utilizando como fecha focal el mes dos.

3. La señorita Ruiz tiene las siguientes deudas con un mismo acreedor.
- \$15 000 a pagar dentro de 3 meses.
- \$19 500 a pagar dentro de 7 meses.

Se desea sustituir estos documentos por un único pagaré cuyo valor de vencimiento sea igual a la suma de los valores de vencimiento de los pagarés originales. Encuentre la fecha de vencimiento del nuevo pagaré, si la tasa de interés es de 2.2% mensual y se fija la fecha focal en el momento actual.

4. En una tienda especializada en artículos para bebés se vende una cuna en $1 800 de contado. A crédito, se vende mediante 2 pagos mensuales de $959.21 cada uno. ¿Qué tasa de interés simple anual se cobra en el plan a crédito? Utilice como fecha focal el día de la compra.

5.5 Interés compuesto a capitalización continua

El lector habrá notado que si la tasa de interés nominal permanece constante, pero la capitalización es más frecuente, el monto compuesto también crece. Por tanto, surge la pregunta: ¿qué sucede con el monto compuesto al final de un cierto tiempo cuando la frecuencia con la que el interés se capitaliza crece sin límite; esto es, cuando el número de periodos de capitalización tiende a infinito? Pudiera tenerse la impresión de que el monto también tenderá a infinito; sin embargo, esto no es así. En la siguiente tabla se ve que el monto no tiende a infinito cuando el número de capitalizaciones aumenta, sino que se acerca paulatinamente a un valor determinado; esto es, a un límite.

Monto compuesto para un capital de $1 000 a 30% anual

Frecuencia de capitalización	Periodos por año	Monto compuesto en un año de inversión
Anual	1	1 300.00000000
Semestral	2	1 322.50000000
Trimestral	4	1 335.46914063
Mensual	12	1 344.88882425
Quincenal	24	1 347.35105041
Semanal	52	1 348.69563549
Diaria	365	1 349.69248800
Por hora	8 760	1 349.85187304
Por minuto	525 600	1 349.854254[redacted]
Por segundo	31 536 000	1 349.85720526

Puede demostrarse que existe un punto más allá del cual el monto compuesto no aumentará ya, sin importar la frecuencia con que se capitalice el interés. Este valor recibe el nombre de **monto compuesto a capitalización continua**. Capitalización continua significa que el interés se capitaliza a cada instante. Este valor límite, para el ejemplo mostrado en la tabla, es $1 349.85880758.

Consideremos ahora el caso general. Sea i la tasa de interés anual capitalizable m veces en un año. Si $\$P$ es el capital inicial, entonces el monto compuesto al final de t años será

$$F = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} \tag{1}$$

donde $\frac{i}{m}$ es la tasa de interés por periodo de capitalización y mt es el número total de periodos de capitalización en t años.

Sea $v = \frac{m}{i}$; por tanto, $m = vi$. La expresión (1) se escribe como:

$$F = P\left(1 + \frac{1}{v}\right)^{vit}$$

O bien:

$$F = P\left[\left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v}\right]^{it}$$

La capitalización continua se logra cuando el número de periodos de capitalización aumenta en forma indefinida; es decir, cuando m tiende a infinito ($m \to \infty$). Si m tiende a infinito, entonces v también tiende a infinito. Por tanto, el monto compuesto F, cuando el interés se capitaliza continuamente, está dado por:

$$F = \lim_{v\to\infty} P\left[\left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v}\right]^{it} = P \lim_{v\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v}\right]^{it} = P\left[\lim_{v\to\infty}\left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v}\right]^{it}$$

En cálculo diferencial se demuestra que $\lim_{v\to\infty}\left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v} = e$, donde e es la base de los logaritmos naturales.

Por tanto:

$$F = Pe^{it} \tag{5.6}$$

La ecuación (5.6) es la fórmula general para obtener el monto compuesto cuando el interés se capitaliza continuamente, durante t años.

El lector puede verificar que la ecuación (5.6) y la fórmula (1.2) dada en el capítulo 1, son exactamente la misma. Esto significa que las cantidades que crecen exponencialmente se *capitalizan* en forma continua o, inversamente, el dinero invertido a capitalización continua crece exponencialmente.

Ejemplo 5.34

Se invierten \$50 000 a una tasa de interés de 25% anual. Calcule el monto compuesto después de 3 años si el interés se capitaliza,

a) Trimestralmente.

b) Mensualmente.

c) Semanalmente.

d) Continuamente.

Solución:

a) En tres años hay 12 periodos de capitalización:

$$F = 50\,000\left(1+\frac{0.25}{4}\right)^{12} = \$103\,494.50$$

b) En tres años hay 36 periodos de capitalización:

$$F = 50\,000\left(1+\frac{0.25}{12}\right)^{36} = \$105\,037.49$$

c) En tres años hay 156 periodos de capitalización:

$$F = 50\,000\left(1+\frac{0.25}{52}\right)^{156} = \$105\,659.95$$

d) En tres años, el número de periodos de capitalización tiende a infinito:

$$F = 50\,000e^{(0.25)(3)} = 50\,000e^{0.75} = \$105\,850$$

Como se mencionó, este valor, \$105 850, es una cuota superior para el monto compuesto. No importa qué tan rápido se capitalicen los intereses, \$50 000 invertidos durante 3 años a 25% no podrá ser superior a \$105 850.

Ejemplo 5.35

Encuentre el monto y el interés compuesto de \$24 780 invertidos durante 8 meses a 14.7% capitalizable continuamente.

Solución:

$$P = 24\,780$$
$$i = 14.7\% \text{ anual}$$
$$t = 8 \text{ meses} = \frac{8}{12} \text{ años} = \frac{2}{3} \text{ años.}$$

Sustituyendo en la ecuación (5.6), se tiene

$$F = 24\,780e^{(0.147)(2/3)} = \$27\,331.42$$

El interés compuesto ganado es:

$$I = 27\,331.42 - 24\,780 = \$2\,551.42$$

Ejemplo 5.36

Un pagaré por 1 000 dólares vence dentro de un mes. Calcule su valor presente a 8% compuesto continuamente.

Solución:

Para encontrar el valor presente, se despeja P de la ecuación (5.6)

$$P = \frac{F}{e^{it}}$$

$$P = \frac{1000}{e^{(0.08)(1/12)}} = 993.36 \text{ dólares.}$$

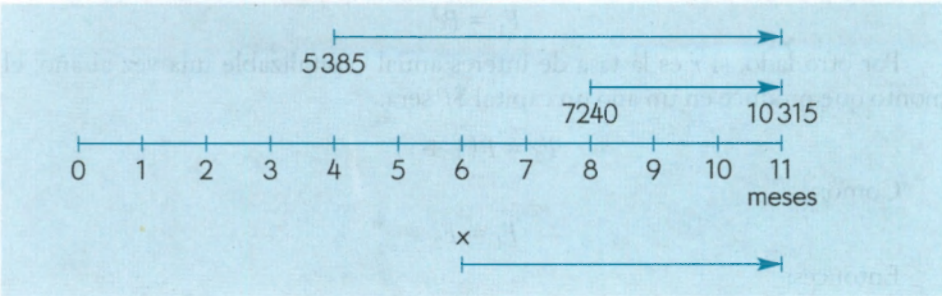
Ejemplo 5.37

¿Por qué cantidad deberá hacerse un pago único dentro de 6 meses que sustituya a los siguientes pagarés?

- \$5 385 a pagar dentro de 4 meses.
- \$7 240 a pagar dentro de 8 meses.
- \$10 315 a pagar dentro de 11 meses.

La tasa de interés es de 2.5% mensual capitalizable continuamente.

Solución:



Si la fecha focal se localiza en el mes 11, entonces se plantea la siguiente ecuación de valor:

$$5\,385e^{(0.025)(7)} + 7\,240e^{(0.025)(3)} + 10\,315 = x\,e^{(0.025)(5)}$$

$$24\,533.74213 = 1.133148453\,x$$

$$x = \$21\,650.95$$

Ejemplo 5.38

¿Qué tasa de interés nominal es necesaria para que un capital se duplique en 3 años, suponiendo que los intereses se capitalizan de manera continua?

Solución:

Si x es el capital a invertir, entonces al cabo de tres años se tendrá un monto de $2\,x$, donde:

$$2\,x = x\,e^{3i}$$

Esto es:

$$2 = e^{3i}$$

$$\ln 2 = (3i)\ln e = 3i$$

Por tanto:

$$i = \frac{\ln 2}{3} = 0.23104906 \text{ por año} = 23.1049\% \text{ anual.}$$

Una tasa nominal capitalizada continuamente, tiene su correspondiente tasa efectiva. Se define la *tasa efectiva anual*, r, como la tasa de interés capitalizable una vez al año que produce el mismo monto compuesto en un año que la tasa nominal i capitalizada continuamente.

Si se invierte $\$P$ a una tasa nominal i capitalizada continuamente, el monto al final de un año será:

$$F_1 = Pe^i$$

Por otro lado, si r es la tasa de interés anual capitalizable una vez al año, el monto que produce en un año un capital $\$P$ será:

$$F_2 = P(1 + r)$$

Como:

$$F_1 = F_2$$

Entonces:

$$Pe^i = P(1 + r)$$

Esto es:

$$e^i = 1 + r$$

Por tanto:

$$r = e^i - 1 \tag{5.7}$$

Ejemplo 5.39

Calcular la tasa efectiva correspondiente a 18% con capitalización continua.

Solución:

$$r = e^{0.18} - 1 = 1.197217363 - 1 = 0.197217363$$

$$r = 19.7217\% \text{ anual.}$$

Ejercicios 5.5

1. Suponga que una cuenta de ahorro paga una tasa nominal de interés de 7% anual. Determine el monto compuesto de $100 000 invertidos por 5 años, si el interés se capitaliza,
   a) Anualmente.
   b) Semestralmente.
   c) Mensualmente.
   d) Semanalmente.
   e) Cada hora.
   f) Diez mil veces por año.
   g) Cien mil veces por año.
   h) Continuamente.

2. Un banco de la Unión Europea ofrece un plan de inversión en el cual paga 5.3% con capitalización continua. ¿Cuál será el monto y los intereses ganados al invertir 37 000 € al cabo de 10 años? Calcule la tasa efectiva ganada por el inversionista.

3. Se invierten 20 000 dólares a una tasa de interés de 8% anual. Calcule el monto y el interés total ganado después de 7 años si,
   a) El interés es simple.
   b) El interés se capitaliza cada mes.
   c) El interés se capitaliza a cada instante.

4. Sandra deposita $27 800 a 15% de interés compuesto cada bimestre, por 2 años. Al cabo de ese tiempo, transfiere el monto a una cuenta que paga 10% compuesto continuamente. Calcule el monto después de 6 años, contados a partir del depósito inicial de $27 800.

5. Dos amigos planean depositar $30 000 en una cuenta de ahorro, durante 10 meses, a 12% anual. Calcule el valor futuro de cada uno, si uno de ellos obtiene un interés capitalizable cada mes y el otro obtiene capitalización continua.

6. David tiene acceso a una inversión que paga 17.75% de interés compuesto en forma continua. ¿Qué será mejor, recibir $60 000 ahora para aprovechar esta oportunidad de inversión o $69 200 dentro de 8 meses?

7. ¿Cuánto debe usted invertir ahora a una tasa de 18% capitalizable a cada instante, para que el monto sea de $50 000 al cabo de un año y medio?

8. Un pagaré con valor de vencimiento por $15 500, vence dentro de 5 meses. Obtenga su valor presente a 16.8% compuesto continuamente.

9. Eye Perfect necesitará 48 600 dólares dentro de un año y 10 meses, plazo en que estará disponible una nueva máquina Excimer Láser para operar defectos visuales. ¿Qué cantidad se debe invertir ahora, a 10.5% compuesto continuamente, para tener la cantidad necesaria para comprar la máquina?

10. Se va a constituir un fideicomiso mediante un solo depósito, de manera que al final de 15 años se tenga $3 000 000 en el fondo. Si el interés se capitaliza continuamente a una tasa anual de 9% durante los primeros 10 años y a 10.7% capitalizable continuamente el resto del tiempo, ¿cuánto se debe depositar en el fondo?

11. Una persona depositó $\$12\,000$ en una cuenta de ahorros, hace 14 meses. En este momento retira su dinero y recibe $\$12\,915.22$. Si la capitalización de intereses fue continua, obtenga la tasa de interés anual nominal y efectiva.

12. Una determinada cantidad de dinero se invierte a tasa fija y el interés se compone continuamente. Después de 70 meses, el dinero se ha triplicado. Obtenga la tasa de interés nominal y efectiva.

13. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva correspondiente a la tasa nominal de 28% capitalizable continuamente?

14. Un banco ofrece una tasa nominal de 25% compuesto cada cuatrimestre para un cierto tipo de inversión. Un banco de la competencia ofrece una tasa de 23% capitalizable continuamente, para el mismo tipo de inversión. ¿Qué banco elegiría usted?

15. Hugo compró un diamante hace 11 años, en $\$935\,000$. Hoy, ese diamante está valuado en $\$3\,258\,000$. Si el diamante aumenta de valor de manera continua, ¿cuál fue la tasa de aumento por año?

16. ¿Qué tasa nominal capitalizable continuamente será equivalente a una tasa efectiva de 20% anual?

17. Gustavo realizó un negocio que le proporcionó una tasa efectiva de 33% anual. ¿Cuál es la tasa equivalente capitalizable continuamente?

18. El Banco del Este ofrece una tasa de interés de 15% capitalizable cada mes. ¿Qué tasa nominal, capitalizable de manera continua, debe ofrecer el Banco del Oeste para que las tasas efectivas de los dos bancos sean iguales?

19. ¿Qué tiempo se tardará en triplicarse un capital si la tasa de interés es de 23% con capitalización continua?

20. ¿En cuánto tiempo un capital de $\$6\,500$ se transformará en $\$7\,979$, si la tasa de interés es 0.635% quincenal capitalizable continuamente?

21. ¿Qué cantidad deberá pagarse dentro de 9 meses, en lugar de pagar $\$5\,870$ dentro de 4 meses, si la tasa de reestructuración es de 3.1% mensual capitalizable en forma continua?

22. Enrique debe pagar $\$5\,000$ dentro de 10 meses. Encuentre el valor de dos pagos iguales, a 3 y 6 meses, que sustituyan la deuda original. Utilice una tasa de interés de 23% capitalizable continuamente.

23. Una persona pidió un préstamo de 16 000 dólares a un año de plazo y una tasa de interés de 12% capitalizable continuamente. Si esta persona dio un abono de 3 000 dólares a los 4 meses y otro de 6 000 dólares a los 7 meses, ¿de cuánto será el pago a realizar a los 12 meses para que la deuda quede saldada?

24. El Producto Nacional Bruto (PNB) de cierto país era de 760 000 millones de dólares en 1995 y de 995 573 millones de dólares en el 2000. Si el PNB crece de manera continua y su crecimiento se mantiene constante, ¿cuál será el PNB en el año 2010?

25. Con respecto al ejercicio anterior, diga cuándo el PNB será de 1 903 millones de dólares, suponiendo que la tasa de crecimiento se mantiene constante.

26. Dentro de cuánto tiempo deberá efectuarse un pago único de $17 000 que sustituya a los siguientes pagarés, tomando en cuenta que la tasa de interés es de 21% compuesto en forma continua.
- $7 850 con vencimiento en 3 meses.
- $9 730 con vencimiento en 8 meses.

27. El 19 de noviembre de 1998, Manuel invirtió 40 000 pesos en un certificado de depósito a 5 años de plazo y una tasa de interés de 26.8% capitalizable continuamente. Cuando éste venció, el 19 de noviembre de 2003, Manuel invirtió el monto total en una cuenta que le paga 6.6% capitalizable cada mes. ¿Cuándo tendrá un monto de $200 964?

5.6 Inflación

Hasta ahora el manejo del dinero se ha llevado a cabo suponiendo una situación económica en donde la inflación tiene un valor igual a cero o, el aumento de precios en los bienes y servicios es tan pequeño y lento que no se toma en cuenta por empresas e individuos al tomar decisiones financieras. Por desgracia, ésta no es siempre una suposición realista; por tanto, es importante saber cómo incorporar la inflación en un análisis financiero.

La **inflación** se define como el incremento continuo y generalizado de los precios de los bienes y servicios producidos por la economía de un país. La inflación ocasiona que el *poder adquisitivo* o *poder de compra* del dinero disminuya. En el artículo 28 de la Constitución y en la Ley del Banco de México se establece que el objetivo prioritario de esta Institución es procurar la estabilidad del poder adquisitivo de la moneda, esto se logra al tener una inflación baja y estable. La inflación es un fenómeno económico nocivo ya que, entre otros,

- Daña el poder adquisitivo de la moneda.
- Afecta el crecimiento económico al hacer más riesgosos los proyectos de inversión y elevar las tasas de interés.
- Dificulta la demanda y el otorgamiento de créditos.

La inflación tiene causas muy complejas, siendo una de ellas el aumento de circulante (monedas y billetes) sin un aumento equivalente de la producción de bienes y servicios. Cuando un gobierno recurre a la emisión de dinero con el fin de cubrir sus déficit presupuestales se generan presiones inflacionarias, debido a que al aumentar el circulante la gente tiene más dinero en su poder; al tener más dinero la tendencia es a gastarlo, aumentando de esta manera la demanda de bienes y servicios y al no haber un aumento de la oferta, los precios suben.

Cuando se habla de una menor inflación, no significa que el nivel general de los precios haya disminuido, sino que su aumento ha sido a un ritmo menor. Cuando los precios de los bienes y servicios bajan, el fenómeno se conoce como **deflación**.

El Banco de México mide la inflación mediante el **Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC)**, el cual es un indicador económico del *crecimiento promedio* de los precios, de un periodo a otro, de una canasta de bienes y servicios representativa del consumo de los hogares mexicanos.

El Banco de México publica el INPC en el Diario Oficial de la Federación los días 10 y 25 de cada mes o, en su caso, el día hábil inmediato anterior a esas fechas. Un día previo a la publicación en el Diario Oficial, se publica un boletín de prensa que se difunde en la página Web del Banco Central: www.banxico.org.mx

El Banco de México inició en 1927 la elaboración del INPC. En ese año el índice se obtuvo con los precios mensuales de 16 artículos alimenticios de la Ciudad de México. Actualmente, el INPC se hace mediante un seguimiento continuo de los precios de productos específicos, éstos se agrupan para formar conjuntos aproximadamente homogéneos de bienes y servicios denominados *genéricos*. En la práctica, cada mes se recopilan 170 000 cotizaciones directas de productos específicos en 46 ciudades del país, se agrupan en 315 conceptos genéricos. Los precios de estos productos se promedian de manera ponderada con base en la Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH) realizada por el INEGI en el año 2000, formando 8 subíndices:

- Alimentos, bebidas y tabaco.
- Ropa, calzado y accesorios.
- Vivienda.
- Muebles, aparatos y accesorios domésticos.

- Salud y cuidado personal.
- Transporte.
- Educación y esparcimiento.
- Otros servicios.

La agrupación de todos los subíndices y, en consecuencia, de todos los genéricos integra el INPC.

Existe un subíndice especial del INPC, el **Índice de Precios de la Canasta Básica (IPCB)**. Este subíndice lo forman 79 conceptos genéricos y mide el incremento de los precios de los productos básicos para la supervivencia de una familia.

El lector interesado en obtener más información sobre la metodología empleada en el cálculo del INPC puede visitar la página Web del Banco de México, www.banxico.gob.mx/inpc, donde encontrará la *Guía sobre el Indice Nacional de Precios al Consumidor*.

La inflación se describe usualmente en términos de un porcentaje quincenal, mensual o anual que representa la tasa en que han aumentado los precios esa quincena, mes o año en consideración, en relación con los precios de la quincena, mes o año anterior; por tanto, la inflación muestra un **efecto compuesto**. Por ejemplo, la tasa de inflación en 2002 fue de 5.70% en el año; esto significa que los precios de la canasta de consumo utilizada para el cálculo de la inflación aumentaron 5.70% en promedio ese año, en relación con 2001. Es necesario dejar bien claro que el INPC mide el aumento promedio ponderado de los bienes y servicios utilizados en la elaboración del índice; por tanto, algunos bienes y servicios tuvieron incrementos por arriba de 5.70% y otros menos de 5.70%.

El INPC también se expresa como una cifra que indica el incremento de los precios en relación con un periodo o año base,[6] al cual se le asigna arbitrariamente el valor de 100. Hasta junio de 2002 el año base utilizado fue 1994 (Base 1994 = 100). A partir de julio de 2002, se utiliza como base la *segunda quincena de junio de 2002*; esto es, el INPC para la segunda quincena de junio del 2002 se fijó en 100. Por ejemplo, el INPC en marzo de 2003 fue de 104.2610; esto significa que la inflación ha aumentado en 4.261% en el periodo que va de la segunda quincena de junio de 2002 a fines de marzo de 2003.

Ejemplo 5.40

Si el índice de precios de diciembre del año 2000 fue de 93.2482 y el de diciembre de 2002 fue de 102.9040, calcule la tasa de inflación ocurrida en esos dos años.

[6] Año base de un índice de precios es el punto en el tiempo a partir del cual se efectúan las comparaciones de los cambios en los precios. También se conoce como año o periodo de referencia.

Solución:

La tasa de inflación se simboliza mediante la letra griega λ (lambda). Sea λ la tasa de inflación ocurrida entre diciembre de 2000 y diciembre de 2002. Aplicando lo estudiado en el capítulo 2, sección 2.2, se tiene:

$$93.2482 + (\lambda)(93.2482) = 102.9040$$

Por tanto:

$$\lambda = 0.1035 = 10.35\%$$

La tasa de inflación λ puede calcularse mediante:

$$\lambda = \frac{I_2}{I_1} - 1 \tag{5.8}$$

en donde I_1 es el índice de precios al inicio de un periodo e I_2 es el índice de precios al final del periodo. Por tanto,

$$\lambda = \frac{102.9040}{93.2482} - 1 = 0.1035 = 10.35\%$$

Ejemplo 5.41

La economía mexicana experimentó una inflación anual de 51.97% en 1995. Suponiendo que esta tasa de inflación se hubiera mantenido constante a partir de entonces, obtenga el precio que habría alcanzado un escritorio a principios de enero de 2003, se sabe que en los primeros días de enero de 1996 tenía un precio de $780.

Solución:

Ya se mencionó que la inflación tiene un efecto compuesto; esto es, se comporta como un interés compuesto. En consecuencia, debido a la inflación, el precio del escritorio aumenta a una tasa de 51.97% anual. Por tanto:

$$F = 780\,(1 + 0.5197)^7 = \$14\,601.57$$

Ejemplo 5.42

La inflación del mes de enero de 2002 fue de 0.92%. Si esta tasa de inflación mensual hubiera sido la misma todos los meses del año, ¿qué tasa de inflación acumulada se hubiera tenido a fin de año?

Solución:

Para obtener la tasa de inflación acumulada en el año (tasa de inflación anualizada) se utiliza la fórmula (5.2), suponiendo un valor para P y haciendo que $\lambda = i$. Sea:

$P = \$100.$
$n = 12$ meses.
$i = \lambda = 0.92\%$ cada mes.
Por tanto:

$$F = 100\,(1 + 0.0092)^{12} = \$111.62$$

Si a principios del año un cierto artículo costaba \$100, a fin de año costará \$111.62. Esto significa un aumento de 11.62% en el año. Por tanto, si la tasa de inflación mensual se hubiera mantenido constante en 0.92%, la tasa de inflación acumulada para el 2002 hubiera sido de 11.62%. La inflación real obtenida en 2002 fue de 5.70%.

La siguiente fórmula nos permite encontrar la inflación acumulada al final de n periodos, tomando como base la inflación de un periodo y suponiendo que se mantiene constante en todos los demás periodos:

$$\lambda = (1 + \lambda_0)^n - 1 \qquad (5.9)$$

en donde λ_0 es la tasa de inflación de un periodo, o inflación inicial. Compare esta fórmula con la ecuación (5.4).

Utilizando la fórmula (5.9) para resolver el ejemplo 5.42, se tiene:

$$\lambda = (1 + 0.0092)^{12} - 1 = 0.0062 = 11.62\% \text{ anual}$$

Ejemplo 5.43

¿Cuál fue la inflación en el primer trimestre del año 2003, si las inflaciones mensuales fueron las siguientes:

Mes	Inflación
Enero	0.40%
Febrero	0.28%
Marzo	0.63%

Solución:

Como la tasa de inflación mensual no es constante, la fórmula (5.9) no funciona. En este caso, la inflación acumulada se obtiene mediante la fórmula:

$$\lambda = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3)\ldots(1 + \lambda_n) - 1 \qquad (5.10)$$

en donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ son las tasas de inflación por periodo.

Sustituyendo los datos en la fórmula (5.10), se obtiene

$$\lambda = (1 + 0.0040)(1 + 0.0028)(1 + 0.0063) - 1$$

$$\lambda = 0.0132 = 1.32\% \text{ acumulado en el primer trimestre del año.}$$

Ejemplo 5.44

Si el índice de precios de diciembre de 2001 fue de 97.3543 y el de junio de 2002 fue de 99.9172, calcule,

a) La tasa de inflación en el primer semestre de 2002.

b) La tasa promedio de inflación mensual para el primer semestre de 2002.

Solución:

a) Mediante la fórmula (5.8) se obtiene:

$$\lambda = \frac{99.9172}{97.3543} - 1 = 0.0263 = 2.63\% \text{ en el primer semestre del año.}$$

b) En la realidad la inflación mensual fue variable, sin embargo, se puede obtener una tasa mensual de inflación media o promedio, cuyo efecto final es exactamente el mismo que el obtenido al acumular las tasas mensuales reales; esto es 2.63% en el semestre.

La tasa mensual de inflación promedio será equivalente a una tasa compuesta mensual que haga que el índice pase de 97.3543 a 99.9172 en 6 meses. Por tanto, si $\lambda = i$, entonces la tasa mensual de inflación promedio se obtiene al calcular i de la fórmula del interés compuesto. Esto es:

$$\lambda = i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 = \sqrt[6]{\frac{99.9172}{97.3543}} - 1 = 0.434\%$$

Por tanto:

$$\lambda = 0.434\% \text{ mensual promedio.}$$

Mediante la siguiente fórmula se obtiene la tasa de inflación promedio, λ_p, a partir de una tasa de inflación acumulada λ:

$$\lambda_p = \sqrt[n]{1 + \lambda} - 1 \tag{5.11}$$

siendo n el número de periodos.

Se deja como ejercicio para el lector la comprobación del resultado del ejemplo 5.44, inciso (b), mediante la ecuación (5.11).

El dinero puede invertirse y ganar intereses y, por tanto, su valor aumenta a través del tiempo. Pero si hay inflación el poder adquisitivo o de compra del dinero disminuye, aun ganando intereses. La inflación hace que el dinero futuro sea menos valioso que el dinero presente. Por ejemplo, en diciembre de 1994 se podía comprar un escritorio en $800; un escritorio semejante se podía comprar en $2 600 en diciembre del año 2002. Este ejemplo es una muestra clara de que no se puede comprar hoy lo que se podía comprar hace 8 años con $800; el poder de compra del dinero ha disminuido debido a la inflación.

Con respecto al dinero invertido en instrumentos financieros, se tendrá una pérdida en el poder de compra de la moneda si la tasa de inflación es mayor que la tasa de interés. Se tendrá un aumento en el poder de compra, si la tasa de interés es mayor que la tasa de inflación. Por tal motivo, es necesario conocer y utilizar la *tasa de interés real* al efectuar una inversión, ya que ésta indica el aumento o la pérdida del poder adquisitivo de una moneda.

La **tasa de interés real** o simplemente **tasa real**, simbolizada por i_R, es el rendimiento que se obtiene por una inversión una vez descontada la inflación. Por ejemplo, si una persona ahorra $1 000 y el banco le paga 15% de interés anual capitalizable cada año, al cabo de un año recibe un monto de $1 150. Pero si en ese año la tasa de inflación fue de 20% anual, esta persona estaría perdiendo dinero; se estaría descapitalizando, ya que al final del año los $1 150 que obtuvo ni siquiera alcanzarían a reponer el poder de compra de su capital inicial, que ahora tendría que ser de $1 200. En cambio, si la tasa de interés fuera de 30% anual capitalizable cada año, el monto al final del año sería de $1 300; en este caso, el ahorrador tendría una ganancia de $100, los cuales pueden gastarse, o bien, reinvertirse con el fin de incrementar el capital. Si la tasa de interés hubiera sido igual a la tasa de inflación, el poder adquisitivo del capital se habría mantenido intacto. En este caso el ahorrador no pierde ni gana en poder de compra.

De lo dicho anteriormente surge la siguiente regla práctica: si invertimos nuestro dinero en instrumentos que dan una tasa de interés igual a la tasa de inflación, conservamos nuestros ahorros. Si la tasa de interés es mayor que la tasa de inflación, se acrecientan nuestros ahorros; pero si la tasa de interés es menor que la tasa de inflación, tenemos una pérdida.

Lo mencionado anteriormente para el caso de las inversiones es válido aplicarlo a los salarios. En una economía inflacionaria, el asalariado que no recibe aumentos de sueldo, o bien, el porcentaje de aumento en su salario es inferior a la tasa de inflación, se está empobreciendo ya que el poder de compra de su salario se reduce en forma tal que termina por ser insuficiente para mantener el nivel de vida acostumbrado. En nuestro país, de 1973, año en que se inició el fenómeno de altas tasas de inflación (inflación de más de un dígito), a la fecha, la clase media se ha estado empobreciendo progresivamente y la clase pobre ha pasado a la miseria extrema.

El 1o. de enero de 1995 el salario mínimo general para el Distrito Federal era de 16.34 pesos por día. El 1 de enero de 2003 el salario mínimo se estableció en 43.65 pesos por día. Esto significa un aumento de 167.14%. En cambio, entre esas dos fechas el INPC (Base 2002) pasó de 28.6055 a 102.9040, es decir, una inflación de 259.74%. Esto quiere decir que los precios aumentaron 55.4% por arriba de los salarios. Con el fin de mantener el mismo poder de compra que se tenía a principios de enero de 1995, el salario mínimo al 1 de enero de 2003 debería haber aumentado en el mismo porcentaje que aumentó la inflación, esto es

$$16.34 + 259.74\% \text{ de } 16.34 = 16.34 + (2.5974)(16.34) = 58.78 \text{ pesos por día.}$$

Ejemplo 5.45

El señor Rizo le prestó a su hijo $10 000, sin intereses, a principios de julio de 2001. Si el hijo le pagó a su padre a principios de enero de 2003, calcule la pérdida del poder de compra que tuvo el señor Rizo debido a la inflación.

Solución:

Al recuperar el señor Rizo sus $10 000, éstos no tuvieron el mismo poder de compra que tenían a principios de julio de 2001, debido a la inflación. A principios de julio de 2001, el INPC era de 95.2145 y a principios de enero de 2003 era de 102.9040. La inflación ocurrida en ese periodo o intervalo de tiempo fue

$$\lambda = \frac{102.9040}{95.2145} - 1 = 8.076\%$$

Antes de continuar con el problema, hagamos un paréntesis para dar las siguientes definiciones: **pesos constantes** son aquellos pesos con poder adquisitivo de un periodo o año base específico. **Pesos corrientes** son los pesos con poder adquisitivo del momento en que se tienen. Cuando no existe inflación no hay diferencia entre pesos constantes y pesos corrientes. Los pesos constantes representan el *valor real del dinero* de un periodo o año base específico, ya que se trata de un monto al cual se le ha descontado la inflación. Valor real se simboliza por *VR*.

De acuerdo a lo anterior, los $10 000 que recibe el señor Rizo a principios de enero de 2003 son pesos corrientes y si a éstos se les descuenta la inflación ocurrida en el periodo, se obtienen los pesos constantes o valor real del dinero. Los pesos constantes se obtienen calculando el valor presente de los pesos corrientes, sustituyendo la tasa de inflación del periodo por la tasa de interés, esto es,

$$VR = \frac{M}{1 + \lambda t} = \frac{10\,000}{1 + (0.08076)(1)} = \$9\,252.75$$

El uno utilizado en la fórmula se refiere a un periodo o intervalo de tiempo, esto es, el intervalo de tiempo de principios de julio de 2001 a principios de enero de 2003. El resultado obtenido se interpreta de la siguiente forma: los $10 000 recibidos por el señor Rizo en enero de 2003 tienen un poder adquisitivo de $9 252.75 de julio de 2001. Es decir, lo que se podía comprar con $9 252.75 en julio de 2001, en enero de 2003 se compra con $10 000. En este caso, la inflación benefició al deudor, ya que paga su deuda con dinero depreciado que tiene un poder adquisitivo menor al que recibió.

Con el fin de mantener el poder de compra de su dinero, el señor Rizo debería cobrar a su hijo una tasa de interés por periodo igual a la tasa de inflación del periodo; esto es

$$M = 10\,000\,[1 + (0.08076)(1)] = \$10\,807.60$$

Por otro lado, se puede calcular el porcentaje de pérdida de valor del dinero en relación con el valor en la fecha del préstamo. El dinero tuvo una pérdida de valor de $10 000 − 9 252.75 = $747.25; por tanto, su pérdida de valor expresada en porcentaje es

$$(x)(10\,000) = 747.25$$

$$x = 0.0747 = 7.47\%$$

Ejemplo 5.46

Eduardo presta $30 000 con un interés simple de 15% anual y 15 meses de plazo. Suponga que en el momento de efectuarse el préstamo el índice de precios era de 90.18 y en la fecha de vencimiento es de 97.22. Halle:

a) El monto que recibe Eduardo, expresado en pesos corrientes.

b) El monto expresado en pesos constantes.

c) La tasa de interés real obtenida en el periodo.

Solución:

a)
$$M = 30\,000\left[1+\left(\frac{0.15}{12}\right)(15)\right] = \$35\,625$$

b) La inflación ocurrida en el periodo de 15 meses fue:

$$\lambda = \frac{97.22}{90.18} - 1 = 7.81\%$$

Por tanto, el monto expresado en pesos constantes a la fecha del préstamo es:

$$VR = \frac{35\,625}{1+(0.0781)(1)} = \$33\,044.24$$

c) Nominalmente, Eduardo tiene $35 625, pero debido a la inflación ese dinero tiene un valor equivalente a $33 044.24 de hace 15 meses. Por tanto, utilizando la fórmula del monto simple, se tiene que la tasa de interés real ganada en el periodo de 15 meses es:

$$33\,044.24 = 30\,000\,[1 + (i_R)(1)]$$

$$\frac{33\,044.24}{30\,000} = 1 + i_R$$

Por tanto:

$$i_R = 1.101474667 - 1 = 0.101474666 = 10.1475\% \text{ en 15 meses.}$$

A pesar de la inflación, Eduardo obtuvo una ganancia ya que la tasa real es positiva.

Generalizando el procedimiento utilizado en el ejemplo 5.46, inciso (c), es posible deducir una fórmula que nos permita obtener la tasa de interés real efectiva por periodo. Esta fórmula se conoce con el nombre de **fórmula de Fisher,** en honor del matemático y economista Irving Fisher (1867-1947). La fórmula de Fisher es:

$$i_R = \frac{i_e - \lambda}{1 + \lambda} \tag{5.12}$$

en donde i_R es la tasa de interés real, i_e es la tasa de interés efectiva por periodo y λ es la tasa de inflación por periodo.

Ejemplo 5.47

Utilizando la fórmula de Fisher, obtenga la tasa de interés real del ejemplo anterior.

Solución:

Antes de utilizar la fórmula de Fisher, es necesario expresar la tasa de interés en el mismo periodo en que está expresada la tasa de inflación, esto es, 15 meses.

Como se trata de una tasa de interés simple, entonces:

$$\text{Tasa efectiva por periodo} = \frac{15\%}{12}(15) = 18.75\% \text{ en 15 meses.}$$

Sustituyendo los datos en la fórmula de Fisher, se tiene:

$$i_R = \frac{0.1875 - 0.0781}{1 + 0.0781} = 0.101475 = 10.1475\%$$

Ejemplo 5.48

Si la tasa de inflación anual fue de 4.4% y se ganó en una inversión por el mismo plazo una tasa de 2.4% anual capitalizable cada mes, ¿cuál fue la tasa real obtenida en el año?

Solución:

Para poder utilizar la fórmula de Fisher, es necesario obtener, primero, la tasa efectiva anual:

$$i_e = \left(1 + \frac{0.024}{12}\right)^{12} - 1 = 2.4266\% \text{ anual.}$$

Sustituyendo en la ecuación (5.12), se tiene:

$$i_R = \frac{0.024266 - 0.044}{1 + 0.044} = -1.89\% \text{ anual.}$$

La tasa real es negativa, por tanto, la inversión no resultó redituable, ya que se tuvo una pérdida de poder adquisitivo.

Ejemplo 5.49

El 7 de abril de 2002, Rodolfo vendió su automóvil en $104 000 y, el mismo día, invirtió el dinero en una cuenta que le da una tasa de interés de 7% capitalizable cada mes.

a) ¿Cuál fue el valor final de su inversión el 7 de abril de 2003 en pesos constantes del 7 de abril de 2002, si la inflación mensual promedio en el año fue de 0.4583%?

b) ¿Cuál es la tasa real?

Solución:

a) En primer lugar se calcula el monto de la inversión; posteriormente el monto se corrige eliminando la inflación ocurrida en el periodo:

$$F = 104\,000\left(1 + \frac{0.07}{12}\right)^{12} = \$111\,518.17$$

Por tanto:

$$VR = \frac{111\,518.17}{(1 + 0.004583)^{12}} = \$105\,563.98$$

b) Se comienza con un capital de $104 000 y se llega a un monto expresado en pesos constantes (o valor real) de $105 563.98; por tanto, utilizando la fórmula del interés compuesto se obtiene la tasa real:

$$105\,563.98 = 104\,000\,(1 + i_R)^{12}$$

$$i_R = \sqrt[12]{\frac{105\,563.98}{104\,000}} - 1$$

$$i_R = 0.124463\% \text{ mensual} = 1.49356\% \text{ anual capitalizable cada mes.}$$

La tasa real efectiva es:

$$i_e = \left(1 + \frac{0.0149356}{12}\right)^{12} - 1 = 1.5038\% \text{ anual real efectiva.}$$

La tasa real es positiva, por tanto, la inversión de Rodolfo tuvo un crecimiento real.

Otra forma de obtener la tasa real es utilizando la fórmula de Fisher:

$$i_R = \frac{\frac{0.07}{12} - 0.004583}{1 + 0.004583} = 0.12446\% \text{ mensual.}$$

Mediante la ecuación (5.4) se convierte la tasa real mensual a tasa real anual efectiva:

$$i_R = (1 + 0.0012446)^{12} - 1 = 1.5038\% \text{ anual real efectiva.}$$

Ejemplo 5.50

En enero de 1993, Mayra invirtió cierta cantidad de dinero en oro, a través de la compra de Centenarios,[7] en $1 285 cada uno. En abril de 2003 los vendió en $4 400 cada uno. Calcule el rendimiento obtenido en el periodo de inversión.

Solución:

El periodo de inversión fue de 10 años y 3 meses; esto es, 123 meses. La tasa efectiva en el periodo fue:

$$i = \frac{4\,400 - 1285}{1285} = 242.4124514\% \text{ en el periodo.}$$

Para obtener la inflación ocurrida en el periodo de inversión se utiliza la información de la siguiente tabla, junto con la ecuación (5.8),

Mes y año	INPC
Diciembre de 1992	24.7398
Marzo de 2003	104.2610

$$\lambda = \frac{104.2610}{24.7398} - 1 = 321.430246\% \text{ en el periodo.}$$

[7] El Centenario es una moneda de oro, ley 0.900, que pesa 37.5 gramos y fue emitida por primera vez en 1921 para conmemorar el centenario de la Independencia de México.

Mediante la fórmula de Fisher se obtiene el rendimiento real:

$$i_R = \frac{2.424124514 - 3.21430246}{1 + 3.21430246} = -18.7499\% \text{ en el periodo de inversión.}$$

La tasa real negativa indica que invertir en Centenarios no fue buena inversión para Mayra.

Ejercicios 5.6

1. Si el INPC del mes de diciembre de 1999 fue de 85.5807 y el de diciembre de 2000 fue de 93.2482, calcule la inflación anual del año 2000.
2. Si el INPC de diciembre de 1990 fue de 18.6046 y el de diciembre de 2000 fue de 93.2482, encuentre la inflación acumulada en esos 10 años.
3. Si el índice de precios de diciembre de 2002 fue de 102.9040 y el de enero de 2003 fue de 103.3200, encuentre la tasa de inflación de enero de 2003.
4. Si los precios al consumidor en Estados Unidos están creciendo 1.9% anual, ¿cuánto costará al cabo de 10 años una pistola cuyo precio actual es de 245 dólares?
5. Si la tasa de inflación mensual en nuestro país se mantuviera constante en 1.13%, ¿cuánto costará un televisor dentro de un año, si su precio actual es de $4 800?
6. Al inicio de 2002 se podía comprar una calculadora graficadora en $2 300. Suponiendo que la calculadora aumenta de precio en el mismo porcentaje que aumenta la inflación, ¿cuánto costaba la calculadora hace un año, si la inflación de 2001 fue de 4.40%?
7. Ana Rosa es dueña de una casa, la cual renta en $3 200 mensuales. Ella aumenta la renta cada año en un porcentaje igual a la inflación ocurrida en el año anterior. Suponiendo que la tasa de inflación es de 5.2% anual, ¿en cuántos años se duplicará la renta?
8. En cierto país los precios de los bienes y servicios aumentan el día 12 de cada mes, en un porcentaje igual a la tasa mensual de inflación del mes anterior. Cierto artículo costaba $4 800 el 13 de enero de 2003. ¿Cuál fue el precio del artículo el 13 de mayo de 2003, si las tasas de inflación mensual fueron las siguientes?

Mes	Tasa de inflación
Enero	3.44%
Febrero	3.80%
Marzo	4.28%
Abril	3.11%

9. Si la inflación del mes de enero en un cierto país fue de 1.57% y se mantiene constante en los meses siguientes, ¿cuál será la inflación acumulada al finalizar el año?

10. La tasa mensual de inflación en México para los meses de enero, febrero, marzo, abril y mayo de 2002 fue 0.92%, −0.06%,[8] 0.51%, 0.55%, 0.20%, respectivamente. Si a principios de enero de 2002 un kilogramo de carne para asar costaba $48, ¿cuánto debía haber costado a principios de junio de 2002 debido únicamente a la inflación? Asimismo, calcule la inflación acumulada de los primeros 5 meses del año.

11. Determine la inflación acumulada de 1995 a 2000, inclusive, considerando que el Banco de México reportó las siguientes inflaciones anuales.

Año	Tasa de inflación anual
1995	51.97%
1996	27.70%
1997	15.72%
1998	18.61%
1999	12.32%
2000	8.96%

12. Resuelva el ejercicio anterior utilizando los índices de precios reportados por el Banco de México.

Año	INPC
1994	28.6055
2000	93.2482

13. En diciembre de 2002, el gobierno mexicano, a través del documento *Criterios Generales de Política Económica*, anunció que la meta de inflación para el año 2003 sería de 3%. Con el fin de cumplir esta meta, ¿qué tasa mensual promedio se debe tener?

14. La tabla muestra las tasas mensuales de inflación para el primer trimestre del año 2003. Diga cuál debe ser la inflación acumulada (inflación remanente) de abril a diciembre para cumplir la meta gubernamental de 3% en el año.

Mes	Tasa mensual de inflación
Enero	0.40%
Febrero	0.28%
Marzo	0.63%

[8] En febrero de 2002 la tasa de inflación fue negativa, esto es, hubo una deflación.

15. Se desea tener una tasa de inflación de 1.7% para el mes de mayo. Si se ha incurrido en una inflación de 1% en la primera quincena del mes, ¿cuál deberá ser la inflación para la segunda quincena?

16. En cierto país el INPC aumentó de 1 310.5 a 1 570.8 en tres años. Calcule el porcentaje de inflación ocurrida en ese lapso de tiempo así como la tasa promedio de inflación anual.

17. Calcule la inflación diaria promedio para el mes de marzo de 2003, si la inflación del mes fue de 0.63%.

18. Si los salarios de los empleados de cierta compañía aumentan todos los años el mes de enero, en un porcentaje igual a la tasa de inflación anual del año pasado más 5 puntos porcentuales, obtenga el salario mensual de un empleado de la compañía en el año 2003, si en 2002 recibía un salario mensual de $11 360 y la tasa de inflación anual en 2002 fue de 5.70%.

19. Determine la tasa real de una inversión con rendimiento de 14% anual efectivo, si la tasa de inflación fue de 9% anual.

20. Mario tiene una cuenta de ahorros que pagó el mes pasado una tasa de interés de 3% anual. Si la inflación del mes pasado fue de 0.38%, ¿cuál fue la tasa real mensual? Interprete el resultado.

21. Calcule la tasa real mensual y anual de una inversión cuya tasa nominal, capitalizable cada mes, fue de 21.5% anual y la inflación mensual fue de 1.5%.

22. Obtenga la tasa real mensual si la tasa de interés nominal fue de 22% capitalizable cada mes y la tasa de inflación en el mes fue de 2%.

23. Utilice la información dada en la siguiente tabla para obtener la tasa real anual.

Mes	Tasa mensual de interés	Tasa mensual de inflación
Enero	0.95%	1.34%
Febrero	0.90%	0.89%
Marzo	0.42%	0.55%
Abril	0.42%	0.57%
Mayo	0.38%	0.37%
Junio	0.35%	0.59%
Julio	0.30%	0.39%
Agosto	0.30%	0.55%
Septiembre	0.32%	0.73%
Octubre	0.35%	0.69%
Noviembre	0.40%	0.86%
Diciembre	0.48%	1.08%

24. Roberto desea obtener una tasa real de 6% anual en cierta inversión. Si se espera que la inflación sea de 17% en el año, ¿qué tasa de interés efectiva debe concertar?

25. Si la tasa de inflación para el mes de marzo de 2003 fue de 0.63% y una persona obtuvo una tasa real en ese mes de −0.5192%, ¿cuál fue la tasa nominal anual?

26. En diciembre de 2000 se estableció que el salario mínimo general para el Distrito Federal que regiría del 1 de enero al 31 de diciembre de 2001 sería de $40.35 por día.

a) Si el INPC en diciembre de 2000 fue 93.2482 y en diciembre de 2001 fue 97.3543, diga cuál debió haber sido el porcentaje de aumento al salario mínimo para el 2002 con el fin de que los trabajadores mantuvieran el mismo poder de compra de enero de 2001.

b) Si el salario mínimo establecido para el año 2002 fue $42.15 por día, diga si el aumento al salario mínimo de 2001 fue igual, menor o mayor a la inflación.

27. Antonio ganaba $5 700 al mes en 1999. A partir del 1 de enero de 2003 su sueldo mensual es de $7 980. Diga si ha tenido un aumento real de sueldo. Utilice la información dada en la tabla.

Mes y año	INPC
Diciembre de 1998	76.1946
Diciembre de 2002	102.9040

28. Suponga que usted le prestó a su primo $20 000, a un plazo de 6 meses y sin intereses. ¿Cuál fue el porcentaje de pérdida en el poder de compra del dinero, si cuando éste le fue devuelto, la inflación había crecido en un 3%?

29. Enrique prestó $10 300 a 5 meses de plazo y sin intereses, a principios de agosto de 2002. Halle el valor real que recibirá Enrique sabiendo que las tasas mensuales de inflación fueron las siguientes:

Mes	Tasa mensual de inflación
Agosto	0.38%
Septiembre	0.60%
Octubre	0.44%
Noviembre	0.81%
Diciembre	0.44%

30. Resuelva el problema anterior, si el préstamo se efectuó cobrando una tasa de interés de 1.5% mensual capitalizable cada mes.

31. En cierto país la inflación mensual es de 7%. Si la inflación se mantiene constante, ¿cuánto valdrán $30 000 dentro de 10 meses en términos de dinero de hoy?

32. Como protección contra la inflación, a principios de abril de 1998, Lucas invirtió cierto capital en comprar Centenarios, los cuales le costaron $3 350. Si en los primeros días de diciembre de 2002 los vendió en $4 500, diga si a Lucas le convino esta inversión, sabiendo que la inflación en el periodo fue de 51.63%.

33. Alicia depositó, a principios de noviembre de 2002 (INPC = 101.6360), $50 000 en una cuenta que pagó 7% anual capitalizable cada mes. Obtenga:
   a) El monto al cabo de 3 meses.
   b) Los pesos constantes o valor real del monto obtenido, sabiendo que el INPC en la fecha de vencimiento fue de 103.3200.
   c) La tasa real por periodo.
   d) La tasa real anual efectiva.

34. Se invierten $100 000 a una tasa nominal de 8% capitalizable cada mes, durante 7 años. Si la tasa promedio de inflación es de 4% anual, obtenga:
   a) El valor futuro.
   b) El valor real.
   c) La tasa real anual efectiva.

35. Sandra invirtió en Cetes a 28 días de plazo todo el año 2002, los cuales tuvieron un rendimiento promedio de 7.085% en el año. Si la tasa de inflación en ese año fue de 5.70%, diga si Sandra tuvo un rendimiento real.

36. ¿En cuánto tiempo se reduce el poder adquisitivo de un peso a la mitad, si la tasa de inflación es de 10% anual?

37. ¿Cuál fue la tasa real anual media de crecimiento de una empresa en un periodo de 5 años, si en 1998 tuvo ganancias por $4 200 000 y en 2002 fueron $28 300 000? En el periodo hubo una inflación acumulada de 60.18%.

38. El señor Zárate desea guardar cierta cantidad de dinero hoy para la educación universitaria de su hija. Planea invertir el dinero en una inversión bancaria de modo que, en el momento en que su hija cumpla 18 años, el monto posea un valor adquisitivo de $500 000 de hoy. La tasa de inflación estimada es de 5% cada año. Si el banco paga 8.5% capitalizable cada mes, ¿qué cantidad única deberá depositar en la cuenta hoy, si este día la niña cumple 5 años de edad?

CAPÍTULO 6

Anualidades vencidas, anticipadas y diferidas

El dinero proporciona algo de felicidad.
Pero a partir de cierto momento
sólo proporciona más dinero.
Neil Simon

Objetivos

Al finalizar el estudio de este capítulo el alumno podrá:

- Identificar, definir y explicar los diferentes tipos de anualidades.
- Identificar situaciones en donde se apliquen las anualidades.
- Plantear y resolver problemas de anualidades vencidas, anticipadas y diferidas.

6.1 Introducción

Una **anualidad** se define como una serie de pagos generalmente iguales realizados en intervalos de tiempo iguales. El término anualidad parece implicar que los pagos se efectúan cada año, sin embargo, esto no es necesariamente así, ya que los pagos pueden ser mensuales, quincenales, etcétera.

Son ejemplos de anualidades el cobro quincenal del sueldo, el pago mensual de la renta de la casa, los abonos mensuales para pagar una computadora comprada a crédito, el pago anual de la prima del seguro de vida, los dividendos semestrales sobre acciones, los depósitos bimestrales efectuados a un fondo de jubilación, etcétera.

El concepto de anualidad es de gran importancia en matemática financiera ya que es muy frecuente que las transacciones comerciales impliquen una serie de pagos hechos en intervalos iguales de tiempo, en vez de un pago único realizado al final del plazo.

Los términos de **renta**, **pago periódico**, **abono** u otros, pueden utilizarse en lugar de anualidad.

El tiempo transcurrido entre dos pagos sucesivos se llama **periodo de pago** o **periodo de renta**. El periodo de pago puede ser anual, semestral o mensual, entre otros.

Al tiempo que transcurre entre el inicio del primer periodo de pago y el final del último se llama **plazo de la anualidad**.

Ejemplo 6.1

Una persona compra un televisor pagando 12 mensualidades de $485 cada una. Identifique la anualidad, el periodo de pago y el plazo de la anualidad.

Solución:

La anualidad, renta o abono es de $485. El periodo de pago es un mes y el plazo de la anualidad es de un año.

Existen cuatro formas de clasificar las anualidades. Utilizando el **tiempo** como criterio de clasificación, las anualidades pueden ser:

Ciertas	Contingentes
Una **anualidad cierta** es aquella en la cual los pagos comienzan y terminan en fechas perfectamente definidas.	Una **anualidad contingente** es aquella en la cual la fecha del primer pago, la fecha del último pago, o ambas dependen

(continúa)

Por ejemplo, al comprar un televisor a crédito en una tienda departamental, se establecen de antemano las fechas de iniciación y terminación del crédito.	de algún suceso que se sabe que ocurrirá, pero no se sabe cuándo. Por ejemplo, el contrato de un seguro de vida establece que la suma asegurada se entregue al beneficiario del seguro en 12 pagos mensuales iguales. Se sabe que los pagos deben efectuarse al morir el asegurado, pero, ¿cuándo va a morir? Las anualidades contingentes no se estudiarán en este libro.

Utilizando los **pagos** o **abonos** como criterio de clasificación, las anualidades pueden ser:

Vencidas	Anticipadas
Las **anualidades vencidas**, llamadas también **anualidades ordinarias**, son aquellas cuyos pagos se realizan *al final* de cada periodo de pago.	En cambio, las **anualidades anticipadas**, son aquellas cuyos pagos se realizan *al principio* de cada periodo de pago.

Utilizando los **intereses** como criterio de clasificación, las anualidades pueden ser:

Simples	Generales
Una **anualidad simple** es aquella cuyo periodo de pago coincide con el periodo de capitalización de los intereses. Por ejemplo, realizar depósitos mensuales en una cuenta de ahorro que paga intereses capitalizables cada mes.	Una **anualidad general** es aquella cuyo periodo de pago no coincide con el periodo de capitalización de los intereses. Por ejemplo, cuando se realizan depósitos quincenales en una cuenta de ahorro cuyos intereses se capitalizan cada mes.

Por último, si se utiliza el **momento de iniciación de la anualidad** como criterio de clasificación, las anualidades pueden ser:

Inmediatas	Diferidas
La **anualidad inmediata** es aquella en la que no existe aplazamiento alguno de los pagos, es decir, los pagos se realizan desde el primer periodo de pago.	Una **anualidad diferida** es aquella en la cual los pagos se aplazan por un cierto número de periodos. Por ejemplo, se compra hoy, a crédito, una bicicleta estacionaria, la cual se pagará mediante 12 abonos mensuales y el primer pago se llevará a cabo después de 3 meses.

Tomando una característica de cada uno de los diferentes criterios de clasificación, es posible formar 16 tipos diferentes de anualidades. Por ejemplo:

- Anualidades ciertas, simples, vencidas e inmediatas.
- Anualidades contingentes, generales, vencidas y diferidas.
- Anualidades ciertas, simples, anticipadas y diferidas, etcétera.

De los 16 tipos de anualidades que se pueden formar, las más usuales son:

- Las anualidades ciertas, simples, vencidas e inmediatas, conocidas simplemente como **anualidades vencidas**.
- Las anualidades ciertas, simples, anticipadas e inmediatas, conocidas simplemente como **anualidades anticipadas**.
- Las anualidades ciertas, simples, vencidas (o anticipadas) y diferidas, conocidas simplemente como **anualidades diferidas**.

Ejercicios 6.1

1. ¿Qué es una anualidad?
2. ¿Cuáles son los cuatro criterios de clasificación de las anualidades?
3. ¿Cuáles son los tres tipos más comunes de anualidades?
4. Una persona compra una bicicleta a crédito mediante 18 pagos quincenales de $172 cada uno. Identifique la anualidad, el periodo de pago y el plazo de la anualidad.
5. Dé un ejemplo de anualidad,
   a) vencida
   b) anticipada
   c) vencida, diferida
   d) anticipada, diferida

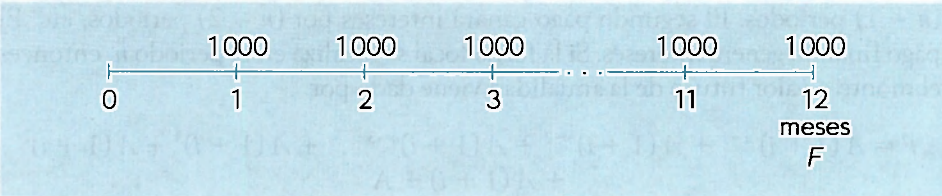
6.2 Anualidades vencidas

De los 16 tipos de anualidades existentes, las anualidades ciertas, simples, vencidas e inmediatas son una de las más utilizadas en el mundo financiero. Es común referirse a este tipo de anualidades como **anualidades vencidas** u **ordinarias**.

El monto de una anualidad vencida es el valor acumulado de una serie de pagos iguales efectuados al final de cada periodo de pago. A continuación se presenta un ejemplo del cálculo del monto de una anualidad vencida.

Suponga que se depositan \$1 000 al final de cada mes en un banco que paga una tasa de interés de 1.5% mensual capitalizable cada mes. ¿Cuál será el monto al finalizar un año?

El diagrama de tiempo es el siguiente:



donde F es el monto de la anualidad.

Note que el cero en el diagrama de tiempo corresponde al momento actual y coincide con el inicio del mes 1. El número 1 marcado en el diagrama de tiempo corresponde al final del mes 1 y coincide con el inicio del mes 2, y así sucesivamente.

Al diagrama de tiempo anterior también se le conoce como **diagrama de flujo de efectivo**. Se denominan **flujos de efectivo** a las entradas y salidas de dinero. En este ejemplo se tiene un flujo de efectivo de \$1 000 mensuales, durante 12 meses.

Debido a que los depósitos se realizan al final de cada mes, los primeros \$1 000 ganarán intereses por 11 meses, los segundos \$1 000 ganarán intereses por 10 meses, etc. El último depósito no gana intereses. El monto de la anualidad es la suma de todos los depósitos mensuales y su correspondiente interés compuesto, acumulado hasta el término del plazo. Si la fecha focal se localiza en el doceavo mes, el monto de la anualidad viene dado por la siguiente ecuación de valor:

$$F = 1\,000(1.015)^{11} + 1\,000(1.015)^{10} + 1\,000(1.015)^{9} + \ldots + 1\,000(1.015) + 1\,000$$

$$F = 1\,000\,[(1.015)^{11} + (1.015)^{10} + (1.015)^{9} + \ldots (1.015) + 1]$$

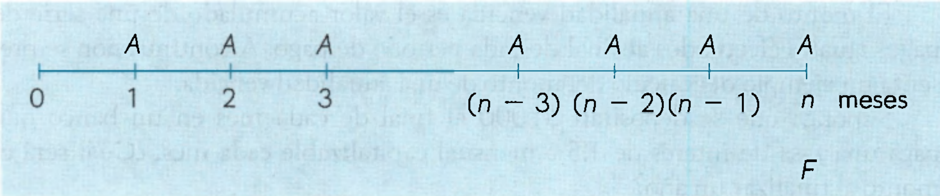
$$F = \$13\,041.21$$

El interés compuesto ganado por la anualidad es la diferencia entre el monto y el total depositado:

$$\text{Interés ganado} = 13\,041.21 - (1\,000)(12) = \$1\,041.21$$

Cuando el número de pagos o depósitos es muy grande, el método anterior para obtener el monto de la anualidad resulta muy laborioso. A continuación se deducirá la fórmula general para obtener el monto o valor futuro de una anualidad cierta, simple, vencida e inmediata.

Considere una anualidad vencida en donde A es el pago o depósito hecho al final de cada uno de n periodos. Sea i la tasa de interés por periodo, expresada en forma decimal. El diagrama de tiempo es:



Ya que el primer pago se realiza al final del primer periodo, ganará intereses por $(n - 1)$ periodos. El segundo pago ganará intereses por $(n - 2)$ periodos, etc. El pago final no genera intereses. Si la fecha focal se localiza en el periodo n, entonces el monto o valor futuro de la anualidad viene dado por

$$F = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-3} \ldots + A(1+i)^3 + A(1+i)^2 + A(1+i) + A$$

Factorizando:

$$F = A[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \ldots + (1+i)^3 + (1+i)^2 + (1+i) + 1]$$

O bien:

$$F = A[1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$$

Los términos de la expresión entre corchetes forman una sucesión geométrica, donde:

$$a_1 = 1$$

$$r = (1+i)$$

Aplicando la ecuación (3.4) para la suma de n términos de una sucesión geométrica, se obtiene:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{1[1-(1+i)^n]}{1-(1+i)} = \frac{1-(1+i)^n}{-i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Como:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = [1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$$

Entonces:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \qquad (6.1)$$

La ecuación (6.1) es la fórmula general para obtener el monto o valor futuro de una anualidad vencida.

Ejemplo 6.2

Resuelva el ejemplo dado al principio de la presente sección usando la ecuación (6.1).

Solución:

A = 1 000 pesos mensuales

i = 1.5% mensual = 0.015 por mes

n = 12 meses

$$F = 1000\left[\frac{(1+0.015)^{12}-1}{0.015}\right] = 1000\left[\frac{1.195618171-1}{0.015}\right]$$

$$F = \$13\,041.21$$

Ejemplo 6.3

El papá de un niño de 10 años empieza a ahorrar para que su hijo pueda estudiar una carrera universitaria. Planea depositar \$2 000 en una cuenta de ahorro al final de cada mes durante los próximos 8 años. Si la tasa de interés es de 9%,

a) ¿cuál será el monto de la cuenta al cabo de 8 años?

b) ¿de cuánto serán los intereses?

Solución:

a) Debido a que en el presente capítulo se manejan únicamente problemas de anualidades simples, no es requisito fundamental mencionar el periodo de capitalización; se sobreentiende que éste coincide con el periodo de renta. Por tanto, el periodo de capitalización es mensual.

A = \$2 000

i = 9% anual = 0.75% mensual

n = (8 años)(12 meses/año) = 96 meses

$$F = 2\,000\left[\frac{(1+0.0075)^{96}-1}{0.0075}\right] = 2\,000\left[\frac{2.048921228-1}{0.0075}\right]$$

$$F = \$279\,712.33$$

b) En 8 años el papá deposita un total de ($2 000 por mes) (96 meses) = $192 000. Por tanto, el interés ganado será:

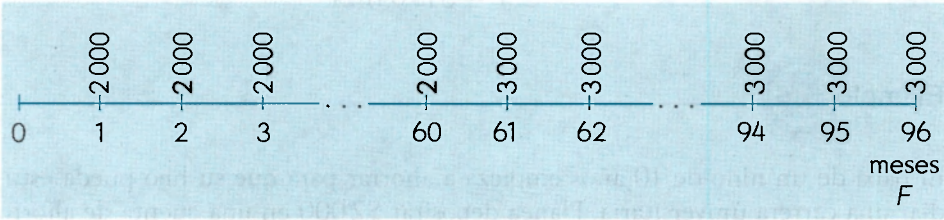
$$I = 279\,712.33 - 192\,000 = \$87\,712.33$$

Ejemplo 6.4

Con referencia al ejemplo anterior, suponga que el depósito de $2 000 mensuales se efectúa únicamente por 5 años y el resto del tiempo se deposita $3 000 mensuales. Obtenga el monto final y el interés ganado.

Solución:

El diagrama de tiempo es:

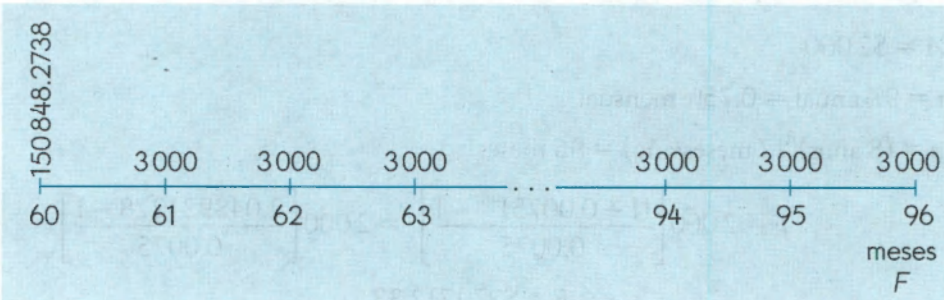


El problema se resuelve en 3 partes.

1a. Parte
Se calcula el monto de $2 000 mensuales por 5 años (60 meses)

$$F_1 = 2\,000\left[\frac{(1+0.0075)^{60}-1}{0.0075}\right] = \$150\,848.2738$$

2a. Parte
Al final de los 5 años se tiene un monto de $150 848.2738. Esto se muestra en el siguiente diagrama de tiempo.



A continuación, se obtiene el monto de $150 848.2738 por 3 años (36 meses), mediante la fórmula del interés compuesto:

$$F_2 = 150\,848.2738\,(1 + 0.0075)^{36} = \$197\,406.8952$$

3a. Parte

Se calcula el monto de la anualidad de $3 000 mensuales durante 3 años (36 meses):

$$F_3 = 3\,000\left[\frac{(1+0.0075)^{36}-1}{0.0075}\right] = \$123\,458.1484$$

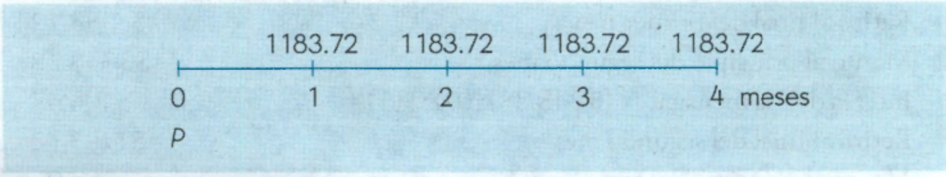
El monto total al final de los 8 años será la suma de F_2 y F_3:

$$F = F_2 + F_3 = 197\,406.8952 + 123\,458.1484$$
$$F = \$320\,865.05$$

Hasta este momento se ha determinado el valor futuro de una anualidad vencida. Ahora se abordará el problema de determinar el valor presente o valor actual de una anualidad vencida; esto es, el valor al comienzo del plazo.

El **valor presente** de una anualidad se define como la suma de los valores presentes de todos los pagos. Veamos un ejemplo. Suponga que una persona va a liquidar una deuda mediante 4 pagos mensuales de $1 183.72 cada uno, que incluyen intereses a 3% mensual con capitalización cada mes. Se desea obtener el valor presente de los pagos.

El diagrama de tiempo es:



donde P es el valor presente de los pagos.

Si la fecha focal se localiza en el momento actual, entonces se puede formar la siguiente ecuación de valor:

$$P = \frac{1183.72}{1.03} + \frac{1183.72}{1.03^2} + \frac{1183.72}{1.03^3} + \frac{1183.72}{1.03^4}$$

La expresión anterior se puede escribir como:

$$P = 1\,183.72\,(1.03)^{-1} + 1\,183.72\,(1.03)^{-2} + 1\,183.72\,(1.03)^{-3} + 1\,183.72\,(1.03)^{-4}$$

$$P = \$4\,400$$

$4 400 es el valor actual de 4 pagos mensuales de $1 183.72 cada uno. $4 400 es el capital pedido en préstamo por el deudor.

El valor presente de una anualidad admite dos interpretaciones. Suponga que en lugar de pagar una deuda de $4 400, se deposita este dinero en una cuenta que paga 3% mensual capitalizable cada mes; el valor presente se interpreta de la siguiente forma: $4 400 depositados a 3% mensual capitalizable cada mes producirán un monto exactamente igual que el obtenido al depositar $1 183.72 cada mes, durante 4 meses:

$$F = 4\,400\,(1 + 0.03)^4 = \$4\,952.24$$

$$F = 1\,183.72\left[\frac{(1+0.03)^4 - 1}{0.03}\right] = \$4\,952.24$$

Lo anterior indica que el valor presente de una anualidad se puede obtener mediante la fórmula del interés compuesto, calculando el valor presente del monto de la anualidad.

La segunda interpretación del valor presente de una anualidad es la siguiente: el valor presente es la cantidad que se debe invertir en este momento para efectuar cierto número de retiros en el futuro. Esto es, si una persona invierte en este momento $4 400 a 3% mensual capitalizable cada mes, entonces podrá retirar $1 183.72 cada mes, durante 4 meses, al final de los cuales la cuenta estará en ceros. La siguiente tabla demuestra esta afirmación:

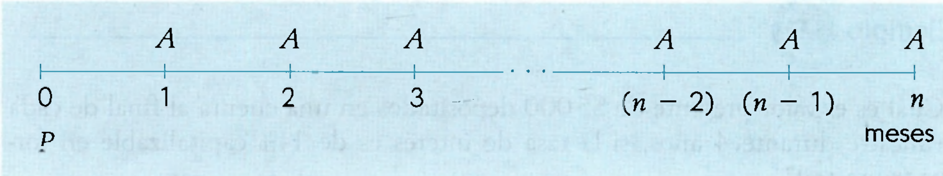
Inversión original	$4 400.00
Interés de 3% mensual = (4 400)(0.03)(1) =	$132.00
Retiro al final del primer mes	$1 183.72
Monto al principio del segundo mes	$3 348.28
Interés de 3% mensual = (3 348.28)(0.03)(1) =	$100.45
Retiro al final del segundo mes	$1 183.72
Monto al principio del tercer mes	$2 265.01
Interés de 3% mensual = (2 265.01)(0.03)(1) =	$67.95
Retiro al final del tercer mes	$1 183.72
Monto al principio del cuarto mes	$1 149.24
Interés de 3% mensual = (1 149.24)(0.03)(1) =	$34.48
Retiro al final del cuarto mes	$1 183.72
Monto al final del cuarto mes	$0.00

Existen muchos tipos de anualidades que se manejan de la forma mostrada en la tabla anterior. Por ejemplo, los planes de jubilación como las AFORE, ya que durante la vida productiva del trabajador se realizan depósitos a un fondo creado para este propósito. Al momento de la jubilación, el monto obtenido paga una cantidad fija a intervalos regulares, generalmente cada mes. Después de pasado cierto tiempo el fondo se agota. La suma obtenida por el trabajador al inicio de la jubilación es el valor presente o actual de la anualidad.

En seguida se deducirá la fórmula general para obtener el valor actual de una anualidad vencida.

Considere una anualidad vencida en donde A es el pago o depósito hecho al final de cada uno de n periodos. Sea i la tasa de interés por periodo, expresada en forma decimal.

El diagrama de tiempo es:



Si la fecha focal se localiza en el momento actual y P representa el valor presente de la anualidad A, entonces:

$$P = \frac{A}{(1+i)} + \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{A}{(1+i)^{(n-2)}} + \frac{A}{(1+i)^{(n-1)}} + \frac{A}{(1+i)^n}$$

$$P = A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + \ldots + A(1+i)^{-(n-2)} + A(1+i)^{-(n-1)} + A(1+i)^{-n}$$

Factorizando:

$$P = A[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ldots + (1+i)^{-n+2} + (1+i)^{-n+1} + (1+i)^{-n}]$$

Los términos de la expresión entre corchetes forman una sucesión geométrica, donde:

$$a_1 = (1+i)^{-1}$$
$$r = (1+i)^{-1}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3.4), se obtiene:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{(1+i)^{-1}[1-(1+i)^{-n}]}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{(1+i)^{-1}[1-(1+i)^{-n}]}{1-\dfrac{1}{(1+i)}}$$

$$S_n = \frac{(1+i)^{-1}[1-(1+i)^{-n}]}{\dfrac{(1+i)-1}{(1+i)}} = \frac{(1+i)(1+i)^{-1}[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$S_n = \frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

Como,

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ldots + (1+i)^{-n+2} + (1+i)^{-n+1} + (1+i)^{-n}$$

Entonces:

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \tag{6.2}$$

La ecuación (6.2) es la fórmula para obtener el valor presente o valor actual de una anualidad vencida.

Ejemplo 6.5

¿Cuál es el valor presente de $5 000 depositados en una cuenta al final de cada trimestre durante 4 años, si la tasa de interés es de 14% capitalizable en forma trimestral?

Solución:

$A = 5\,000$

$i = 14\%\text{ anual} = \dfrac{14}{4} = 3.5\%\text{ trimestral}$

$n = (4\text{ años})(4\text{ trimestres/año}) = 16\text{ trimestres}$

$$P = 5\,000\left[\frac{1-(1+0.035)^{-16}}{0.035}\right] = 5\,000\left[\frac{1-0.576705911}{0.035}\right]$$

$$P = \$60\,470.58$$

El valor actual de la anualidad es $60 470.58. Esto significa que al depositar esta cantidad de dinero en este momento, se tendrá un monto, al final de cuatro años, igual al que se obtendrá depositando $5 000 cada trimestre durante 4 años, siendo la tasa de interés de 14% capitalizable cada trimestre, en ambos casos. La otra interpretación es la siguiente: si se depositan $60 470.58 a una tasa de interés de 14% capitalizable cada trimestre, entonces se pueden retirar $5 000 cada trimestre, durante 4 años.

Ejemplo 6.6

Raquel desea jubilarse en este año y cree que una mensualidad de $ 10 000 durante los siguientes 20 años será suficiente para vivir bien[1]. ¿Cuánto dinero debe tener en su fondo de retiro para poder retirar la cantidad deseada, sabiendo que éste le paga 12% anual capitalizable cada mes?

[1] Podemos suponer que 20 años es su esperanza de vida. Además, no se está tomando en cuenta la inflación.

Solución:

$A = 10\,000$

$i = 12\%$ anual $= 1\%$ mensual

$n = 240$ meses

$$P = 10\,000\left[\frac{1-(1+0.01)^{-240}}{0.01}\right] = \$908\,194.16$$

\$908 194.16 depositados a 12% capitalizable cada mes producirán 240 pagos mensuales de \$10 000 cada uno; es decir, un total de \$2 400 000. La diferencia entre el valor actual y la cantidad total recibida es el interés compuesto ganado.

$$\text{Interés compuesto ganado} = 2\,400\,000 - 908\,194.16 = \$1\,491\,805.84$$

Ejemplo 6.7

Un distribuidor de automóviles ofreció a un cliente un coche nuevo mediante un pago inicial de \$28 000 y 30 pagos mensuales de \$3 650 cada uno. Si se carga una tasa de interés de 2.5% mensual capitalizable mensualmente, encuentre el valor de contado del automóvil.

Solución:

Valor de contado = Pago inicial + Valor actual de las mensualidades

Como:

$A = 3\,650$

$i = 2.5\%$ mensual

$n = 30$ meses

Entonces:

$$\text{Valor de contado} = 28\,000 + 3\,650\left[\frac{1-(1+0.025)^{-30}}{0.025}\right]$$

$$\text{Valor de contado} = 28\,000 + 76\,395.57 = \$104\,395.57$$

Ejemplo 6.8

El señor Jiménez desea vender su casa ubicada en la ciudad de Los Ángeles, California y recibe las tres ofertas siguientes:

1a. Oferta: 350 000 dólares de contado.

2a. Oferta: 100 000 dólares de contado y 10 200 dólares al mes durante 30 meses.

3a. Oferta: 11 000 dólares al mes durante 3 años, sin enganche.

Tomando como base una tasa de interés de 0.6% mensual convertible cada mes, ¿cuál de estas ofertas es la más ventajosa para el señor Jiménez?

Solución:

Para comparar las ofertas recibidas es necesario determinar los valores de contado equivalentes. Esto es, el valor presente de la anualidad más el pago inicial, si lo hubiera.

1a. Oferta

$$\textit{Precio de contado} = 350\,000 \text{ dólares}$$

2a. Oferta

$$\textit{Precio de contado} = 100\,000 + 10\,200\left[\frac{1-(1+0.006)^{-30}}{0.006}\right] = 379\,276.71 \text{ dólares}$$

3a. Oferta

$$\textit{Precio de contado} = 11\,000\left[\frac{1-(1+0.006)^{-36}}{0.006}\right] = 355\,198.24 \text{ dólares}$$

Sobre la base de los precios de contado a los planes de pagos en abonos, la segunda oferta es la mejor.

Ejemplo 6.9

¿Cuánto se tiene que depositar cada quincena en una inversión que gana el 8.55% capitalizable quincenalmente, para tener $200 000 al final de 5 años?

Solución:

Debido a que $200 000 son un valor futuro, es necesario despejar A de la fórmula del monto de una anualidad.

$F = 200\,000$

$i = \frac{8.55}{24} = 0.35625\%$ quincenal

$n = (5 \text{ años})(24 \text{ quincenas/año}) = 120$ quincenas

$$\text{Si } F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right], \text{ entonces } Fi = A\,[(1+i)^n - 1] \text{ y, por tanto,}$$

$$A = \frac{Fi}{(1+i)^n - 1}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$A = \frac{(200\,000)(0.0035625)}{(1+0.0035625)^{120} - 1} = \$1\,338.64$$

Se tiene que depositar \$1 338.64 cada mes con el fin de tener \$200 000 al final de 5 años.

Conocido el valor de la anualidad se puede calcular la cantidad ganada por concepto de intereses.

$$\text{Intereses ganados} = 200\,000 - (1\,338.64)(120) = \$39\,363.20$$

Ejemplo 6.10

La señora Aguilar es la beneficiaria de un seguro de vida por \$650 000. Ella escogió no recibir todo el dinero en una sola exhibición, sino recibir un ingreso mensual fijo durante los próximos 12 años. Si el dinero se encuentra invertido a 18% anual capitalizable cada mes, ¿qué cantidad mensual recibirá la señora Aguilar?

Solución:

En este problema se conoce el valor presente de la anualidad y se pide el cálculo del pago mensual que agote el valor presente al cabo de 12 años. De la ecuación (6.2) se tiene:

$$\text{Si } P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right], \text{ entonces } Pi = A\,[1 - (1+i)^{-n}] \text{ y, por tanto,}$$

$$A = \frac{Pi}{1-(1+i)^{-n}}$$

Sustituyendo los valores numéricos, se tiene:

$$A = \frac{(650\,000)\left(\frac{0.18}{12}\right)}{1-\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{-144}} = \$11\,044.28$$

La señora Aguilar recibirá $11 044.28 cada mes, durante 12 años, en lugar de $650 000 al contado.

Ejemplo 6.11

¿Cuántos depósitos mensuales de $1 239.66 cada uno se deben hacer para acumular un total de $100 000, si se ganan intereses de 1.83% mensual capitalizable cada mes?

Solución:

En este problema se conoce la anualidad y el monto de ésta y se pide calcular n, la cual deberá despejarse de la ecuación (6.1).

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$\frac{Fi}{A} = (1+i)^n - 1$$

$$\frac{Fi}{A} + 1 = (1+i)^n$$

Tomando logaritmos a ambos lados de la igualdad anterior, se tiene:

$$\log\left[\frac{Fi}{A} + 1\right] = n \log(1 - i)$$

$$n = \frac{\log\left[\frac{Fi}{A} + 1\right]}{\log(1+i)} = \frac{\log\left[\frac{(100\,000)(0.0183)}{1\,239.66} + 1\right]}{\log(1 + 0.0183)} = \frac{\log 2.476211219}{\log 1.0183}$$

n = 50 depósitos mensuales.

Ejemplo 6.12

Se desea obtener un monto de $20 000 mediante depósitos vencidos, cada dos meses, de $1 655 cada uno. Calcule cuántos depósitos se deben hacer si se ganan intereses de 15% capitalizable cada bimestre.

Solución:

En el ejemplo anterior se despejó n de la fórmula del monto, por tanto:

$$n = \frac{\log\left[\frac{Fi}{A} + 1\right]}{\log(1+i)} = \frac{\log\left[\frac{(20\,000)\left(\frac{0.15}{6}\right)}{1\,655} + 1\right]}{\log\left(1 + \frac{0.15}{6}\right)} = \frac{\log 1.302114804}{\log 1.025}$$

$$n = 10.69104025 \text{ bimestres.}$$

Desde el punto de vista teórico deberán transcurrir 10.69104025 bimestres, pero en la realidad esto no es posible debido a que las capitalizaciones y los depósitos se realizan al final de cada bimestre. Cuando el número de pagos no es un número entero, se pueden llevar a cabo diferentes formas de ajuste.

A continuación se verán dos alternativas.

1a. Alternativa

Se redondea a un entero el resultado obtenido y se ajusta la anualidad a dicho resultado. Esto es:

$F = 20\,000$

$i = 2.5\%$ bimestral

n – 11 bimestres (valor redondeado)

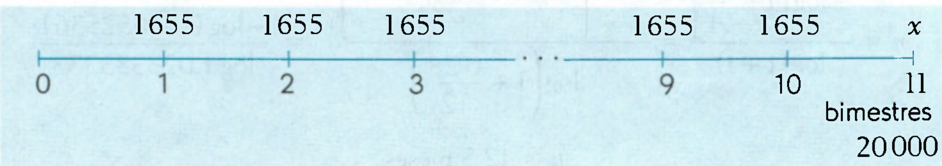
Por tanto:

$$A = \frac{Fi}{(1+i)^n - 1} = \frac{(20\,000)(0.025)}{(1+0.025)^{11} - 1} = \$1602.12$$

Se deben realizar 11 depósitos bimestrales de \$1602.12 cada uno para acumular \$20 000.

2a. Alternativa

Se realizan 10 depósitos bimestrales de \$1655 cada uno y, al final del bimestre número 11, se efectúa un depósito complementario. Para calcular el valor del depósito complementario se plantea una ecuación de valor.



x es el valor del depósito complementario. Tomando el momento actual como fecha focal, se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$1655\left[\frac{1-(1+0.025)^{-10}}{0.025}\right]+\frac{x}{(1+0.025)^{11}}=\frac{20\,000}{(1+0.025)^{11}}$$

$$14\,484.66581+\frac{x}{1.312086658}=15\,242.89564$$

Por tanto:

758.22982) (1.312086658)

$$x=\$994.86$$

Si se depositan \$1655 al final de cada bimestre durante 10 bimestres y \$994.86 al final del bimestre número 11, se tendrá un monto de \$20000.

Ejemplo 6.13

¿Cuántos pagos mensuales de \$791.83 se deben realizar para amortizar una deuda de \$8 500, si la tasa de interés es de 28% anual capitalizable cada mes?

Solución:

En este problema se conoce la anualidad y el valor presente de la anualidad y se pide calcular n, la cual deberá despejarse de la ecuación (6.2):

$$P=A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$\frac{Pi}{A}=1-(1+i)^{-n}$$

$$(1+i)^{-n}=1-\frac{Pi}{A}$$

Tomando logaritmos a ambos lados de la igualdad anterior, se tiene:

$$-n\log(1+i)=\log\left[1-\frac{Pi}{A}\right]$$

$$n=\frac{-\log\left[1-\frac{Pi}{A}\right]}{\log(1+i)}=\frac{-\log\left[1-\frac{(8\,500)\left(\frac{0.28}{12}\right)}{791.83}\right]}{\log\left(1+\frac{0.28}{12}\right)}=\frac{-\log 0.749525361}{\log 1.023333333}$$

$$n=12.5 \text{ meses.}$$

En este ejemplo ocurre algo semejante a lo del ejemplo 8.12. Se necesitan, teóricamente, 12.5 meses para saldar la deuda. Sin embargo, en la práctica tenemos, entre otras, las siguientes alternativas.

1a. Alternativa
El resultado se redondea a un entero y con este valor se vuelve a calcular el valor de la mensualidad.

$P = 8\,500$

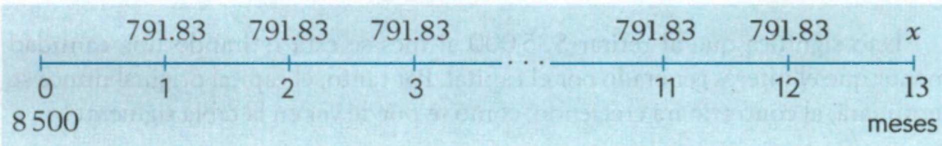
$i = \frac{28}{12}\%$ mensual

$n = 13$ meses (valor redondeado)

$$A = \frac{Pi}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{(8\,500)\left(\frac{0.28}{12}\right)}{1-\left(1+\frac{0.28}{12}\right)^{-13}} = \$765.56$$

Con el fin de amortizar la deuda se deben realizar 13 pagos mensuales de \$765.56.

2a. Alternativa
Se pagan 12 mensualidades de \$791.83 y al final del treceavo mes se da un pago complementario que amortice totalmente la deuda. El valor del pago complementario se obtiene mediante una ecuación de valor:



x representa el valor del pago final. Tomando el momento actual como fecha focal, se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$8\,500 = 791.83\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.28}{12}\right)^{-12}}{\left(\frac{0.28}{12}\right)}\right] + \frac{x}{\left(1+\frac{0.28}{12}\right)^{-13}}$$

$$8\,500 = 8\,204.98304 + \frac{x}{0.740930427}$$

$$x = \$218.60$$

Ejemplo 6.14

Tomás se ganó $6 000 000 en el sorteo *Melate*. Piensa depositar este dinero en una inversión bancaria que le da 8.4% compuesto cada mes e ir retirando $35 000 mensuales, con el fin de vivir un tiempo sin trabajar, hasta que el dinero se agote. ¿Cuántos retiros podrá efectuar?

Solución:

$$n = \frac{-\log\left[1-\dfrac{Pi}{A}\right]}{\log(1+i)} = \frac{-\log\left[1-\dfrac{(6\,000\,000)\left(\dfrac{0.084}{12}\right)}{35\,000}\right]}{\log\left(1+\dfrac{0.084}{12}\right)} = \frac{-\log(-0.2)}{\log 1.007}$$

Al intentar obtener el logaritmo de −0.2, la calculadora marca error. El lector recordará que el logaritmo de un número negativo no existe; por tanto, el problema no tiene solución.

Al calcular el interés generado por los $6 000 000 al final del primer mes de inversión, se obtiene

$$i = (6\,000\,000)\left(\frac{0.084}{12}\right)(1) = \$42\,000$$

Esto significa que al retirar $35 000 al mes se está retirando una cantidad menor que el interés generado por el capital. Por tanto, el capital original nunca se terminará; al contrario irá creciendo, como se puede ver en la tabla siguiente:

Fin de mes	Capital	Intereses	Retiro	Monto
1	$6 000 000.00	$42 000.00	$35 000.00	$6 007 000.00
2	$6 007 000.00	$42 049.00	$35 000.00	$6 014 049.00
3	$6 014 049.00	$42 098.34	$35 000.00	$ 6 021 147.34
4	$6 021 147.34	$42 148.03	$35 000.00	$6 028 295.37
Etcétera				

Si Tomás retira justamente $42 000 cada mes, el capital inicial permanece constante todo el tiempo. Si Tomás desea agotar el dinero, deberá retirar más de $42 000 mensuales.

Ejemplo 6.15

La camioneta modelo *Dolby*, de la compañía *Láser Motors*, tiene un precio de contado de $380 000. Se vende a crédito mediante un pago inicial de $114 000 y el resto ($266 000) con 48 pagos mensuales de $7 538.50 cada uno. Obtenga la tasa nominal de interés que está cobrando la agencia automotriz. Asimismo, obtenga el interés total que pagaría una persona que compre la camioneta a crédito.

Solución:

El despeje de i de las ecuaciones (6.1) y (6.2) es imposible. La única forma de resolver un problema donde se pide calcular la tasa de interés de una anualidad es mediante el procedimiento conocido como **prueba y error**. También se puede utilizar una calculadora programable, una calculadora financiera o una computadora con software financiero.

El método de *prueba y error* consiste en probar valores de i en la fórmula correspondiente hasta que se llegue a un valor aceptable para i. En este ejemplo, se deberá usar el método de prueba y error en la ecuación (6.2), ya que se trata de un problema cuyo valor presente se conoce.

Los datos son:

$P = \$266\,000$

$A = \$7\,538.50$

$n = 48$ meses

Sustituyendo los datos en la fórmula (6.2), se tiene:

$$266\,000 = 7\,538.50\left[\frac{1-(1+i)^{-48}}{i}\right]$$

Al pasar 7 538.50 al lado izquierdo de la igualdad, se tiene

$$35.28553426 = \left[\frac{1-(1+i)^{-48}}{i}\right]$$

A partir de este momento se propone un valor para i; con este valor se evalúa el lado derecho de la igualdad anterior. Si el resultado es igual al valor del lado izquierdo, el valor propuesto es el correcto, pero si el resultado no es igual al del lado izquierdo, se deberá proponer otro valor para i.

Suponga, para empezar, una tasa de 2% mensual:

$$35.28553426 = \left[\frac{1-(1+0.02)^{-48}}{0.02}\right]$$

$$35.28553426 \neq 30.67311957$$

Como el resultado obtenido es menor al del lado izquierdo de la igualdad, esto significa que la tasa de interés es más baja. Si suponemos ahora una tasa de 1% mensual, entonces:

$$35.28553426 = \left[\frac{1-(1+0.01)^{-48}}{0.01}\right]$$

$$35.28553426 \neq 37.97395949$$

Ahora, el resultado obtenido es superior a 35.28553426. Por tanto, la tasa de interés se encuentra entre 1% y 2% mensual. Probemos con 1.5% mensual:

$$35.28553426 = \left[\frac{1-(1+0.015)^{-48}}{0.015}\right]$$

$$35.28553426 \neq 34.04255365$$

El resultado obtenido volvió a ser menor que 35.28553426, pero la diferencia entre ambos valores es pequeña, por tanto, la tasa de interés se encuentra entre 1% mensual y 1.5% mensual. Llevando a cabo ensayos adicionales entre estos dos valores y utilizando interpolación lineal, se llega a una tasa de interés de 1.333% mensual, como una buena aproximación a la tasa de interés buscada:

$$35.28553426 = \left[\frac{1-(1+0.01333)^{-48}}{0.01333}\right]$$

$$35.28553426 \neq 35.28801626$$

Podemos concluir que la tasa de interés cobrada por la agencia automotriz es de 1.333% mensual, que corresponde a una tasa anual de 16% capitalizable cada mes.

Si se utiliza una calculadora programable, una calculadora financiera, una computadora con software financiero o una hoja de cálculo, como Excel, el valor que se obtiene para i es 1.33332434498% mensual.

El interés total cobrado por el crédito es:

$$i = (7\,538.50)(48) - 266\,000 = \$95\,848$$

Ejemplo 6.16

Roberto ha depositado al final de cada quincena \$600 en una cuenta de ahorro. Al cabo de 2 años se tiene un monto de \$31 808.93. ¿Qué tasa nominal, capitalizable cada quincena, ha ganado?

Solución:

Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación (6.1), se tiene:

$$31\,808.93 = 600\left[\frac{(1+i)^{48}-1}{i}\right]$$

$$53.01488333 = \left[\frac{(1+i)^{48}-1}{i}\right]$$

Como el despeje de i es imposible se debe proceder por prueba y error, tal como se hizo en el ejemplo anterior. Al ensayar diferentes valores de i, se llega al siguiente resultado, el cual es una buena aproximación,

$$i = 0.42\% \text{ quincenal} = 10.08\% \text{ anual.}$$

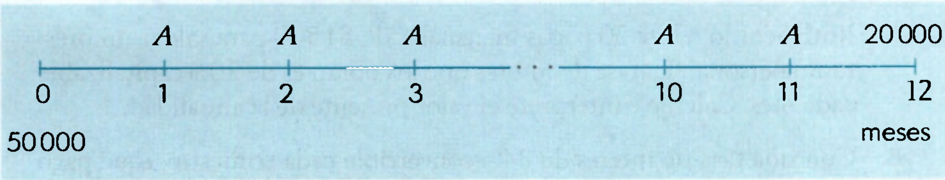
Al utilizar una calculadora financiera se obtiene que $i = 10\%$ anual capitalizable cada quincena.

Ejemplo 6.17

Un préstamo de \$50 000 se debe pagar mediante 11 pagos mensuales iguales vencidos y un pago único de \$20 000 realizado un mes después del último pago mensual. Calcule el pago mensual, si la tasa de interés es de 30% capitalizable cada mes.

Solución:

El diagrama de tiempo es:



donde A es el valor del pago mensual.

El problema se resuelve planteando una ecuación de valor. Si se toma como fecha focal el momento actual, entonces:

$$50\,000 = A\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.30}{12}\right)^{-11}}{\left(\frac{0.30}{12}\right)}\right] + \frac{20\,000}{\left(1+\frac{0.30}{12}\right)^{12}}$$

$$50\,000 = 9.514208713\,A + 14\,871.1177$$

$$A = \$3\,692.25$$

Ejercicios 6.2

1. ¿Cuál es el monto y el interés ganado al depositar $1 000 cada mes durante 10 años, en una cuenta bancaria que da 8% anual capitalizable cada mes?

2. Una familia desea empezar a ahorrar para realizar un viaje a Hawai. Se tiene pensado realizarlo dentro de 2 años. Con este fin se depositan $2 700 cada fin de quincena en una cuenta que genera intereses a una tasa de 1.5% mensual capitalizable cada quincena. Obtenga el monto y los intereses ganados.

3. Santiago depositó $5 000 al final de cada trimestre durante 3 años. Si no realizó ningún retiro en todo este tiempo y su banco le abonaba 1% mensual capitalizable cada trimestre, ¿cuál fue el valor futuro de la anualidad al cabo de los 3 años? ¿Qué tanto de esa cantidad son intereses?

4. Se depositan 3 500 dólares en una cuenta de ahorros al final de cada semestre, durante ocho años y medio. Si no se realiza ningún retiro, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta? La tasa de interés es de 5.5% semestral capitalizable cada semestre.

5. ¿Qué cantidad se acumulará en 15 meses si se depositan $300 al finalizar cada semana en una cuenta bancaria que paga 10% capitalizable cada semana?

6. Obtenga el valor presente de $7 200 semestrales durante cinco años y medio, a una tasa de interés de 28% capitalizable en forma semestral. Interprete el resultado obtenido.

7. Ruth acordó hacer 20 pagos mensuales de $1 500 para saldar un préstamo personal. La tasa de interés que le cobran es de 20% capitalizable cada mes. Calcule e interprete el valor presente de la anualidad.

8. Con una tasa de interés de 34% convertible cada trimestre, ¿qué pago único de inmediato es equivalente a 12 pagos trimestrales de $22 000 cada uno, si el primero de ellos se realiza dentro de 3 meses?

9. Se puede comprar una casa en Europa mediante un pago inicial de 20 000€ y pagos bimestrales de 1 200€ durante 14 años. Encuentre su valor en efectivo considerando que los pagos incluyen un interés de 9.6% convertible cada bimestre.

10. Una tienda departamental vende hornos de microondas a crédito, sin enganche y 25 pagos semanales de $76 cada uno. Si se carga 42% de interés, obtenga el precio de contado y el interés que se paga por comprar a crédito.

11. La prima a pagar por un seguro de incendio y explosión para una casa habitación es de $904.90 al final de cada trimestre. Si el asegurado desea pagar por adelantado la prima de un año, ¿cuánto debe pagar, si la tasa de interés es de 6.5% trimestral capitalizable cada trimestre?

12. Ricardo consiguió una beca para estudiar, durante 2 años, una maestría en Mecánica Cuántica, en Estados Unidos. Por tal motivo renta su casa durante 2 años en $2 800 por mes vencido. Si una persona desea rentarla pagando por adelantado el alquiler de los 2 años, ¿cuánto tendrá que pagar suponiendo que el valor del dinero es de 13% anual capitalizable cada mes?

13. Laura está por jubilarse y desea recibir $8 000 cada mes, durante 25 años. Si el valor promedio del dinero es de 11% capitalizable cada mes, ¿cuánto tiene que haber en su fondo de pensiones al momento de la jubilación?

14. ¿Cuánto se tiene que depositar cada bimestre en una cuenta que paga 14% anual con capitalización bimestral, para acumular 500 000 pesos al término de 9 años y 10 meses?

15. Si el dinero gana un interés de 1% mensual convertible cada mes, ¿cuánto deberá ahorrar cada mes una persona que desea tener $100 000 en 5 años?

16. Un granjero acaba de comprar una mezcladora y desea tener suficiente dinero a la mano para comprar otra igual al final de la vida útil de la que acaba de comprar, que es de 5 años. Estima que el costo de la nueva mezcladora será de $190 000, menos $10 000 que obtendría de la otra al venderla. Planea realizar depósitos cada trimestre a una tasa de 14% capitalizable trimestralmente. Calcule el valor del depósito.

17. Una empresa deberá saldar una deuda con valor de vencimiento por un millón de pesos, dentro de 5 años. Para pagar esta deuda, se decide crear un fondo de ahorro con depósitos mensuales iguales y una tasa de interés de 7.92% capitalizable cada mes. ¿Qué cantidad se debe depositar cada mes en el fondo de ahorro?

18. Una persona compra un departamento que cuesta $230 000 de contado. Da un anticipo de 25% y el saldo se va a liquidar en 15 años mediante abonos mensuales. Calcule el pago mensual y el interés total a pagar, si la tasa de interés es de 16% capitalizable cada mes.

19. El beneficiario de un seguro de vida tiene la opción de recibir un pago único de $800 000 en este momento, o bien, pagos cuatrimestrales iguales durante 6 años. Si la tasa de interés es de 11% compuesto cada cuatrimestre, determine el valor del pago semestral.

20. El señor Villa piensa comprar una camioneta solicitando un préstamo personal a 3 años y una tasa de interés de 15% compuesto cada mes. El precio de contado de la camioneta es de $195 700. ¿De qué cantidad serían los pagos mensuales?

21. El plan de jubilación de Carlos consiste en un retiro quincenal de un fondo de jubilación. El saldo de la cuenta es de $1 350 000 al inicio del periodo de jubilación y la tasa de interés es de 0.83% mensual capitalizable cada quincena. Al momento de jubilarse, Carlos tiene una esperanza de vida de 18 años. ¿Cuánto puede retirar cada quincena?

22. Una compañía constructora vende un conjunto de casas en $870 000 cada una. A crédito, se da un pago inicial de 25% y el resto se paga en abonos mensuales iguales. La tasa de interés es de 13.9% anual capitalizable cada mes y el plazo es de 10 años.
a) ¿Cuál es el pago mensual requerido?
b) ¿Cuál es el importe total de los pagos?
c) ¿Cuánto se pagará por intereses?
d) ¿Cuál es el costo total de la casa?

23. El señor Andrade queda incapacitado de por vida a consecuencia de un accidente laboral. La compañía donde trabaja le concede una indemnización que sumada a sus ahorros personales forma un capital de $1 630 000, con lo cual desea asegurarse una renta mensual para los próximos 35 años, que es su esperanza de vida. Si el señor Andrade puede invertir su dinero a 1.31% mensual capitalizable cada mes,
a) ¿Cuál será la renta mensual si desea conservar intacto su capital?
b) ¿Cuál será la renta mensual si el capital se agota en 35 años?

24. Una pareja que está por casarse compra un refrigerador cuyo precio de contado es de $3 415. Pagan 15% como enganche y el resto en 18 mensualidades iguales. Si la tienda carga 44% convertible cada mes, ¿cuál será el valor de las mensualidades? ¿Cuánto se paga por el refrigerador? ¿Cuál es el interés total a pagar?

25. ¿Cuántos pagos semanales de $246.72 tendrá que hacer el comprador de una sala que cuesta $6 200, si da un enganche de 20% y acuerda pagar 41.5% de interés capitalizable en forma semanal?

26. Una persona muere y deja a su familia una herencia de $2 000 000. El testamento especifica que la familia debe recibir pagos mensuales de $28 273.36. ¿Cuántos pagos mensuales obtendrá la familia si la tasa de interés es de 8% anual capitalizable cada mes?

27. Karla puede ahorrar $300 quincenales. Si los invierte en una cuenta de ahorro que paga 6% capitalizable cada quincena, ¿en cuánto tiempo logrará ahorrar $20 000?

28. ¿Cuántos pagos mensuales de $1600 cada uno serán necesarios para saldar una deuda de $30 000 contraída hoy con intereses de 35% capitalizable cada mes? En caso de que el número de pagos no sea entero,
a) ¿Cuál será el pago mensual, si el resultado se redondea?
b) ¿Cuál será el valor del pago complementario?

29. Una pareja próxima a contraer matrimonio está planeando pasar su luna de miel en Australia. Según sus cálculos, el costo total del viaje será de 21 000 dólares. Para lograr su sueño, comienzan a depositar cada mes 1 200 dólares en una cuenta que produce 8.8% de interés anual capitalizable cada mes. Calcule el número de depósitos necesarios para reunir el costo del viaje.

30. Una casa se vende en $725 000, precio de contado. Una familia la compra a crédito dando 30% de enganche y el resto en mensualidades de $7500 que incluyen un interés de 1.4% mensual. ¿Cuántos pagos completos de $7500 deberán hacerse y cuál será el valor del último pago?

31. El señor Arteaga se jubilará dentro de 2 meses. Tiene un fondo de pensiones por $438 765 y desea retirar $4 000 cada quincena. Si el dinero está invertido a 10% capitalizable cada quincena, ¿cuántos pagos quincenales de $4 000 recibirá y cuál será el valor del último pago?

32. ¿Cuántos retiros mensuales de $3 200 puede usted hacer si tiene un capital de $500 000 invertido a 0.66% mensual capitalizable cada mes?

33. Una copiadora digital se vende en $86 990, precio de contado. A crédito, se puede comprar con 4 pagos mensuales vencidos de $24 990 cada uno. Calcule el interés y la tasa de interés anual capitalizable cada mes.

34. Un PDA, (Asistente Personal Digital, por sus siglas en inglés) puede comprarse en $4 300 de contado o mediante 36 pagos quincenales de $152. Calcule la tasa nominal anual de interés y la tasa efectiva.

35. Una persona ha depositado $300 semanales en una cuenta de ahorro. Al cabo de 5 años tiene en su cuenta la cantidad de $95 058. ¿Qué interés se ganó y cuál fue la tasa nominal anual capitalizable cada semana ganada? ¿Cuál fue la tasa efectiva ganada?

36. Encuentre la tasa nominal anual convertible cada trimestre mediante la que, con depósitos trimestrales de 625 dólares acumularán un monto de 25 329.39 dólares en 7 años.

37. Una escuela que ofrece cursos por correspondencia tiene los siguientes planes de pago para cubrir el costo total del curso de Electrónica Digital.

Plan de contado	Plan normal	Plan intensivo
$4 750	24 pagos mensuales de $260	12 pagos mensuales de $480

Si consideramos capitalización de intereses en forma mensual, ¿qué tasa nominal anual de interés carga la escuela en los planes normal e intensivo? ¿Qué plan escogería usted y por qué?

38. El señor Romo está pagando una deuda mediante abonos mensuales vencidos de \$430 cada uno. Si no efectúa los seis primeros pagos, ¿cuánto debe pagar al vencer el séptimo pago para poner al día su deuda? La tasa de interés moratorio es de 45% capitalizable cada mes.

39. Margarita abre una cuenta con \$10 000. A los 3 meses deposita \$5 000 y, a partir del cuarto mes de la apertura de la cuenta, deposita \$1 000 cada mes. Si la tasa de interés es de 8.24% capitalizable cada mes, ¿cuánto se tendrá acumulado al cabo de 3 años y 8 meses? ¿Cuánto interés se ganó?

40. Cada trimestre Cristina deposita \$5 000 en su cuenta de ahorro, la cual gana 2.19% trimestral. Después de 2 años y 6 meses, Cristina suspende los depósitos trimestrales y el monto obtenido se transfiere, en ese momento, a un fondo de inversión que da 9% capitalizable cada día. Si el dinero permaneció 2 años en el fondo de inversión, obtenga el monto final y el interés total ganado. Utilice año comercial.

41. Lolita desea comprar un automóvil nuevo dentro de 3 años y pagarlo de contado. Para cumplir su deseo decide ahorrar \$2 500 cada mes en una cuenta que le paga un interés de 1.1% mensual. Justo después de realizado el depósito número 24, la tasa de interés baja a 0.92% mensual y, debido a esto, Lolita decide incrementar su mensualidad a \$3 000. Obtenga el monto al cabo de 3 años.

42. Ramiro compró una computadora a crédito. Debe pagar \$529 cada fin de quincena durante 2 años. La tasa de interés es de 3.3% mensual capitalizable cada quincena. Al efectuar el pago número veinticinco desea liquidar, en ese momento, su adeudo.
    a) ¿Cuánto debe pagar para que su deuda quede saldada?
    b) ¿Cuál es el precio de contado de la computadora, sabiendo que no se dio enganche?

43. Alfonso compró a crédito un automóvil que cuesta \$165 000 de contado. Dio un enganche de 25% y el resto a pagar en 3 años en abonos mensuales, pagando un interés de 18% anual capitalizable cada mes. Al efectuar el pago número 20, desea liquidar el saldo mediante un pago único en ese momento. ¿Qué cantidad debe pagar?

44. Dos tiendas departamentales ofrecen una cámara de video a crédito. En la tienda El Norte se requiere un pago inicial de \$1 000 y 13 mensualidades vencidas de \$1 058.42 cada una. En la tienda *El Sur* no se

da enganche y 18 mensualidades vencidas de $947 cada una. Si la tasa de interés usada por ambas tiendas es de 32% capitalizable cada mes, ¿en cuál tienda conviene comprar la cámara?

45. ¿Cuál es el precio de contado de una impresora láser que se paga mediante un enganche de 20% del precio de contado y 10 pagos quincenales de $352 cada uno? La tasa de interés es de 1.56% quincenal.

46. ¿Cuál es el precio de contado de un equipo industrial que se compró de la siguiente forma?:

- 300 000 dólares de pago inicial.
- 40 000 dólares mensuales durante los próximos 15 meses.
- Un pago final de 500 000 dólares al final del mes número 18.

La tasa de interés es de 11.5% anual capitalizable cada mes.

47. Una compañía le ofrece al ingeniero Álvarez $100 000 mensuales durante los próximos 5 años y $200 000 mensuales durante los siguientes 5 años, por los derechos para comercializar de manera exclusiva un invento suyo. Si el ingeniero Álvarez desea que el dinero le sea pagado en una sola exhibición en este momento, ¿cuál es la cantidad que debe recibir, si el valor del dinero es de 8% capitalizable cada mes?

48. Un aparato de rayos X se compró a crédito, sin enganche, pagando $55 000 bimestrales durante los dos primeros años y $70 000 mensuales durante el tercer año. Si la tasa de interés cargada es de 27% capitalizable cada bimestre en los dos primeros años y de 25% capitalizable cada mes en el tercer año, encuentre el precio de contado del aparato de rayos X.

49. Felipe le debe a Víctor la cantidad de $60 000 y acuerda pagarle $12 000 al final de cada uno de los siguientes cinco bimestres y un último pago al término del sexto bimestre. ¿De cuánto debe ser el pago final si la tasa de interés es de 28% compuesto cada bimestre?

50. Una deuda debe saldarse en dos años mediante pagos de 6 000 dólares cada bimestre vencido. El deudor acuerda con su acreedor en reestructurar la deuda, liquidándola en tres años y medio, con pagos mensuales iguales vencidos. Encuentre el valor de los nuevos pagos, si la tasa de interés efectiva es de 13% anual.

51. La empresa donde trabaja Rubén acaba de establecer un fondo de jubilación para sus empleados. Él tiene actualmente 30 años y se jubilará al cumplir los 65. Rubén deberá depositar cantidades iguales cada mes durante los próximos 35 años, de tal manera que al momento de jubilarse tenga un monto tal que le permita efectuar retiros quincenales de \$5 000 durante 18 años, que es su esperanza de vida. Despreciando los aumentos de sueldo y la inflación, ¿qué cantidad debe abonar al fondo si éste paga una tasa de interés de 10% anual capitalizable cada quincena?

52. El señor Long desea tener 310 000 dólares dentro de 12 años, efectuando depósitos mensuales a una cuenta bancaria. El banco paga 8% anual capitalizable cada mes. Después de 7 años, la tasa de interés aumenta a 9% anual. Si el señor Long continúa efectuando los mismos depósitos, ¿en cuánto tiempo tendrá los 310 000 dólares?

53. Javier es un prestamista que presta dinero aplicando una tasa de descuento de 30% anual. El préstamo se paga mediante abonos mensuales, los cuales se obtienen al dividir el valor de vencimiento de la deuda entre el número de meses. Encuentre la tasa de interés anual capitalizable cada mes pagada por una persona que solicitó \$8 000 a este prestamista, a pagar en 10 abonos mensuales.

54. Fidel compró el 5 de enero de 2003 una computadora, cuyo precio de contado es de \$22 500, y acordó pagarla en 24 mensualidades iguales vencidas, sin dar enganche.

El contrato firmado por Fidel estipula que deberá pagar el 5 de diciembre de 2003 y el 5 de diciembre del año 2004, "pagos navideños" equivalentes a 4 pagos mensuales normales. Estos pagos son independientes de los pagos normales que se deben realizar cada mes. Si la tasa de interés que cobra la tienda es de 2.98% mensual, ¿a cuánto ascienden los pagos mensuales y de cuánto serán los *pagos navideños*?

Ejercicios especiales

1. En la agencia automotriz *Vehículos Automotores, S. A.* se puede comprar un automóvil a crédito bajo las siguientes condiciones:

- \$43 000 de enganche.
- 36 mensualidades vencidas de \$4 918.37.
- un pago extraordinario de \$20 000 a efectuarse en el mes 12, independiente de la mensualidad normal.
- un pago extraordinario de \$25 000 a efectuarse en el mes 24, independiente de la mensualidad normal.

Si el precio de contado del automóvil es de $215 000, encuentre la tasa de interés anual capitalizable cada mes y el interés total que se paga por el financiamiento.

2. Un bulldozer, cuyo precio de contado es de 100 000 dólares, se compra a crédito en septiembre. El primer pago mensual se dará un mes más tarde, y los pagos continuarán por 5 años. Debido al clima de la región, la máquina no se usará en los meses de invierno, y por tal motivo, el comprador no hará los pagos mensuales correspondientes a enero, febrero y marzo. Si la tasa de interés anual es de 14% capitalizable cada mes, ¿qué pago mensual es necesario para amortizar la deuda?

Tema especial

ANUALIDADES Y CAPITALIZACIÓN CONTINUA

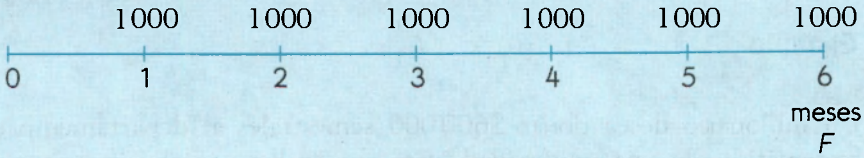
Cuando se tiene una anualidad cuyos intereses se capitalizan continuamente, el cálculo del valor futuro se obtiene formando una ecuación de valor, utilizando la fórmula del monto compuesto con capitalización continua.

Ejemplo 1

Suponga que se depositan $1 000 cada mes en una cuenta de ahorros que produce 18% de interés capitalizable continuamente. ¿Cuál será el monto al cabo de 6 meses?

Solución:

El diagrama de tiempo que representa esta situación es el siguiente:



Si se escoge la fecha focal en el mes sexto, entonces se forma la siguiente ecuación de valor:

$$F = 1000\,e^{(0.18/12)(5)} + 1000\,e^{(0.18/12)(4)} + 1000\,e^{(0.18/12)(3)} + 1000\,e^{(0.18/12)(2)} + 1000\,e^{(0.18/12)(1)} + 1000$$

Factorizando:

$$F = 1000[e^{(0.015)(5)} + e^{(0.015)(4)} + e^{(0.015)(3)} + e^{(0.015)(2)} + e^{(0.015)(1)} + 1]$$

$$F = 1000\,(6.231316156) = \$6\,231.32$$

El lector comprenderá que si el número de pagos periódicos, sean éstos depósitos o retiros, es muy grande, el uso de una ecuación de valor resulta impráctico debido al gran número de operaciones que se tendrán que realizar. En este caso es mejor utilizar una fórmula. A continuación se darán, sin demostración, las fórmulas para obtener el monto o valor futuro (F) y el valor presente o valor actual (P) de una anualidad capitalizable continuamente.

$$F = A\left[\frac{e^{in} - 1}{e^{i} - 1}\right]$$

$$P = A\left[\frac{1 - e^{-in}}{e^{i} - 1}\right]$$

Donde i es la tasa de interés, expresada en forma decimal y n es el número de pagos (depósitos o retiros). Las unidades de tiempo de i y de n deben coincidir.

Utilizando el ejemplo 1, se tiene que:

$A = 1000$

$i = 18\%$ anual $= 1.5\%$ mensual $= 0.015$ por mes

$n = 6$ depósitos mensuales

$$F = 1000\left[\frac{e^{(0.015)(6)} - 1}{e^{0.015} - 1}\right] = \$6\,231.32$$

Ejemplo 2

Un millonario desea donar \$600 000 semestrales al departamento de matemáticas de una universidad, para que se lleve a cabo investigación en matemáticas aplicadas. El donativo se entregará al final de cada semestre durante los próximos 5 años. Si el dinero se manejará a través de un fideicomiso, ¿qué cantidad deberá dar el millonario en este momento con el fin de establecer el fideicomiso, sabiendo que el dinero gana 12% capitalizable en forma continua?

Solución:

$A = 600\,000$

$i = 12\%$ anual $= 1\%$ mensual $= 0.01$ por mes

$n = 10$ retiros semestrales

$$P = 600\,000\left[\frac{1 - e^{-(0.01)(10)}}{e^{0.01} - 1}\right] = \$5\,681\,254$$

Ejemplo 3

Una persona compra una camioneta cuyo precio de contado es de \$385 000. Da un enganche de \$50 000 y el resto a pagar en 36 mensualidades. Si la tasa de interés es de 1.4% mensual capitalizable en forma continua, ¿cuál es el valor de los pagos mensuales?

Solución:

Despejando A de la fórmula de valor presente y sustituyendo las variables por los valores numéricos, se tiene:

$$A = \frac{P(e^{i} - 1)}{1 - e^{-in}} = \frac{335\,000(e^{0.014} - 1)}{1 - e^{-(0.014)(36)}}$$

$$A = \$11\,930$$

Ejercicios

1. Un trabajador crea un fondo de ahorro con el fin de tener un ingreso extra al jubilarse. En este momento el trabajador tiene 38 años cumplidos y piensa depositar \$900 cada bimestre hasta que cumpla los 65 años. Si el fondo produce un interés de 10% anual capitalizable continuamente, calcule el monto que tendrá al momento de retirarse.
2. Durante dos años, Lucila depositó \$250 cada quincena en una alcancía. Si el banco paga 0.25% mensual capitalizable continuamente en las cuentas de ahorro, ¿cuánto dejó de ganar Lucila?

3. El ganador del premio mayor de la lotería recibirá \$200 000 trimestrales durante 15 años. Sin embargo, si él así lo desea, puede recibir \$8 000 000 en este momento como pago total. ¿Qué le conviene hacer, si esta persona puede invertir el dinero y ganar 10% anual capitalizable en forma continua?

4. Obtenga el precio de contado de un electrodoméstico por el que se pagó un enganche de 15% del precio de contado y 18 pagos quincenales de \$175, si la tasa de interés fue de 28.4% capitalizable continuamente.

5. Ofelia compra un terreno que cuesta \$100 000. Paga un enganche de 10% y obtiene un crédito a 5 años de plazo para pagar el resto en mensualidades. Si la tasa de interés es de 21% capitalizable continuamente, ¿cuál será el valor del pago mensual? ¿A cuánto asciende el total de los intereses que pagará?

6. ¿Cuánto deberá depositar una persona cada fin de quincena en una cuenta bancaria, si desea acumular \$120 000 en tres años? La tasa de interés es de 9% con capitalización continua.

7. ¿Cuántos retiros mensuales de \$7 500 podrá hacer el señor Morales de una cuenta bancaria, cuyo monto es de \$532 513 y la tasa de interés es de 8.65% anual capitalizable en forma continua?

8. ¿Cuántos depósitos semestrales vencidos de \$65 000 son necesarios para acumular \$1 500 000? Suponga una tasa de interés de 5.5% semestral capitalizable continuamente.

6.3 Anualidades anticipadas

Una **anualidad anticipada** es aquella en donde los pagos se llevan a cabo al inicio del periodo de pago. Son ejemplos de anualidades anticipadas los pagos anuales (primas) de un seguro de vida, la renta de una casa u oficina, algunos planes de crédito que estipulan que los pagos deben realizarse al comienzo de los periodos convenidos, etcétera.

En esta sección se estudiarán las anualidades ciertas, simples, anticipadas e inmediatas. Se recuerda al lector que una anualidad es cierta cuando se conoce con anticipación las fechas de inicio y fin de la anualidad. La anualidad es simple cuando el periodo de capitalización coincide con el periodo de pago. La anualidad es inmediata porque los pagos se inician en el mismo periodo en que la operación se formaliza.

A las anualidades ciertas, simples, anticipadas e inmediatas se les conoce comúnmente con el nombre de **anualidades anticipadas**.

Es práctica común que en los problemas de anualidades anticipadas, al igual que en las vencidas, no se haga mención explícita del periodo de capitalización; se supone que la capitalización de los intereses coincide con el periodo de pago.

La diferencia entre una anualidad ordinaria y una anticipada se puede ver gráficamente en los siguientes diagramas de tiempo:

Diagrama de tiempo de una anualidad vencida

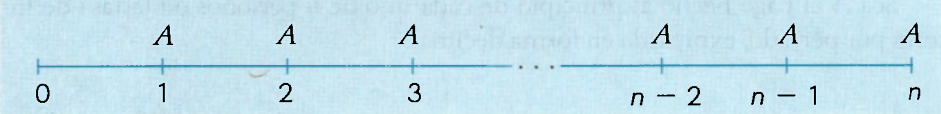
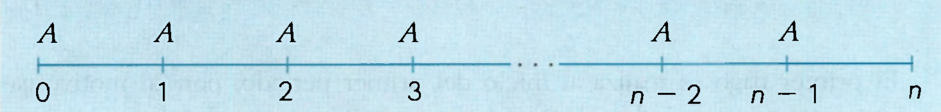


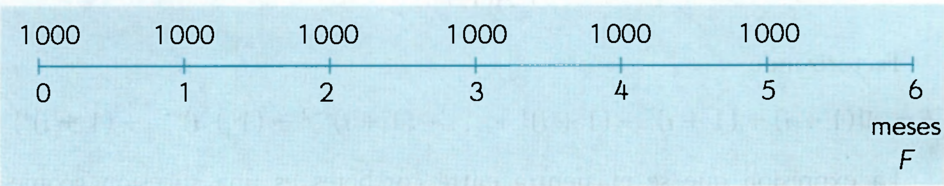
Diagrama de tiempo de una anualidad anticipada



Observe que la anualidad anticipada comienza con un pago y concluye un periodo después de haber cubierto el último pago. Por tal motivo, el n-ésimo pago gana intereses por un periodo debido a que se hizo al inicio del último periodo.

El siguiente ejemplo muestra cómo se calcula el monto o valor futuro de una anualidad anticipada.

Se depositan $1 000 al inicio de cada mes en un banco que paga 2% mensual capitalizable en forma mensual. ¿Cuál será el monto después de 6 depósitos?



Si F representa el monto de la anualidad, se puede formar la siguiente ecuación de valor:

$$F = 1000\,(1.02)^6 + 1000\,(1.02)^5 + 1000\,(1.02)^4 + 1000\,(1.02)^3 + 1000\,(1.02)^2 + 1000\,(1.02)$$

$$F = 1000\,(1.02^6 + 1.02^5 + 1.02^4 + 1.02^3 + 1.02^2 + 1.02)$$

$$F = \$6\,434.28$$

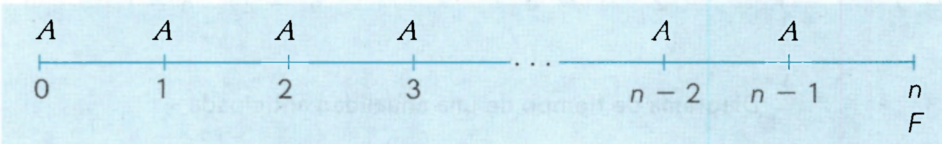
El valor presente de la anualidad se puede obtener calculando el valor presente del monto, esto es:

$$P = \frac{6\,434.28}{1.02^6} = \$5\,713.46$$

El valor presente de una anualidad anticipada tiene las mismas interpretaciones que el valor presente de una anualidad vencida.

La deducción de la fórmula para obtener el monto o valor futuro de una anualidad anticipada se lleva a cabo generalizando el ejemplo anterior.

Sea A el pago hecho al principio de cada uno de n periodos e i la tasa de interés por periodo, expresada en forma decimal.



El primer pago se realiza al inicio del primer periodo, por tal motivo ganará intereses por n periodos; el segundo pago ganará intereses por $(n - 1)$ periodos, etc. El último pago genera intereses por un periodo. Si la fecha focal se escoge al final del periodo n, entonces el monto o valor futuro de la anualidad anticipada viene dado por:

$$F = A\,(1 + i)^n + A\,(1 + i)^{n-1} + A\,(1 + i)^{n-2} + \ldots + A\,(1 + i)^3 \\ + A\,(1 + i)^2 + A\,(1 + i)$$

Es decir,

$$F = A(1 + i) + A(1 + i)^2 + A(1 + i)^3 + \ldots + A(1 + i)^{n-2} + A(1 + i)^{n-1} \\ + A(1 + i)^n$$

Factorizando:

$$F = A[(1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \ldots + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^n]$$

La expresión que se encuentra entre corchetes es una sucesión geométrica, donde:

$$a_1 = (1 + i)$$

$$r = (1 + i)$$

Aplicando la ecuación (3.4) para la suma de n términos de una sucesión geométrica, se obtiene:

$$S_{\overline{n}} = \frac{a_1\,(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{(1 + i)[1 - (1 + i)^n]}{1 - (1 + i)} = \frac{[1 - (1 + i)^n](1 + i)}{1 - 1 - i} = \frac{[(1 + i)^n - 1](1 + i)}{i}$$

Sustituyendo la expresión anterior por la expresión que se encuentra entre corchetes se tiene:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i) \qquad (6.3)$$

La fórmula general para obtener el valor presente de una anualidad anticipada se logra al calcular el valor presente del monto dado por la ecuación (6.3):

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} = F(1+i)^{-n} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)(1+i)^{-n}$$

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n(1+i)^{-n} - (1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)$$

Por tanto:

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i) \qquad (6.4)$$

Ejemplo (6.18.1)

Francisco deposita $2 000 al principio de cada mes, en una cuenta de inversión. Si la tasa de interés es de 1% mensual capitalizable cada mes,

a) Obtenga el monto al cabo de 3 años.

b) ¿Cuál es el interés ganado en los 3 años?

c) Calcule el valor presente de la anualidad.

Solución:

a)

$$F = 2000\left[\frac{(1+0.01)^{36} - 1}{0.01}\right](1+0.01)$$

$$F = \$87\,015.29$$

b)

$$\text{Interés ganado} = I = 87\,015.29 - (2\,000)(36)$$

$$I = \$15\,015.29$$

c)

$$P = 2000\left[\frac{1-(1+0.01)^{-36}}{0.01}\right](1+0.01)$$

$$P = \$60\,817.16$$

Ejemplo 6.19

Una compañía constructora debe invertir durante los próximos 12 años, al comienzo de cada mes, $150 000 en un fondo para la depreciación de su maquinaria. ¿Cuál será el monto de este fondo de depreciación al cabo de 12 años, si ha estado produciendo 9.6% capitalizable cada mes? Si los depósitos mensuales se hicieran al final de cada mes, ¿cuál sería el monto?

Solución:

Como se desea el monto de una anualidad anticipada, se utiliza la fórmula (6.3).

$$F = 150000\left[\frac{\left(1+\frac{0.096}{12}\right)^{144}-1}{\left(\frac{0.096}{12}\right)}\right]\left(1+\frac{0.096}{12}\right)$$

$$F = \$40\,635\,832$$

Si se tratara de una anualidad vencida, el monto se obtiene mediante la fórmula (6.1):

$$F = 150000\left[\frac{\left(1+\frac{0.096}{12}\right)^{144}-1}{\left(\frac{0.096}{12}\right)}\right]$$

$$F = \$40\,313\,325.50$$

Entre los dos resultados, hay una diferencia de $322 506.50.

Ejemplo 6.20

Un automóvil se puede comprar a crédito mediante 48 abonos mensuales anticipados de $4 800. Si la tasa de interés es de 16% capitalizable cada mes, ¿cuál es el valor de contado del automóvil?

Solución:

El valor de contado del automóvil es el valor presente de los abonos mensuales anticipados; por tanto:

$$P = 4\,800\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.16}{12}\right)^{-48}}{\left(\frac{0.16}{12}\right)}\right]\left(1+\frac{0.16}{12}\right)$$

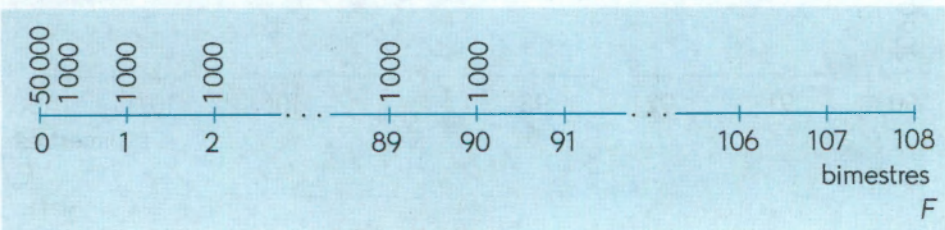
$$P = \$171\,628.50$$

Ejemplo (6.21)

El día de su nacimiento una niña recibió, por parte de sus abuelos maternos, \$50 000 para que sean utilizados en su educación universitaria. El mismo día en que nació la niña su padre le abrió una cuenta de inversión a su nombre, donde depositó el regalo de los abuelos junto con \$1 000 que piensa depositar, a partir de ese momento, cada bimestre, durante 15 años. Después de transcurrido ese tiempo, los depósitos serán suspendidos, pero el dinero se mantendrá en la cuenta hasta que la niña cumpla 18 años, edad en que estará por ingresar a la universidad. ¿Qué cantidad de dinero habrá en la cuenta dentro de 18 años? Suponga que la tasa de interés es de 10% capitalizable cada bimestre.

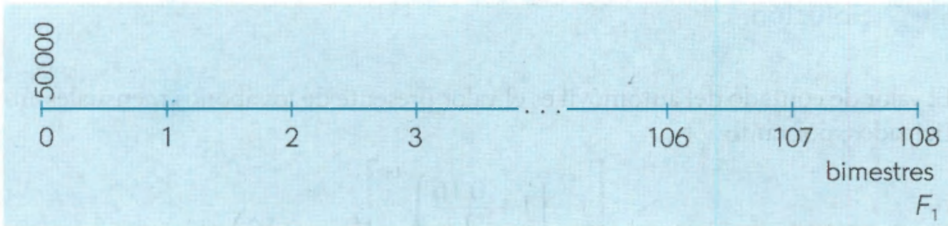
Solución:

El diagrama de tiempo es:



El problema se resuelve en 3 partes.

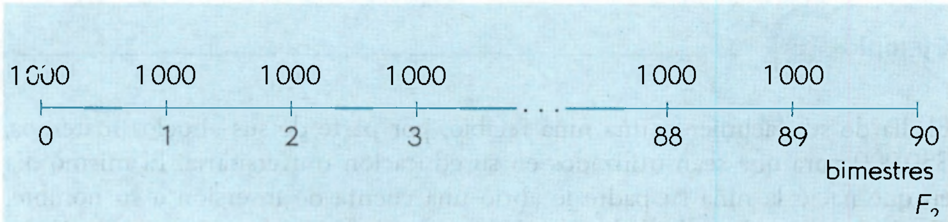
1a. Parte
Obtener el monto (F_1) de \$50 000 durante 18 años (108 bimestres).



$$F_1 = 50000\left(1+\frac{0.10}{6}\right)^{108} = \$298\,028.05$$

2a. Parte

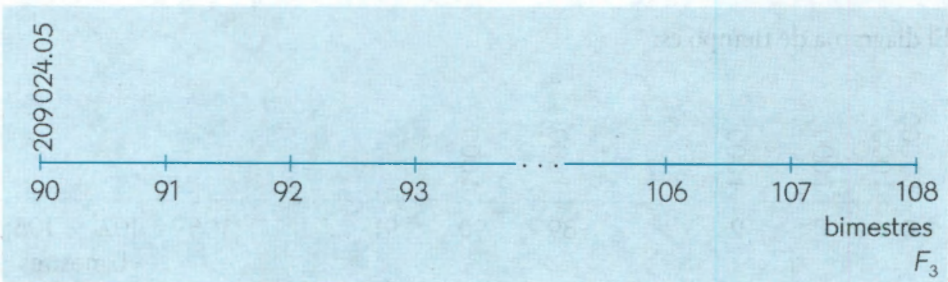
Se obtiene el monto (F_2) de la anualidad anticipada, durante 15 años (90 bimestres)



$$F_2 = 1000\left[\frac{\left(1+\frac{0.10}{6}\right)^{90}-1}{\left(\frac{0.10}{6}\right)}\right]\left(1+\frac{0.10}{6}\right) = \$209\,024.05$$

3a. Parte

Se obtiene el monto (F_3) de \$209 024.05 invertidos de los 15 a los 18 años.



$$F_3 = 209\,024.05\left(1+\frac{0.10}{6}\right)^{18} = \$281\,456.18$$

El monto total al final de los 18 años viene dado por la suma de F_1 y F_3:

$$\text{Monto total} = F_1 + F_3 = 298\,028.05 + 281\,456.18 = \$579\,484.23$$

Ejemplo 6.22

Dentro de 6 años la compañía fabricante de armas de fuego *El Tiro Perfecto, S. A.*, necesitará \$7 000 000 para reemplazar maquinaria depreciada. ¿Cuál será el importe del depósito trimestral que tendrá que hacer la compañía, a partir de este momento, en un fondo de depreciación que paga 11.3% convertible cada trimestre, para acumular dicha cantidad de dinero?

Solución:

En este caso es necesario despejar A de la ecuación (6.3).

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$$

$$A = \frac{Fi}{[(1+i)^n - 1](1+i)}$$

$$A = \frac{(7\,000\,000)\left(\frac{0.113}{4}\right)}{\left[\left(1+\frac{0.113}{4}\right)^{24} - 1\right]\left(1+\frac{0.113}{4}\right)} = \$202\,119.21$$

Ejemplo 6.23

El beneficiario de una herencia puede optar por recibir \$650 000 de inmediato o recibir 20 pagos iguales cada cuatro meses, el primero de ellos se hace de inmediato. ¿Cuál será el valor del pago cuatrimestral si el dinero está invertido a 11.55% anual?

Solución:

Se despeja A de la ecuación (6.4):

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)$$

$$A = \frac{Pi}{[1-(1+i)^{-n}](1+i)}$$

$$A = \frac{(650\,000)\left(\frac{0.1155}{3}\right)}{\left[1-\left(1+\frac{0.1155}{3}\right)^{-20}\right]\left(1+\frac{0.1155}{3}\right)} = \$45\,445.38$$

Ejemplo 6.24

¿Cuántos depósitos semestrales anticipados de $18 781.27 cada uno se deben hacer para acumular un monto de $250 000? La tasa de interés es de 5.14% semestral capitalizable cada semestre.

Solución:

Se despeja n de la ecuación (6.3):

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1 + i)$$

$$\frac{Fi}{A(1+i)} = (1 + i)^n - 1$$

$$\frac{Fi}{A(1+i)} + 1 = (1 + i)^n$$

Tomando logaritmos a ambos lados de la igualdad anterior, se tiene:

$$\log\left[\frac{Fi}{A(1+i)} + 1\right] = n \log(1 + i)$$

Por tanto:

$$n = \frac{\log\left[\frac{Fi}{A(1+i)} + 1\right]}{\log(1+i)} = \frac{\log\left[\frac{(250\,000)(0.0514)}{(18\,781.27)(1+0.0514)} + 1\right]}{\log(1 + 0.0514)}$$

$$n = 10 \text{ depósitos semestrales}$$

Ejemplo 6.25

¿Cuántos pagos mensuales anticipados de $1 240.70 cada uno deben hacerse para amortizar una deuda de $16 000, si hay que pagar intereses a 27% capitalizable cada mes?

Solución:

Se despeja n de la ecuación (6.4):

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1 + i)$$

$$\frac{Pi}{A(1+i)} = 1 - (1+i)^{-n}$$

$$(1+i)^{-n} = 1 - \frac{Pi}{A(1+i)}$$

Tomando logaritmos a ambos lados de la igualdad anterior, se tiene:

$$-n \log(1+i) = \log\left[1 - \frac{Pi}{A(1+i)}\right]$$

Por tanto:

$$n = -\frac{\log\left[1 - \frac{Pi}{A(1+i)}\right]}{\log(1+i)} = -\frac{\log\left[1 - \frac{(16\,000)\left(\frac{0.27}{12}\right)}{(1\,240.70)\left(1+\frac{0.27}{12}\right)}\right]}{\log\left(1+\frac{0.27}{12}\right)}$$

$$n = 15 \text{ pagos mensuales.}$$

Ejemplo 6.26

Una tienda de artículos fotográficos ofrece una videocámara, cuyo precio de contado es de $9785, en mensualidades anticipadas de $886 cada una. Encuentre el número de pagos mensuales, si se carga 30% de interés compuesto cada mes.

Solución:

$$i = 30\% \text{ anual} = 2.5\% \text{ mensual}$$

$$n = -\frac{\log\left[1 - \frac{Pi}{A(1+i)}\right]}{\log(1+i)} = \frac{-\log\left[1 - \frac{(9785)(0.025)}{(886)(1+0.025)}\right]}{\log(1+0.025)}$$

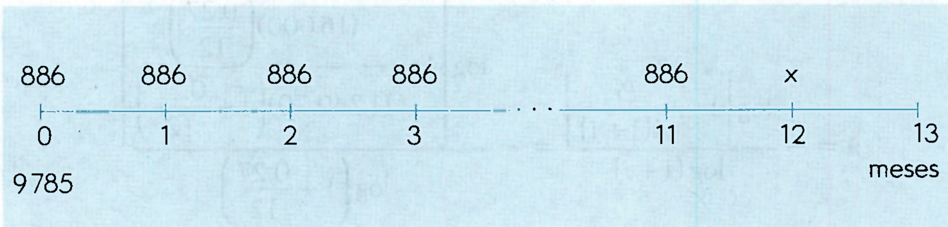
$$n = 12.70999697 \text{ pagos mensuales}$$

Teóricamente se necesitan 12.70999697 meses. En la práctica el resultado se debe ajustar de una manera semejante a los ajustes hechos en las anualidades ordinarias. Una solución sería redondear el resultado a 13 mensualidades y calcular el abono mensual. Esto es:

$$A = \frac{Pi}{[1-(1+i)^{-n}](1+i)} = \frac{(9\,785)(0.025)}{[1-(1+0.025)^{-13}](1+0.025)}$$

$$A = \$869.18$$

Otra forma es pagar doce mensualidades anticipadas de \$886 cada una y al inicio del treceavo mes dar un pago final que amortice totalmente la deuda. Si x representa el valor del pago efectuado al inicio del mes número trece y se toma como fecha focal el momento actual, entonces se forma la siguiente ecuación de valor:



$$9785 = 886\left[\frac{1-(1+0.025)^{-12}}{0.025}\right](1+0.025) + \frac{x}{(1+0.025)^{12}}$$

$$x = \$631.31$$

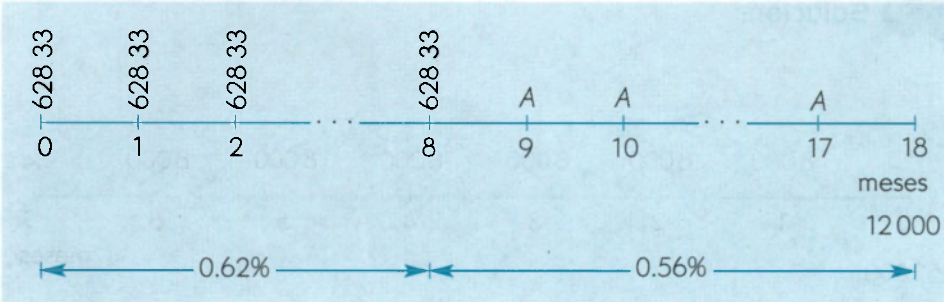
Ejemplo 6.27

El Dr. Silva desea reunir 12 000 dólares con el propósito de realizar un viaje en compañía de su familia a *Disney World*, dentro de un año y medio. Con este fin invierte 628.33 dólares cada mes, empezando de inmediato, en una cuenta de ahorros que le paga una tasa de interés de 0.62% mensual.

El día que fue a depositar el noveno pago, se le informó que la tasa de interés bajó a 0.56% mensual, a partir de ese momento. ¿Qué cantidad deberá depositar cada mes, a partir del próximo mes, con el fin de lograr acumular el monto deseado?

Solución:

Si la tasa de interés no hubiera cambiado, el Dr. Silva lograría acumular 12 000 dólares mediante 18 depósitos mensuales de 628.33 dólares, pero debido a la baja en la tasa de interés, el Dr. Silva deberá incrementar la cantidad a depositar. A continuación se muestra el diagrama de tiempo que ilustra esta situación.

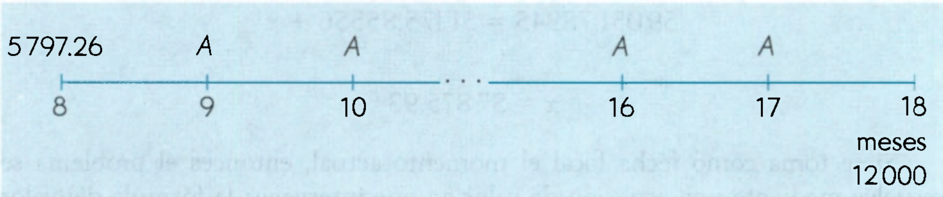


A representa la nueva cantidad que deberá depositar para compensar la baja en la tasa de interés.

En primer lugar se calcula la cantidad que se tiene acumulada al inicio del noveno mes. Esta cantidad se representará como F_1:

$$F_1 = 628.33\left[\frac{(1+0.0062)^8 - 1}{0.0062}\right](1 + 0.0062) + 628.33 = \$5\,797.26$$

El siguiente diagrama de tiempo muestra la situación que se tendría al inicio del noveno mes:



Tomando el inicio del noveno mes (final del octavo mes) como fecha focal, se forma la siguiente ecuación de valor:

$$5\,797.26 + A\left[\frac{1-(1+0.0056)^{-9}}{0.0056}\right] = \frac{12\,000}{(1+0.0056)^{10}}$$

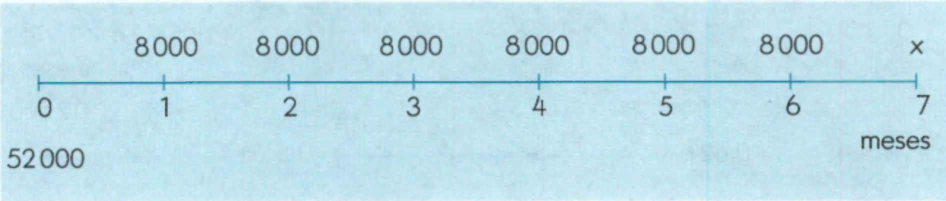
$$5\,797.26 + 8.753088718\,A = 11\,348.24228$$

$$A = 634.17 \text{ dólares}$$

Ejemplo 6.28

Un automóvil usado se vende en $72 000 de contado, o bien mediante un enganche de $20 000 y 6 pagos de $8 000 al mes, así como un séptimo pago final. Si la tasa de interés es de 22% capitalizable cada mes, ¿cuál será el valor del pago final?

Solución:



x representa el valor del pago final. Colocando la fecha focal en el séptimo mes, se observa que ésta se encuentra en un periodo posterior al último pago de \$8 000. Se trata, por tanto, de una anualidad anticipada. La ecuación de valor es:

$$52\,000\left(1+\frac{0.22}{12}\right)^7 = 8000\left[\frac{\left(1+\frac{0.22}{12}\right)^6-1}{\left(\frac{0.22}{12}\right)}\right]\left(1+\frac{0.22}{12}\right)+x$$

$$59\,051.78945 = 51\,175.85556 + x$$

$$x = \$7\,875.93$$

Si se toma como fecha focal el momento actual, entonces el problema se resuelve mediante una ecuación de valor en que intervenga la fórmula del valor presente de una anualidad vencida.

Ejemplo 6.29

Una tienda vende una computadora laptop en \$17 600, precio de contado. Se puede adquirir a crédito dando un pago inmediato de \$1 874.70 y 11 mensualidades de \$1 874.70. Calcule la tasa de interés si la capitalización de los intereses es mensual.

Solución:

Observe el lector que al dar el pago inmediato de \$1 874.70 y enseguida 11 pagos mensuales por la misma cantidad, entonces se trata de una anualidad anticipada formada por 12 pagos mensuales.

La tasa de interés se obtiene utilizando el método de prueba y error; visto en la sección anterior, o bien, utilizando una calculadora científica, una calculadora programable o una computadora que tenga una hoja de cálculo, por ejemplo Excel.

Al sustituir los datos en la ecuación (6.4) se tiene:

$$17\,600 = 1874.70\left[\frac{1-(1+i)^{-12}}{i}\right](1+i)$$

$$9.388168774 = \left[\frac{1-(1+i)^{-12}}{i}\right](1+i)$$

Suponiendo una tasa de interés de 5% mensual, entonces:

$$9.388168774 = \left[\frac{1-(1+0.05)^{-12}}{0.05}\right](1+0.05)$$

$$9.388168774 \neq 9.306414218$$

La diferencia entre ambos valores es pequeña, por tanto, la tasa de interés es un valor cercano a 5%. Suponiendo que la tasa es de 4.5% mensual, entonces:

$$9.388168774 = \left[\frac{1-(1+0.045)^{-12}}{0.045}\right](1+0.045)$$

$$9.388168774 \neq 9.528916916$$

El resultado anterior muestra que la tasa de interés está entre 4.5% y 5% mensual. Si se utiliza el valor 4.8%:

$$9.388168774 = \left[\frac{1-(1+0.048)^{-12}}{0.048}\right](1+0.048)$$

$$9.388168774 \neq 9.394356657$$

Debido a que la diferencia entre ambos valores es muy pequeña, se puede considerar que la tasa de interés es de 4.8% mensual, lo cual corresponde a un 57.6% anual.

Al utilizar una calculadora científica, el valor que se obtiene es 4.81396936% mensual.

Ejercicios 6.3

1. Suponga que deposita $900 cada quincena en una cuenta de ahorro. Si deposita el dinero al inicio de cada quincena, al cabo de un año tendrá un monto F_1; si deposita al final de cada quincena, al cabo de un año tendrá un monto F_2. Suponiendo constante la tasa de interés, diga si $F_1 > F_2$, $F_1 < F_2$ o si $F_1 = F_2$.

2. Una empresa deposita $250 000 al inicio de cada semestre en un fondo de ahorro, cuya tasa de interés es de 10% capitalizable semestralmente.
   a) ¿A cuánto ascenderá el monto al cabo de 6 años?
   b) ¿Cuál sería el monto si los depósitos se llevarán a cabo al final del semestre?
   c) ¿De cuánto es la diferencia entre ambos montos?
   d) ¿De cuánto es la diferencia de intereses?

3. ¿Cuál será el monto al cabo de 8 años si al inicio de cada bimestre se depositan 750 dólares en una cuenta de ahorros? La tasa de interés es de 7.35% anual capitalizable cada dos meses. Calcule el total de intereses ganados.

4. ¿Cuánto gana de intereses el señor Moreno si realiza 50 depósitos semanales anticipados de $300 cada uno, los cuales ganan un interés de 6.86% capitalizable cada semana?

5. José Luis renta su departamento en $2 500 mensuales anticipados. En cuanto recibe el dinero, lo invierte a una tasa de interés de 15% capitalizable en forma mensual. Si el arrendatario siempre pagó la renta por mes vencido, ¿qué pérdida le significo a José Luis en un año?

6. Obtenga el precio de contado de cierta pieza de maquinaria por la que se hicieron 10 pagos mensuales de $3 559.80 cada uno. El primer pago fue de inmediato y la tasa de interés de la operación fue de 25.44% capitalizable cada mes. ¿Cuánto se pagó de intereses?

7. Una persona renta una casa en $3 240 al mes, durante un año. Si la renta se debe pagar por adelantado, ¿cuál es el valor actual de las rentas de un año, tomando como base una tasa de interés de 10% anual? Interprete el resultado.

8. Un equipo de sonido puede comprarse pagando $170 de pago inicial y 24 pagos mensuales de $170 cada uno ¿Cuál es el precio de contado si el interés cobrado es de 32% capitalizable mensualmente? ¿Qué cantidad de intereses se está pagando?

9. La prima a pagar por un seguro de incendio es de $2735.50 por trimestre anticipado. ¿Cuál será el precio de contado del seguro, si la compañía cobra un interés de 20% anual capitalizable trimestralmente cuando el seguro se paga en abonos trimestrales? La prima cubre el inmueble y sus contenidos por un año.

10. Un padre de familia ha destinado cierta cantidad de dinero para que su hijo estudie la especialidad en robótica. La especialidad dura 6

cuatrimestres y el dinero depositado en una cuenta bancaria gana 3% cuatrimestral. ¿Qué cantidad de dinero debe depositarse en la cuenta si la colegiatura cuatrimestral es de $26 350 por adelantado?

11. ¿Qué cantidad se debe depositar al inicio de cada bimestre durante 10 años para acumular 100 000 dólares, si la tasa de interés es de 7.44% anual capitalizable cada bimestre? ¿Qué cantidad de interés se gana?

12. ¿Cuánto debe invertir al inicio de cada quincena una persona que desea un monto de $300 000 en tres años, considerando que la inversión gana 1% mensual capitalizable cada quincena?

13. Una empresa necesitará $10 000 000 para finales de noviembre de 2006. A finales de noviembre de 2000 la empresa efectuó el primero de 12 depósitos semestrales iguales en una inversión que gana 4% trimestral capitalizable cada semestre. ¿Cuál será el valor de cada depósito?

14. Cada 28 días una persona deposita $8 000 en un Pagaré con Rendimiento Liquidable al Vencimiento a 28 días de plazo y una tasa de interés de 5% anual. ¿Qué cantidad recibe al vencimiento del noveno Pagaré?

15. Un reloj que cuesta $4 700 de contado, se compra a crédito mediante seis pagos quincenales iguales, realizándose el primer pago de inmediato. Si la tasa de interés es de 34.8% compuesto cada quincena, obtenga el valor del pago quincenal así como el interés total.

16. En una tienda de artículos deportivos se vende una bolsa de dormir en $6 800. Se puede comprar a crédito en 8 mensualidades anticipadas. Si la tasa de interés es de 23% compuesto cada mes, calcule el valor del pago mensual.

17. Calcule el pago trimestral anticipado que se debe hacer para amortizar un adeudo de $12 230. La tasa de interés es de 29.25% anual y el adeudo se va a liquidar mediante 22 pagos.

18. El ingeniero Uribe deposita $1 450 al inicio de cada mes en una cuenta de ahorro. Si la tasa de interés es de 9.36% anual capitalizable cada mes, ¿en cuánto tiempo logrará ahorrar $172 479.35?

19. ¿Cuántos depósitos quincenales anticipados de $3 500 cada uno deben hacerse con el fin de tener un monto de $90 000? La tasa de interés es de 1.3% mensual capitalizable cada quincena.

20. El señor Corona tiene actualmente 30 años de edad y es dueño de una empresa. Piensa jubilarse al reunir $10 000 000, mediante depósitos mensuales de $25 000. Si el dinero se invierte a 10% anual e inicia los depósitos a partir de hoy, ¿a qué edad se jubilará?

21. Una familia ha heredado medio millón de pesos. Si eligen invertir el dinero a 12.3% anual convertible cada quincena, ¿cuántos retiros quincenales de $5 560.27 se pueden hacer? El primer retiro se efectúa en el momento de invertir el dinero.

22. Con referencia al problema anterior, diga, ¿cuántos retiros completos de $7 000 quincenales se pueden hacer y cuál será el valor del último retiro? ¿Cuántos de $2 500 quincenales?

23. En *Muebles Típicos* se vende un juego completo de sala y comedor en $32 000 al contado, o mediante pagos mensuales anticipados de $2 195. Si el interés es de 30% convertible cada mes, ¿cuántos pagos es necesario hacer? En caso de que el número de pagos no sea entero,
a) ¿Cuál será el pago mensual, si el resultado se redondea?
b) ¿Cuál será el valor del pago complementario?

24. ¿A qué tasa de interés anual capitalizable cada semestre equivalen 6 depósitos semestrales anticipados de $16 670 a un valor presente de $70 000? ¿Cuál es la tasa efectiva?

25. Para pagar un artículo con valor de contado de $132 800 nos pidieron 25 pagos bimestrales de $8 148 cada uno. Si el primer pago es de inmediato, obtenga la tasa de interés anual capitalizable cada bimestre.

26. ¿A qué tasa nominal, 30 depósitos cuatrimestrales de $12 600 por cuatrimestre anticipado, darán un monto de $591 600 cuatro meses después de efectuado el último depósito?

27. ¿Cuál es la tasa de interés anual que se paga en la compra de un reproductor de DVD que se ofrece mediante 24 pagos quincenales de $200 si tiene un valor de contado de $4 125?

28. El párroco de la iglesia *El Divino Redentor* desea comprar un órgano electrónico que cuesta $117 790. Con el fin de comprarlo de contado deposita $1 380 al inicio de cada semana en una cuenta de inversión, durante 80 semanas. Calcule la tasa de interés anual que le paga la cuenta de inversión.

29. Margarita realizó 24 depósitos de $3 400 al inicio de cada mes en un fondo que paga 13% de interés convertible mensualmente. Un mes después de hecho el último depósito, transfirió el monto a un fondo de inversión que le da 15.2% capitalizable cada día. ¿Cuál es el monto al cabo de un año? Utilice año comercial.

30. Cuando alcance la edad de 60 años el señor Toledo tendrá derecho a recibir $735 000 por concepto de un seguro de vida dotal que adquirió hace algunos años. No obstante, la compañía aseguradora le ofreció en lugar de los $735 000, pagarle $10 000 al comienzo de cada mes durante los próximos veinte años, y si él falleciera, a sus herederos. Suponiendo un interés de 1.25% mensual, ¿es esta oferta ventajosa para el señor Toledo, o le convendría más aceptar los $735 000 al momento?

31. El dueño de un automóvil antiguo, valuado en $500 000, piensa venderlo y recibe por él las siguientes ofertas:

- $50 000 al contado y el saldo en 6 pagos bimestrales vencidos de $81 697.50 cada uno.
- 12 pagos mensuales de $48 972 cada uno, efectuando el primer pago de inmediato.

Si la tasa de interés promedio del dinero es de 12% efectivo, ¿qué oferta le conviene más?

32. Una lavadora se vende en $9 300 de contado. A crédito, se pide un enganche de $340 y 25 pagos quincenales de $340, así como un vigésimo sexto pago final que cancele la deuda. Si la tasa de interés es de 29% capitalizable cada quincena, calcule el valor del pago final.

33. ¿Cuánto se acumula en una cuenta de ahorro con 30 depósitos mensuales anticipados de $1 700 cada uno, si la tasa de interés es de 15% capitalizable cada mes, en los primeros 20 meses y después disminuye 3 puntos porcentuales?

34. El señor Gómez ahorra $1 000 al inicio de cada quincena, durante 8 meses, siendo la tasa de interés de 10% capitalizable quincenalmente. El día en que va a realizar el décimo séptimo depósito, el señor Gómez se entera de que la tasa de interés sube, a partir de ese momento, a 11.5% capitalizable cada quincena y decide aumentar a $1 300 el ahorro quincenal. Calcule el monto y el interés ganado al cabo de 2 años.

35. Sofía debe pagar $110 000 dentro de 2 años. Con este fin, comienza, a partir de este momento, a ahorrar $3 000 mensuales durante 18 meses consecutivos, ganando 1.6% mensual capitalizable cada mes durante el primer año y 1.9% mensual capitalizable cada mes el resto del tiempo. Sofía desea saber cuánto tendrá que depositar al final del mes 20, ganando 1.9% mensual capitalizable cada mes, para poder obtener un monto total, a los dos años, igual al monto de la deuda.

36. Mario desea obtener $200 000 en 3 años mediante depósitos mensuales anticipados y depósitos extraordinarios al final de los primeros cinco semestres por un valor igual al triple del depósito mensual. Cuando se realiza el depósito extraordinario no hay depósito mensual. Si la tasa de interés es de 18% capitalizable cada mes, encuentre el valor de los depósitos mensuales y extraordinarios.

37. El diagrama de tiempo mostrado presenta una serie de pagos hechos cada uno de ellos al inicio de cada año, durante 6 años. Sustituir esta serie de pagos por el equivalente a una serie de 6 pagos anuales iguales,
a) anticipados.
b) vencidos.

100 000	100 000	100 000	300 000	300 000	300 000	
0	1	2	3	4	5	6

años

$i = 16\%$ anual

38. Yolanda compra una computadora a crédito, mediante 18 pagos mensuales anticipados de $1 110 cada uno, excepto los pagos número 6 y 12, en los cuales, en lugar de realizar el pago normal de $1 110, realizará un pago de $2 500. Si la tasa de interés es de 32% capitalizable cada mes, encuentre el precio de contado de la computadora. Asimismo, obtenga el interés pagado por el financiamiento.

39. Los padres de una joven que cumplirá 13 años próximamente desean depositar en una cuenta durante 3 años, cierta cantidad de dinero al inicio de cada mes, comenzando el día en que ella cumpla los 13 años. El monto obtenido en el momento en que la hija cumpla 18 años se utilizará para generar una serie de pagos semestrales de $40 000 anticipados durante 4 años y medio con el fin de pagar las colegiaturas de la universidad. Si la hija ingresara a la universidad justo cuando cumpla 18 años, ¿qué cantidad se debe depositar en la cuenta con el fin de cumplir este objetivo? La tasa de interés se mantiene constante durante todo este tiempo en 14% anual capitalizable cada mes al efectuar los depósitos y capitalizable cada semestre al efectuar los retiros.

40. Se desea obtener $100 000 en un año depositando A pesos al inicio de cada mes, durante 6 meses y $2A$ pesos en los siguientes seis meses. Calcule el valor de los depósitos mensuales si la tasa de interés anual es de 13.45% capitalizable cada mes.

Tema especial

BONOS DEL AHORRO NACIONAL

El *Patronato del Ahorro Nacional* (PAHNAL), conocido popularmente como *Bonos del Ahorro Nacional,* fue creado por decreto presidencial el 31 de diciembre de 1949 y entró en funciones el primer día hábil de septiembre de 1950. Su objetivo fue promover el hábito del ahorro entre la población mexicana. A partir del 1 de enero de 2002, se transformó en el *Banco del Ahorro Nacional y Servicios Financieros* (BANSEFI).

BANSEFI es un organismo descentralizado del Gobierno Federal, con personalidad jurídica y patrimonio propios. Se trata de una entidad que forma parte del Sistema Financiero Mexicano y tiene como objetivo fomentar el ahorro nacional, el financiamiento y la inversión entre los integrantes del sector de ahorro popular, ofrecer instrumentos y servicios financieros, así como canalizar apoyos financieros y técnicos en beneficio del desarrollo económico del país.

Algunos de los instrumentos de ahorro que ofrece actualmente BANSEFI son:

- Cuentahorro
- Tandahorro
- Bono de la suerte
- Bonosar
- Cuentahorro Infonavit

Cuentahorro es un instrumento que permite mantener los depósitos a la vista, esto es, permite al ahorrador disponer de su dinero en cualquier momento. La apertura de la cuenta es con un mínimo de $50 y se incrementa con depósitos desde $30 en adelante, los cuales se pueden realizar cuando el cliente lo desee. Por cada $250 de saldo promedio mensual, el ahorrador tiene derecho a un número para participar en un sorteo mensual de $300 000, distribuidos en dos premios de $50 000, diez de $10 000 y cien premios de $1 000 cada uno.

La tasa de interés que ofrece Cuentahorro es variable e inferior a la ofrecida por Tandahorro.

Tandahorro es un plan de ahorro que tiene las siguientes características: El monto mínimo de apertura es de $50 y, al momento de abrir la cuenta, el ahorrador debe elegir el plazo deseado para ahorrar, que puede ser de 12, 24 o 36 meses, así como la cantidad mensual que deberá depositar en la cuenta, que no puede ser menor a $50. Se puede disponer del dinero ahorrado únicamente al final del plazo elegido y los rendimientos que otorga este tipo de cuenta tienen garantía contra la inflación.

Asimismo, el ahorrador tiene derecho a participar en un sorteo mensual con premios por \$300 000 en efectivo. Por cada \$250 de saldo promedio mensual se tiene derecho a un número.

La tasa de interés de Tandahorro es una tasa variable, la cual depende de la cantidad ahorrada: a mayor ahorro, mayor tasa de interés.

Bono de la suerte. En este caso, se realiza un depósito de \$1 000, o múltiplos, a plazo de 90 días. El dinero invertido en este Bono no gana intereses; en su lugar, el ahorrador participa en un sorteo con un premio garantizado para el primer lugar de \$100 000 y 20 premios adicionales de \$1 000 cada uno. Los premios pueden incrementarse conforme haya más ahorradores participantes. Por cada \$1 000 depositados, se otorga un número para el sorteo.

Bonosar. Es un instrumento de ahorro dirigido principalmente a personas no asalariadas que no cuentan con algún sistema de ahorro para el retiro. La finalidad de este instrumento es que el ahorrador cuente con un capital que le permita retirarse de la vida laboral con tranquilidad.

El Bonosar se abre con una cantidad igual o mayor al equivalente de 10% del salario mínimo mensual vigente en el Distrito Federal. La cuota de ahorro mensual, definida por el ahorrador, puede ser cualquier cantidad, siendo la mínima el equivalente a 10% del salario mínimo mensual del D. F. Asimismo, el ahorrador participa en sorteos mensuales con un número por cada \$250 de saldo promedio mensual.

Bonosar se mantiene vigente desde que el ahorrador abre su cuenta, independientemente de la edad que tenga, hasta el momento en que cumpla 60 años de edad. A partir de ese momento, se podrá retirar el monto total.

Existen otros planes de ahorro, como son: *Cuentahorro infantil*, *Tandahorro*, *Cuentahorro Infonavit*, etc. El lector interesado en obtener información completa sobre el BANSEFI y los servicios financieros que éste proporciona, puede visitar la página Web: www.bansefi.gob.mx. Los antecedentes del Patronato del Ahorro Nacional pueden verse en la misma dirección mencionada www.bansefi.gob.mx

Ejercicios

1. Suponga que usted tiene tiempo ahorrando en Cuentahorro y que su saldo actual es de \$14 184. Asimismo, suponga que hoy le van a abonar los intereses correspondientes al último mes y que la tasa de interés vigente en este momento es de 2.10% anual. Calcule el interés que recibirá.

2. Sandra abre una cuenta Tandahorro con $450. Elige un plazo de 12 meses y depositará en la cuenta $250 cada mes. Si la tasa de interés es el 30% de la tasa de rendimiento de los Cetes a 28 días, vigente en el momento de la apertura de la cuenta, y suponiendo que esta tasa permanece aproximadamente constante todo el plazo de la inversión, encuentre el monto al cabo de 12 meses. Suponga que la tasa de rendimiento de los Cetes es de 7.35% anual.

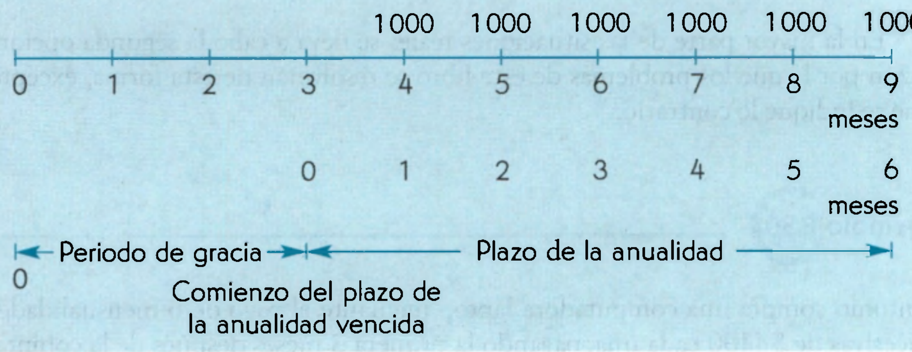
3. Andrés invirtió $1 000 en un Bono de la Suerte y, en el sorteo llevado a cabo, resulta ser uno de los ganadores, con un premio de $1 000. Encuentre la tasa de interés anual que ganó.

6.4 Anualidades diferidas

Una **anualidad diferida** es aquella cuyo plazo comienza hasta después de transcurrido un intervalo de tiempo desde el momento en que la operación quedó formalizada. El momento en que la operación queda formalizada recibe el nombre de **momento inicial** o de **convenio**.

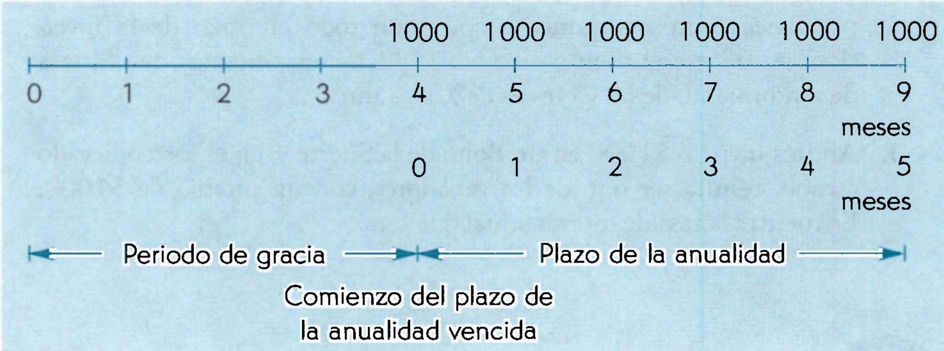
En esta sección se estudiarán las anualidades ciertas, simples y diferidas, conocidas simplemente como **anualidades diferidas**, las cuales pueden ser vencidas o anticipadas.

El intervalo de tiempo que transcurre entre el momento inicial y el inicio del plazo de la anualidad se llama **periodo de gracia** o **periodo de diferimiento**. El periodo de gracia se mide utilizando como unidad de tiempo el correspondiente a los periodos de pago. Por ejemplo, si dentro de 4 meses se hará el primer pago de una anualidad vencida de $1 000 mensuales, y cuyo plazo es de 6 meses, se tendrá el siguiente diagrama de tiempo:



En este ejemplo el periodo de gracia es de 3 meses, ya que el final del tercer mes coincide con el comienzo del plazo de la anualidad vencida, el cual es de 6 meses.

Si la anualidad del ejemplo anterior se considerara anticipada, entonces el diagrama de tiempo sería el siguiente:



En este caso, el periodo de gracia es de 4 meses, ya que el final del cuarto mes coincide con el comienzo del plazo de la anualidad anticipada.

Para resolver problemas de anualidades diferidas no es necesario deducir nuevas fórmulas ya que éstas, como se acaba de ver, pueden tratarse como anualidades vencidas o anticipadas, utilizando las fórmulas vistas en las secciones (6.2) y (6.3). En este libro, al resolver problemas de anualidades diferidas, éstas se tratarán como anualidades vencidas, ya que esto es lo más usual.

Mientras transcurre el periodo de gracia, ocurre una de las siguientes situaciones:

- Que al final de cada periodo de pago se liquiden los intereses que genera el capital original en el periodo. En este caso se dice que hay **servicio de intereses.** Al llevarse a cabo esta situación, el capital original permanece constante todo el periodo de gracia; de tal manera que el valor presente de la anualidad es igual al capital original.
- Que los intereses generados dentro del periodo de gracia se capitalicen. En este caso, el valor presente de la anualidad será igual al capital original más los intereses capitalizados.

En la mayor parte de las situaciones reales se lleva a cabo la segunda opción, razón por la que los problemas de este libro se resolverán de esta forma, excepto que se indique lo contrario.

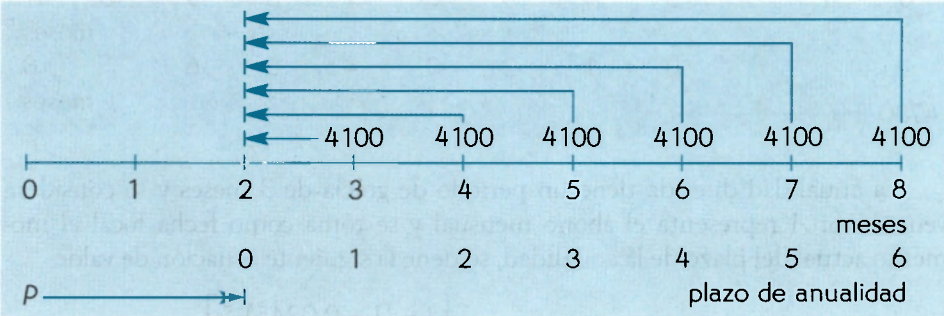
Ejemplo 6.30

Antonio compra una computadora laptop mediante el pago de 6 mensualidades sucesivas de $4 100 cada una, pagando la primera 3 meses después de la compra.

¿Cuál es el precio de contado de la computadora, si se está cobrando una tasa de interés de 33% capitalizable cada mes? ¿Cuánto se pagó de interés?

Solución:

A continuación se muestra el diagrama de tiempo, considerando una anualidad vencida:



En este caso, se tiene una anualidad diferida con periodo de gracia de dos meses. Si P representa el precio de contado de la computadora, y se toma como fecha focal el momento actual del plazo de la anualidad, entonces se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$P\left(1+\frac{0.33}{12}\right)^2 = 4100\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.33}{12}\right)^{-6}}{\left(\frac{0.33}{12}\right)}\right]$$

$$1.05575625\,P = 22\,395.70379$$

$$P = \$21\,213$$

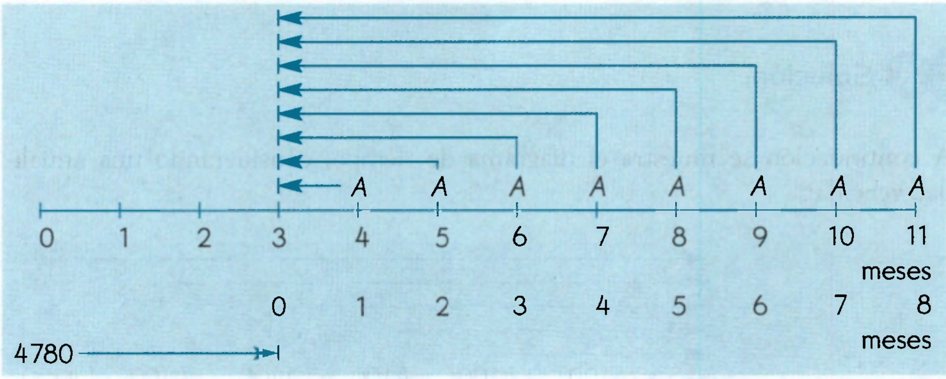
El interés pagado por el uso del crédito fue:

$$I = (4100)(6) - 21\,213 = \$3\,387$$

Ejemplo 6.31

Durante este mes, *Mueblería El Portal* ofrece la promoción "Compre ahora y pague después", que consiste en pagar el precio de todas las mercancías en 8 meses, empezando 4 meses después de la compra. ¿Cuál será la mensualidad que deberá pagar la señora Arrieta, si compró un mueble en $4780 y le cargan un interés de 2.45% mensual capitalizable cada mes?

Solución:



La anualidad diferida tiene un periodo de gracia de 3 meses y se considera vencida. Si A representa el abono mensual y se toma como fecha focal el momento actual del plazo de la anualidad, se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$4780\,(1 + 0.0245)^3 = A\left[\frac{1-(1+0.0245)^{-8}}{0.0245}\right]$$

$$A = \$715.34$$

Ejemplo 6.32

Resuelva el problema anterior si durante el periodo de gracia hay servicio de intereses.

Solución:

En este caso, los intereses generados en el periodo de gracia no se capitalizan, sino que se van pagando cada mes, haciendo que el capital original se mantenga constante. Esto es:

$$I = (4780)\,(0.0245)\,(1) = \$117.11$$

Se deben pagar intereses mensuales de \$117.11, durante tres meses. Al finalizar el periodo de gracia se tendrá que el valor presente de la deuda es de \$4780, y el abono mensual necesario para amortizar dicha deuda será:

$$4780 = A\left[\frac{1-(1+0.0245)^{-8}}{0.0245}\right]$$

$$A = \$665.23$$

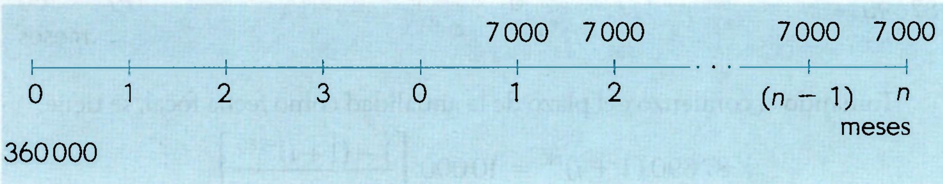
El lector puede verificar que, el interés total pagado cuando los intereses se capitalizan en el periodo de gracia es mayor que cuando hay servicio de intereses.

Ejemplo 6.33

El precio de contado de una casa es de \$400 000. Se puede comprar a crédito mediante un enganche de 10% del precio de contado y el resto mediante pagos mensuales vencidos de \$7 000. Si se da un periodo de gracia de 3 meses y la tasa de interés es de 1.75% mensual capitalizable cada mes, calcule el número de pagos mensuales que deben hacerse. En caso necesario, ajuste la mensualidad a la parte entera del resultado obtenido.

Solución:

El enganche es de \$40 000 y el saldo a financiar es de \$360 000. El diagrama de tiempo es:



Tomando el final del periodo de gracia como fecha focal, se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$360\,000\,(1.0175)^3 = 7\,000\left[\frac{1-(1.0175)^{-n}}{0.0175}\right]$$

$$\frac{(360\,000)(1.0175)^3(0.0175)}{7\,000} = 1 - (1.0175)^{-n}$$

$$0.948081698 = 1 - (1.0175)^{-n}$$

$$(1.0175)^{-n} = 1 - 0.948081698 = 0.051918301$$

$$-n \log 1.0175 = \log 0.051918301$$

$$n = 170.5081322 \text{ pagos mensuales}$$

Debido a la imposibilidad de pagar 170.5081322 pagos mensuales, se ajusta la mensualidad tomando la parte entera del resultado. Esto es, si $n = 170$, entonces:

$$360\,000\,(1.0175)^3 = A\left[\frac{1-(1.0175)^{-170}}{0.0175}\right]$$

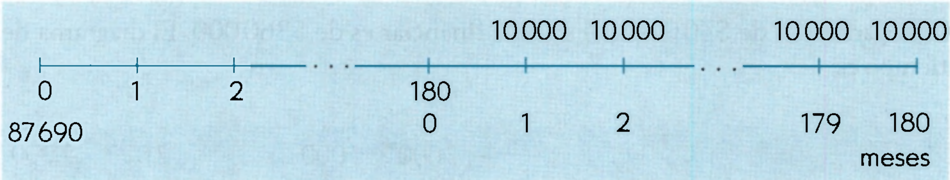
$$A = \$7\,003.40$$

La casa se paga mediante 170 abonos mensuales de \$7 003.40.

Ejemplo 6.34

El señor González tiene actualmente 50 años de edad y una compañía de seguros le presenta un plan de jubilación personal. Éste consiste en que, mediante un pago inmediato de $87 690, la compañía ofrece pagar, transcurridos 15 años, una renta de $10 000 al final de cada mes,[2] durante 15 años. Determine la tasa de interés anual capitalizable cada mes que paga la compañía.

Solución:



Tomando el comienzo del plazo de la anualidad como fecha focal, se tiene:

$$87\,690\,(1+i)^{180} = 10\,000\left[\frac{1-(1+i)^{-180}}{i}\right]$$

$$\frac{87\,690}{10\,000} = \frac{1-(1+i)^{-180}}{i\,(1+i)^{180}}$$

$$8.769 = \frac{1-(1+i)^{-180}}{i\,(1+i)^{180}}$$

Procediendo por prueba y error, o bien, utilizando una calculadora financiera o una computadora, el valor de i que satisface a la igualdad anterior es 1.1916977765% mensual. Por tanto:

$$i = 14.3\% \text{ anual capitalizable cada mes.}$$

Ejemplo 6.35

Una escuela compró mobiliario y equipo a crédito el 26 de diciembre y acuerda saldar la deuda mediante 12 pagos mensuales de $10 830, haciendo el primer pago el 26 de julio del siguiente año. Si después de realizar el octavo pago se

[2] Esta cantidad se ajustaría en la práctica de conformidad con la inflación, con el fin de que se mantenga el poder adquisitivo de la renta mensual.

dejan de realizar los siguientes tres, ¿qué pago único se deberá hacer al vencer el último pago pactado originalmente para saldar completamente la deuda? La tasa de interés es de 30% compuesto en forma mensual.

Solución:

				10 830	10 830	10 830	10 830	10 830	10 830
		…	0	1	8	9	10	11	12 meses
26/12	26/01		26/06	26/07	26/02	26/03	26/04	26/05	26/06 fecha
									x

donde x = cantidad a pagar el 26 de junio.

Si se toma como fecha focal el inicio del plazo de la anualidad (26 de junio), se puede escribir la siguiente ecuación de valor:

$$10\,830\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.30}{12}\right)^{-12}}{\left(\frac{0.30}{12}\right)}\right]=10\,830\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.30}{12}\right)^{-8}}{\left(\frac{0.30}{12}\right)}\right]+\frac{x}{\left(1+\frac{0.30}{12}\right)^{12}}$$

$$111\,091.5906=77\,652.58552+\frac{x}{1.344888824}$$

$$x=44\,971.75$$

Ejercicios 6.4

1. Calcule el valor presente de una renta trimestral de $25 000 durante 5 años, si el primer pago trimestral se realiza dentro de 2 años y la tasa de interés es de 3.35% trimestral capitalizable cada trimestre.

2. ¿Cuál es el valor actual y el monto de una serie de 10 pagos semestrales consecutivos de $150 000, el primero dentro de un año y medio, si la tasa de interés es de 20% capitalizable cada semestre?

3. Una fábrica de dulces obtiene un préstamo bancario de \$53 000 dólares para la compra de una máquina y se le concede un periodo de gracia de 10 meses, que es el tiempo que se tarda en instalar y operar adecuadamente la máquina. La amortización del préstamo se va a efectuar en 18 pagos mensuales vencidos. Si la tasa de interés es de 1% mensual, calcule el valor del pago mensual y el total de intereses si,
   a) hay servicio de intereses.
   b) los intereses se capitalizan durante el periodo de gracia.

4. Con el fin de construir un edificio destinado a renta de oficinas, el señor Saucedo obtiene un préstamo por \$150 000 000, que se va a liquidar mediante 100 pagos mensuales vencidos, después de un periodo de gracia de un año y medio en el cual los intereses serán capitalizados. Calcule el pago mensual sabiendo que la tasa de interés es de 16% con capitalización mensual.

5. Un rancho valuado en \$3 800 000 se vende mediante un enganche de \$1 000 000. El comprador acuerda pagar el saldo mediante 20 pagos bimestrales iguales, el primero con vencimiento en 6 meses. Encuentre el valor del pago bimestral si la tasa de interés es de 17.5% capitalizable cada bimestre.

6. Raimundo tiene actualmente 15 años de edad y es el beneficiario de un seguro de vida por \$600 000. Según las condiciones estipuladas en la póliza, el dinero lo recibirá en 6 pagos semestrales iguales, el primero de ellos cuando cumpla 18 años. Si el dinero se encuentra invertido a 12% capitalizable cada semestre, calcule el valor del pago semestral.

7. El millonario señor Rosales acaba de fallecer y en su testamento se estipula que el *Centro de Investigaciones Biológicas* recibirá, después de transcurridos 2 años, la cantidad de \$500 000 al inicio de cada cuatrimestre durante 20 años. Si el dinero está invertido a 14.22% anual capitalizable cada 4 meses, halle el valor actual de este legado.

8. El día en que Marisela cumpla 15 años, su padre depositará una cantidad de dinero en una inversión bancaria de tal manera que ella reciba \$100 000 cada año, durante 5 años consecutivos. La primera anualidad la recibirá Marisela cuando cumpla 21 años, la segunda cuando cumpla 22 años y así sucesivamente. Si la tasa de interés es de 11.5% capitalizable cada año, calcule la cantidad de dinero que se deberá depositar en la cuenta.

9. El *Banco Interamericano de Desarrollo* otorgó a México un préstamo por 250 millones de dólares, para apoyar al sector agropecuario. El préstamo será a un plazo de 20 años, con 4 de gracia. Si la tasa de interés

será de 6% anual capitalizable cada mes en el periodo de gracia y de 8% anual capitalizable cada mes el resto del tiempo, encuentre el valor del pago mensual que amortice el capital.

10. Resuelva el problema anterior suponiendo que durante el periodo de gracia la tasa de interés será de 7% capitalizable cada semestre, y al amortizar el capital, la tasa de interés será de 7.5% capitalizable cada mes.

11. A Jorge le depositan en un banco que paga 10% capitalizable en forma quincenal la cantidad de $500 000, para que, dentro de 5 años, reciba una renta vencida de $12 000 quincenales. Calcule el número de pagos que recibirá Jorge.

12. El señor Ford depositó 100 000 dólares en un banco, estipulando que al cabo de 10 años éste empezaría a pagarle a él o a sus herederos 4 000 dólares mensuales. ¿Durante cuántos meses recibirá el señor Ford esta renta? El banco abona 8.5% anual capitalizable cada mes.

Si el resultado no es exacto, obtenga el valor del último pago.

13. Esteban pidió prestados $18 000 a Pablo y para saldar esta deuda con los intereses correspondientes, conviene en que después de transcurrido un año pagará a Pablo, al final de cada mes, $916.60 durante 3 años. ¿Cuál es la tasa de interés pagada por Esteban?

14. Un banco financió un equipo de bombeo mediante el pago de 32 abonos trimestrales vencidos de $112 048.52 cada uno. Si el precio de contado del equipo es de $1 250 000 y se dio un periodo de gracia de un año, ¿cuál fue la tasa de interés anual nominal aplicada?

15. El valor de contado de una copiadora es de $12 000. Se puede comprar a crédito mediante 6 pagos bimestrales de $2 810, el primero de los cuales debe realizarse 6 meses después de la compra. Calcule la tasa de interés anual nominal.

16. Obtenga el periodo de gracia otorgado al comprar una máquina, cuyo precio de contado es de $473 700, y que se liquidará mediante 9 pagos bimestrales de $83 193.61 cada uno. La tasa de interés es de 2.38% mensual capitalizable cada 2 meses.

17. Por un depósito inmediato de $200 000, una compañía de seguros ofrece pagar, transcurridos 10 años, una renta de $11 500 al final de cada mes. Si la tasa de interés es de 13.4% capitalizable en forma mensual, ¿cuántos pagos va a efectuar la compañía?

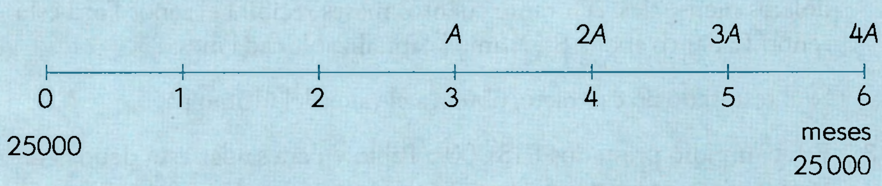
18. Si se depositan hoy $100 000 en una cuenta de inversiones que paga 11.16% capitalizable cada mes, pasado cierto tiempo se pueden efectuar

60 retiros mensuales de \$3 403.10 cada uno. Obtenga el periodo de gracia.

19. El dueño del autoservicio eléctrico *La Bandera* compró un aparato en \$83 675, que debe pagar mediante un abono de \$20 000 dentro de 4 meses y el resto en 15 pagos mensuales iguales consecutivos, siendo el primer pago un mes después de efectuado el abono de \$20 000. Si el interés al que se contrató el crédito es de 27% convertible cada mes, obtenga el valor del pago mensual.

20. Resuelva el problema anterior si los 15 pagos mensuales iguales se empezaran a pagar 3 meses después de realizado el abono de \$20 000.

21. Encuentre el valor de A en el siguiente diagrama de tiempo. Utilice una tasa de interés de 18% anual capitalizable cada mes.



CAPÍTULO 7

Amortización y fondos de amortización

En la vida sólo hay dos "líquidos" vitales,
el agua y el dinero, y uno tiene que
saber usar ambos con cautela.
Jacques Ives Cousteau
Oceanógrafo francés

Objetivos

Al finalizar el estudio de este capítulo el alumno podrá:

- Explicar qué es la amortización de deudas y los fondos de amortización.
- Explicar la diferencia entre amortización y fondos de amortización.
- Elaborar tablas de amortización y de fondos de amortización.
- Plantear y resolver problemas relacionados con la amortización de deudas y con los fondos de amortización.

7.1 Amortización de deudas

En el capítulo 4, sección 4.3, se estudió la amortización de deudas con interés simple; en este capítulo se estudiará la amortización de deudas con interés compuesto.

En la sección 4.3 se mencionó que la palabra **amortizar** proviene del latín y que su significado literal es "**dar muerte**". En matemáticas financieras amortizar significa pagar una deuda y sus intereses mediante pagos parciales o abonos, los que pueden ser iguales en valor o variables, efectuados a intervalos de tiempo iguales o diferentes.

En la sección 4.3, la deuda a pagar se liquidaba mediante **amortizaciones constantes**; esto es, la cantidad destinada a reducir el capital era siempre la misma. El abono podía ser variable o constante.

En este capítulo, el pago de una deuda se lleva a cabo de tal manera que la cantidad destinada a reducir el capital aumenta gradualmente, es decir, se tiene una **amortización gradual** y los abonos son siempre iguales. En este caso, el abono se calcula mediante la fórmula del valor presente de una anualidad vencida. Cada abono efectuado se divide en dos partes: en primer lugar se pagan los intereses adeudados al momento en que se efectúa el pago y el resto se aplica a disminuir el capital. Como cada pago reduce el capital, los intereses que se pagan en cada periodo van disminuyendo; por tanto, resulta evidente que la amortización gradual de una deuda se lleva a cabo calculando los intereses sobre el saldo insoluto.[1]

Ejemplo 7.1

Un préstamo de $6 000 se va a amortizar por medio de 6 pagos mensuales iguales. Obtenga el abono mensual si la tasa de interés es de 33% capitalizable mensualmente.

Solución:

En este problema se nos pide que calculemos el valor de una anualidad cuyo valor presente es de $6 000. Despejando A de la ecuación (6.2), se tiene

$$A = \frac{Pi}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{(6\,000)\left(\frac{0.33}{12}\right)}{1-\left(1+\frac{0.33}{12}\right)^{-6}}$$

[1] Cobrar intereses sobre saldos insolutos consiste en cobrar intereses solamente por el capital aún no pagado.

$$A = \$1098.4250$$

Para amortizar la deuda es necesario realizar 6 pagos mensuales de \$1098.4250.

La **tabla de amortización** muestra la forma como se amortiza una deuda; esto es, nos permite ver cómo se va reduciendo la deuda con cada abono efectuado.

Ejemplo 7.2

Elabore la tabla de amortización para el ejemplo 7.1.

Solución:

La tabla de amortización es la siguiente:

Mes	Amortización[2]	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				\$6000.0000
1	\$ 933.4250	\$165.0000	\$1098.4250	\$5066.5750
2	\$ 959.0942	\$139.3308	\$1098.4250	\$ 4107.4808
3	\$ 985.4693	\$112.9557	\$1098.4250	\$ 3122.0115
4	\$1012.5697	\$ 85.8553	\$1098.4250	\$ 2109.4418
5	\$1040.4154	\$ 58.0096	\$1098.4250	\$1069.0264
6	\$1069.0268	\$ 29.3982	\$1098.4250	\$ −0.0004[3]

A continuación se explicará la forma como se elaboró la tabla de amortización.

El saldo insoluto (columna 5) al principio del primer mes (mes 0) es la deuda original de \$6000. El interés vencido al final del primer mes (mes 1) se determinó utilizando la fórmula del interés simple:

$$I = (6000)\left(\frac{0.33}{12}\right)(1) = 165$$

El pago mensual o abono (columna 4), hecho al final del primer mes, es de \$1098.4250, de los cuales se utilizan \$165 para el pago del interés vencido y el resto, \$1098.4250 − \$165 = \$933.4250, se utiliza como abono al capital (amortización). Al final del primer mes se tiene un saldo insoluto de \$6000 − \$933.4250 = \$5066.5750.

[2] Recuerde lo dicho en la sección 4.3: **amortización** es la parte del abono que reduce el capital de la deuda.

[3] El saldo insoluto al final del sexto mes debe ser cero. La diferencia de 4 diezmilésimos se debe a los redondeos efectuados, empezando por el abono mensual.

Al término del segundo mes, el interés vencido es:

$$I = (5\,066.5750)\left(\frac{0.33}{12}\right)(1) = 139.3308$$

Del abono mensual hecho al final del segundo mes, se destinan \$139.3308 para pagar el interés vencido y el resto, \$1 098.4250 − \$139.3308 = \$959.0942, como abono al capital. Al final del segundo mes el saldo insoluto es de \$5 066.5750 − \$959.0942 = \$4 107.4808, y así sucesivamente.

El lector puede verificar que:

- La parte de cada pago mensual que se usa para pagar intereses sobre la deuda es decreciente y el resto del pago que se aplica a la deuda misma es creciente.
- Pago mensual = amortización + interés.
- Cada una de las cantidades mostradas en la columna 5 (saldo insoluto) representa el valor presente de los pagos mensuales que faltan por realizar. Por ejemplo, la cantidad de \$3 122.0115, mostrada en la columna 5, es el saldo insoluto al final del tercer mes y, por tanto, es el valor presente de 3 pagos que faltan por efectuarse, esto es:

$$P = 1098.4250\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.33}{12}\right)^{-3}}{\left(\frac{0.33}{12}\right)}\right] = \$3\,122.0118$$

Ejemplo 7.3

Antonio compra una casa valuada en \$530 000 y paga \$159 000 de enganche. Antonio obtiene un préstamo hipotecario a 20 años por el saldo. Si se cobra un interés de 18% capitalizable cada mes, ¿cuál sería el valor del pago mensual? Elabore una tabla de amortización para los primeros 8 meses.

Solución:

El saldo a pagar en 20 años es de \$530 000 − \$159 000 = \$371 000 y, por tanto, el valor del pago mensual será:

$$A = \frac{Pi}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{(371\,000)\left(\frac{0.18}{12}\right)}{1-\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{-240}}$$

$$A = \$5\,725.6858$$

Una vez obtenido el pago mensual, se elabora la tabla de amortización para los primeros 8 meses:

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				\$ 371 000.0000
1	\$160.6858	\$5 565.0000	\$5 725.6858	\$370 839.3142
2	\$163.0961	\$5 562.5897	\$5 725.6858	\$ 370 676.2181
3	\$165.5425	\$5 560.1433	\$5 725.6858	\$ 370 510.6756
4	\$168.0257	\$5 557.6601	\$5 725.6858	\$ 370 342.6499
5	\$170.5461	\$5 555.1397	\$5 725.6858	\$ 370 172.1038
6	\$173.1042	\$5 552.5816	\$5 725.6858	\$369 998.9996
7	\$175.7008	\$5 549.9850	\$5 725.6858	\$369 823.2988
8	\$178.3363	\$5 547.3495	\$5 725.6858	\$369 644.9625

Observe que la mayor parte del pago mensual se destina al pago de intereses y, en cambio, la amortización al capital es muy pequeña. En una deuda que se amortiza a largo plazo ocurre que durante algunos años la mayor parte del abono tiene como finalidad el pago de los intereses.

Un problema muy común que se presenta en la amortización de una deuda, es conocer de qué manera se distribuye un determinado pago o abono, sin necesidad de elaborar la tabla de amortización. Es decir, se desea saber qué cantidad de uno o más de los pagos realizados se destina a la disminución del saldo insoluto de la deuda y qué cantidad se destina para pagar el interés del saldo insoluto. El ejemplo 7.4 muestra cómo se resuelve este problema.

Ejemplo 7.4

Utilizando el ejemplo 7.3, haga la distribución del pago número 6. Asimismo, encuentre el saldo insoluto que se tiene una vez efectuado dicho pago.

Solución:

Los intereses que se deben pagar al efectuar el pago número 6 se calculan utilizando el saldo insoluto que se tiene al final del mes cinco, después de hacer el pago número 5; este saldo insoluto, es igual al valor actual de los pagos que faltan por efectuarse. Al realizar el pago número 5, faltan $240 - 5 = 235$ pagos por realizar; por tanto:

$$\text{saldo insoluto} = P = 5725.6858\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{-235}}{\left(\frac{0.18}{12}\right)}\right] = \$370\,172.1072$$

El interés correspondiente al pago número 6 será:

$$I = (370\,172.1072)\left(\frac{0.18}{12}\right)(1) = \$5\,552.5816$$

Por tanto, la amortización será de:

$$\text{amortización} = 5725.6858 - 5\,552.5816 = \$173.1042$$

El saldo insoluto, una vez efectuado el pago número 6, se obtiene de la diferencia:

$$370\,172.1072 - 173.1042 = \$369\,999.0030$$

El lector puede verificar los resultados obtenidos observando la tabla de amortización. Las pequeñas diferencias que se observan se deben al redondeo de las cantidades.

Ejemplo 7.5

Utilizando el ejemplo 7.3, obtenga la distribución del pago número 100. Encuentre también el saldo insoluto una vez efectuado el pago.

Solución:

Para encontrar la forma como se distribuye el pago número 100, se debe hallar el saldo insoluto al final del mes número 99, después de efectuar el pago número 99. El saldo insoluto es el valor presente de 141 pagos por realizar:

$$P = 5725.6858\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{-141}}{\left(\frac{0.18}{12}\right)}\right] = \$334\,936.2558$$

El interés correspondiente al pago número 100 es:

$$I = (334\,936.2558)\left(\frac{0.18}{12}\right)(1) = \$5\,024.0438$$

Por tanto:

$$\text{amortización} = 5725.6858 - 5024.0438 = \$701.6420$$

El saldo insoluto una vez efectuado el pago número 100 será:

$$334\,936.2558 - 701.6420 = \$334\,234.6138$$

Observe que a pesar de que ya se han efectuado 100 pagos, esto es, un total de:

$$(5725.6858)(100) = \$572\,568.58$$

la deuda original sólo se ha reducido en $\$371\,000 - \$334\,234.6138 =$ $\$36\,765.3862$. Una cantidad bastante pequeña en poco más de 8 años de pagos mensuales.

Cuando una persona compra un bien a crédito, a medida que efectúa los abonos, una parte del bien le pertenece. La parte que pertenece al deudor se conoce como sus **derechos adquiridos** y el resto es lo que aún pertenece al acreedor.

En el ejemplo anterior, al pagar la mensualidad número 100, el deudor ha pagado $36 765.3862 más el enganche ($159 000); esto es, ha pagado un total de $195 765.3862. Por tanto, los derechos adquiridos por el deudor son $195 765.3862 sobre un total de $530 000. Esto significa que el deudor ya es dueño de 36.94% de la casa:

$$\frac{195\,765.3862}{530\,000} = 0.3694 = 36.94\%$$

Ejemplo 7.6

Un laboratorio de análisis químicos compra una centrífuga en 3 100 dólares, que se va a pagar de la siguiente manera:

- Sin enganche.
- 4 pagos quincenales iguales.
- 1 000 dólares que se entregarán junto con el último pago.

Si la tasa de interés es de 10% anual capitalizable cada quincena:

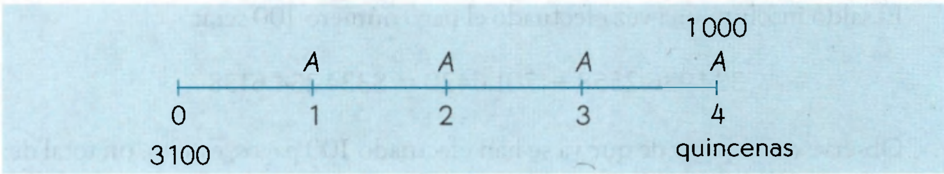
a) Calcule el valor del pago quincenal.

b) Elabore la tabla de amortización.

c) ¿Cuál es el porcentaje de los derechos adquiridos por el deudor al realizar el pago número tres?

Solución:

a)



Tomando como fecha focal el momento actual, se formula la siguiente ecuación de valor:

$$3100 = A\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.10}{24}\right)^{-4}}{\left(\frac{0.10}{24}\right)}\right] + \frac{1000}{\left(1+\frac{0.10}{24}\right)^{4}}$$

$$A = 534.6468 \text{ dólares}$$

b)

Quincena	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				US $3100.0000
1	US $ 521.7301	US $12.9167	US $ 534.6468	US $2578.2699
2	US $ 523.9040	US $10.7428	US $ 534.6468	US $2054.3659
3	US $ 526.0869	US $ 8.5599	US $ 534.6468	US $1528.2790
4	US $1528.2790	US $ 6.3678	US $1534.6468	US $ 0.0000

c)

Al realizar el pago número tres, el saldo insoluto de la deuda es de $1528.2790. Por tanto, los derechos adquiridos por el deudor son:

$$3100 - 1528.2790 = 1571.7210 \text{ dólares}$$

El porcentaje de los derechos adquiridos por el deudor es:

$$\frac{1571.7210}{3100} = 50.70\%$$

Ejemplo 7.7

Una institución educativa lleva a cabo una rifa donde el primer premio consiste en $100000. De acuerdo a las reglas establecidas para la entrega de los premios, el ganador del primer premio recibirá de inmediato $30 000 y el resto se depositará en un fondo de inversión que paga 9% capitalizable cada mes, del que se retirarán $20 000 al final de cada mes y se entregarán al ganador.

¿Cuántos retiros se podrán hacer? Construya la tabla de amortización.

Solución:

$$70000 = 20000\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.09}{12}\right)^{-n}}{\left(\frac{0.09}{12}\right)}\right]$$

$$\left(1+\frac{0.09}{12}\right)^{-n} = 1 - \frac{(70000)\left(\frac{0.09}{12}\right)}{20000} = 0.97375$$

$$n = \frac{-\log 0.97375}{\log\left(1+\frac{0.09}{12}\right)}$$

$n = 3.560041$ retiros mensuales

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$70 000.0000
1	$19 475.0000	$525.0000	$20 000.0000	$50 525.0000
2	$19 621.0625	$378.9375	$20 000.0000	$30 903.9375
3	$19 768.2205	$231.7795	$20 000.0000	$ 11 135.7170
4	$ 11 135.7170	$ 83.5179	$ 11 219.2349	$ 0.00

El ganador del primer premio podrá efectuar 3 retiros mensuales de $20 000 cada uno y un último retiro de $11 219.2349 al final del cuarto mes. Note cómo se obtuvo de forma automática esta cantidad al construir la tabla.

Ejemplo 7.8

Una deuda de $90 000 debe amortizarse mediante 6 pagos bimestrales vencidos. Los tres primeros pagos serán por $15 000 cada uno, el cuarto y quinto pagos serán por $20 000 cada uno. Utilizando una tabla de amortización obtenga el valor del sexto y último pago, si la tasa de interés es de 4.5% bimestral capitalizable cada bimestre.

Solución:

Bimestre	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$90 000.00
1	$10 950.00	$4 050.00	$15 000.00	$79 050.00
2	$11 442.75	$3 557.25	$15 000.00	$67 607.25
3	$11 957.67	$3 042.33	$15 000.00	$55 649.58
4	$17 495.77	$2 504.23	$20 000.00	$38 153.81
5	$18 283.08	$1 716.92	$20 000.00	$19 870.73
6	$19 870.73	$894.18	[redacted] 20 764.91	[redacted]0.00

El último abono debe ser por $20 764.91.

Ejercicios 7.1

1. ¿En qué consiste la amortización de una deuda en forma constante?
2. ¿En qué consiste la amortización de una deuda en forma gradual?
3. ¿Hay alguna diferencia entre amortización y abono?
4. Una deuda de $200 000 se debe amortizar en un año y medio mediante pagos trimestrales iguales vencidos. Si la tasa de interés es de 26.4% capitalizable cada trimestre, encuentre el valor del pago trimestral y elabore la tabla de amortización.
5. Víctor contrae hoy una deuda de $70 000 que amortizará mediante 8 pagos mensuales iguales, el primero vence dentro de un mes. Si la tasa de interés es de 2.5% mensual, ¿cuál es el valor del pago mensual? Elabore la tabla de amortización.
6. Un adeudo de $25 000 se liquida mediante 5 pagos bimestrales vencidos. Si la tasa de interés es de 32% capitalizable cada bimestre, construya la tabla de amortización.
7. Resuelva el ejercicio 6 mediante amortización constante a interés simple sobre saldos insolutos, tal como se estudió en la sección 4.3, capítulo 4. Compare los resultados.

8. Una deuda se liquida mediante 5 abonos mensuales vencidos de \$1 500 cada uno, que incluyen intereses de 22% anual capitalizable cada mes. Encuentre el valor original de la deuda y elabore la tabla de amortización.
9. Elabore la tabla de amortización del problema anterior mediante amortización constante a interés simple sobre saldos insolutos, tal como se estudió en la sección 4.3, capítulo 4. Compare los resultados.
10. Una computadora, cuyo precio de contado es de \$18 500, se vende a crédito a 3 meses de plazo, mediante pagos quincenales iguales anticipados. Si la tasa de interés es de 24% capitalizable cada quincena, obtenga el valor del pago quincenal y elabore la tabla de amortización.
11. Para adquirir un automóvil a crédito se deben hacer 48 pagos mensuales de \$5 448.75, comenzando en el momento de la entrega del automóvil. Si la tasa de interés es de 18.4% anual capitalizable cada mes, calcule el precio de contado del automóvil y elabore los 5 primeros renglones de la tabla de amortización.
12. Una deuda de \$150 000 debe amortizarse mediante 8 pagos mensuales vencidos. Los tres primeros pagos serán de \$10 000 cada uno, los siguientes tres pagos serán por \$20 000 cada uno y el séptimo pago será de \$30 000. Si la tasa de interés es de 30% capitalizable cada mes, obtenga el valor del octavo y último pago, utilizando
    a) Una tabla de amortización.
    b) Una ecuación de valor.
13. Rigoberto debe pagar \$40 000 en cuatro pagos bimestrales vencidos. Elabore la tabla de amortización si la tasa de interés es de 2.3% mensual capitalizable cada bimestre y el primer bimestre amortizará 10% de la deuda, el segundo bimestre amortizará 20% de la deuda, el tercer bimestre, 30% de la deuda y el cuarto bimestre, 40%.
14. El señor Salinas compra a crédito un automóvil usado que vale \$83 000. Las condiciones de pago son las siguientes:
    - 12% de enganche.
    - 6 pagos mensuales iguales vencidos.
    - \$20 000 que se entregarán junto con el último pago.

    Si la tasa de interés es de 20% capitalizable cada mes, elabore la tabla de amortización.
15. Cynthia compra una sala en \$3 260 y acuerda pagar esa cantidad en abonos mensuales vencidos de \$593, que incluyen un interés de 30.695% capitalizable cada mes. ¿Cuántos pagos se harán? Elabore la tabla de amortización de la deuda.

16. ¿Cuántos pagos mensuales de $10000 son necesarios para saldar una deuda de $60000 si la tasa de interés es de 23% capitalizable cada mes? Construya la tabla de amortización.

17. ¿Cuántos pagos trimestrales vencidos de 11000 dólares cada uno deben hacerse para amortizar una deuda de 50000 dólares, si hay que pagar intereses de 9.22% anual capitalizable trimestralmente? Elabore la tabla de amortización.

18. *Sigma, S. A.* adquiere una máquina que cuesta 73600 dólares mediante un crédito bancario. Se acuerda pagar el crédito mediante pagos bimestrales vencidos de 20000 dólares cada uno, aplicando una tasa de interés de 11% capitalizable cada bimestre.
    a) Calcule el número de pagos completos de 20000 dólares que se deben efectuar.
    b) Calcule el monto del último pago.
    c) Elabore la tabla de amortización.

19. Resuelva el ejercicio anterior redondeando el resultado obtenido para el número de pagos.

20. Gloria compró un televisor a crédito, cuyo precio de contado era de $7340. La compra fue sin enganche y a un plazo de un año y medio para pagar, con una tasa de interés de 34.08% compuesto mensualmente. Calcule,
    a) El abono mensual.
    b) La cantidad que Gloria deberá pagar si al cabo de 10 meses desea liquidar el total del saldo insoluto.
    c) Cómo se distribuye el abono número 5.

21. El señor Rivera compró un departamento a 12 años de plazo, mediante un pago inicial de $93750 y pagos mensuales de $4710.39. Si la tasa de interés es de 17.64% capitalizable cada mes, calcule la cantidad que hay que pagar para saldar la deuda al cabo de 7 años. ¿Qué cantidad de intereses se han pagado en esos 7 años?

22. Una persona solicita un préstamo de $85000 para ser amortizado mediante pagos mensuales durante 2 años con intereses de 2.5% mensual capitalizable cada mes. Encuentre la distribución del pago número 12, así como el saldo insoluto después de efectuado dicho pago.

23. Un automóvil nuevo tiene un precio de contado de $217000. Se puede adquirir pagando un enganche de 25% y el resto en 36 mensualidades iguales. Si la tasa de interés es de 16% capitalizable cada mes, calcule,
    a) El abono mensual.

b) La distribución del pago número 20.
c) Los derechos adquiridos por el deudor y el porcentaje de los derechos adquiridos al realizar el pago número 20.

24. Una pareja de recién casados compra un terreno de \$150 000 pagando \$15 000 de enganche y por el saldo adquieren un crédito hipotecario a 10 años con una tasa de interés de 18% capitalizable cada mes.
a) Calcule el pago mensual.
b) ¿Qué cantidad del pago número 60 se destina a cubrir intereses y qué cantidad se aplica para amortizar la deuda?
c) ¿Qué cantidad se debe inmediatamente después de efectuado el pago número 60?
d) ¿Qué porcentaje del terreno le pertenece al matrimonio después de efectuado el pago número 60?

25. Un consultor financiero compra un despacho en \$470 000 en un edificio ubicado en la zona financiera de la ciudad. La compra fue a crédito, dando un enganche de 35% y el resto a pagar en ocho años mediante mensualidades vencidas. Si la tasa de interés es de 17.4% capitalizable cada mes,
a) ¿Qué porcentaje del despacho le pertenece al consultor financiero al realizar el pago número 50?
b) ¿En qué pago el consultor será dueño de 80% del despacho?
c) ¿En qué pagó el consultor será dueño de 100% del despacho?

26. David contrajo una deuda de \$35 000 hace unos meses. Se acordó que la deuda se pagará mediante 20 abonos quincenales vencidos, aplicando una tasa de interés de 21.3% capitalizable en forma quincenal. ¿Cuántos pagos se han realizado si David ya adquirió derechos sobre la deuda por \$25 661.90?

Tema especial

¿Es cierto que le venden sin intereses?

Por Alberto Calva-Mercado

Director General de Acus Consultores, S. C.

Hace unos días apareció en un periódico local el siguiente anuncio de una tienda departamental.

Toda la tienda con 15% de descuento en pagos de contado o 6 mensualidades iguales sin intereses al pagar con la tarjeta de crédito emitida por la tienda.

Este tipo de promociones se dan constantemente en muchas casas comerciales ¿Es cierto que la promoción es "sin intereses"? ¿Cuánto cuesta esto realmente?

El esquema general

El esquema general que estaremos analizando en este caso, aunque puede variar en casos específicos, es el que se presenta en la tabla I. Como se puede ver, hay dos alternativas: pagar de contado con 15% de descuento, o bien pagar, en seis mensualidades vencidas "sin" intereses.

Por ejemplo, supongamos que se compra algo que vale $120. Si se pagara de contado habría que pagar $102, que son los $120 menos el 15%. Esto tendría que pagarse hoy mismo, ya que se trata de un pago de contado. Por otro lado, si se decide pagar a crédito, habría que pagar $20 al final de cada mes, durante seis meses.

Esta operación tiene un costo, ya que al pagar a crédito, si bien no se tiene un interés sobre el precio del bien, sí se estaría dejando de recibir el beneficio de un descuento. En otras palabras, el diferir un pago de $102 implicaría tener que pagar $120 en seis pagos. Esto implica un costo.

Tabla I
El esquema general

	Pago de contado	Pago a crédito
Hoy	[redacted]102	
Mes 1		$20
Mes 2		$20
Mes 3		$20
Mes 4		[redacted]20
[redacted]es[redacted]		$20
Mes 6		$20

Cuánto cuesta este esquema

El costo de esta operación se obtiene por medio de una técnica que se conoce en las finanzas como "TIR incremental". No vamos a explicar esto con detalle aquí, ya que nos tomaría varias semanas desarrollar toda la idea. (Para una comprensión clara de lo que es la TIR incremental recomendamos consultar el capítulo 6 del libro *Lo que todo ejecutivo debe saber sobre finanzas*, de Alberto Calva Mercado, publicado por Editorial Grijalbo, 1996.)

Por ahora acepte que el costo de esta operación es de 4.85% mensual, o bien, 58.21% anualizado. Ahora vamos a demostrar que este número es correcto.

Veamos la tabla II, donde se presenta una tabla de amortización. Supongamos que tiene \$102, con lo que podría pagar la compra de contado aprovechando el 15% de descuento. Digamos que puede depositar ese dinero en el banco y recibir un interés de 4.85% mensual. Esto implicaría que en el primer mes recibiría \$4.95 de interés, que sumado a su saldo inicial de \$102.00, implicaría un total de \$106.95. Ahora, a partir de esta cifra paga \$20.00 del crédito y le quedaría un saldo final de \$86.95 (106.95 menos 20.00).

En el segundo mes se repite la operación. Ahora parte de \$86.95 que es su saldo final del primer mes. Recibiría \$4.22 de interés, que sumado a su saldo inicial le daría un total de \$91.17. Ahora paga los \$20.00 del crédito y le quedaría un saldo final de \$71.17.

De esta manera, y en forma sucesiva, usted reinvierte su saldo a una tasa de interés de 4.85%, pagando cada mes \$20.00 del crédito. Finalmente, al cabo de seis meses, esto le generará un saldo cero. Esto implica, que el costo de no aprovechar el descuento por pago de contado y pagar a crédito le cuesta 4.85% mensual o 58.21% anualizado.

En otras palabras, a menos que emplee su dinero en algo que le genere un interés superior a 4.85% mensual, sería mejor que optara pagar de contado. Si puede darle un uso alternativo a su dinero, o su costo de financiamiento en otro lado, es superior a 4.85% mensual, entonces le conviene pagar a plazos en la tienda.

¿Esta listo para irse de compras con calculadora en mano?

Tabla II
Tabla de amortizaciones

	Saldo inicial	Intereses	Total	Pago	Saldo final
Mes 1	\$120.00	\$4.95	\$106.95	\$20.00	\$86.95
Mes 2	\$ 86.95	\$4.22	\$ 91.17	\$20.00	\$71.17
Mes 3	\$ 71.17	\$3.45	\$ 74.62	\$20.00	\$54.62
Mes 4	\$ 54.62	\$2.65	\$ 57.27	\$20.00	\$37.27
Mes 5	\$ 37.27	\$1.81	\$ 39.07	\$20.00	\$19.07
Mes 6	\$ 19.07	\$0.93	\$ 20.00	\$20.00	0

Tema especial

Unidades de inversión

Al estudiar el tema de la inflación, sección 5.6, se mencionó que si al vencimiento de una inversión la tasa de inflación resulta mayor que la anticipada por el inversionista, el rendimiento real obtenido será menor que el esperado. Esto hace que las tasas de interés nominales tengan una prima de riesgo debido a la incertidumbre sobre cuál será la tasa de inflación durante el plazo de la inversión.

Al no saber el inversionista cuánto poder adquisitivo le restará la inflación a su dinero, exige una tasa superior para cubrir el riesgo que se toma de que la inflación sea mayor a la tasa de interés que se está pactando y se tengan, por tanto, tasas reales negativas. Por lo anterior, la inflación contribuye a incrementar las tasas de interés, tanto activas como pasivas, al incorporar la prima de riesgo.

Un inversionista espera que la tasa de interés que recibe por su inversión sea lo suficientemente alta con el fin de que se pueda compensar la pérdida que la inflación causa en el valor del capital invertido y, además, recibir una ganancia.

Las **Unidades de Inversión** (UDI) se crearon con el objetivo de tener en cuenta el efecto inflacionario en las operaciones financieras; es decir, se aplican para conocer el valor real de una inversión, un crédito u otro tipo de operación financiera.

Las Unidades de Inversión son una unidad de cuenta que se utilizan, desde el 4 de abril de 1995, como un sistema de referencia para realizar algunas operaciones bancarias y financieras, con el fin de contrarrestar los efectos adversos de incertidumbre inflacionaria. Las UDI no fueron creadas para celebrar contratos comerciales, por lo que no pueden utilizarse para fijar colegiaturas, rentas ni precios de bienes y servicios. Las UDI no son una moneda, ni sustituyen al peso, pero se venden y se compran por su valor en pesos.

El valor de las UDI sube en la misma proporción que el Indice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), por ello las inversiones en UDI siempre están protegidas de la inflación, a diferencia de las inversiones tradicionales cuyas tasas de interés nominales, que aun siendo muy altas, pueden quedar por debajo de la tasa de inflación, generándose tasas reales negativas.

Las UDI iniciaron su cotización al día 4 de abril de 1995. Ese día su valor fue de $1.00 por cada UDI. A partir de ese momento su valor se ha incrementado diariamente de acuerdo a la tasa de inflación. Este valor es oficial y lo publica, todos los días, el Banco de México en el Diario Oficial de la Federación. Por ejemplo, si después de transcurridos 90 días de su lanzamiento, el INPC crece 12%, una UDI valdrá 12% más de lo que costaba el 4 de abril; esto es $1.12. Si el 4 de abril de 1996 la inflación acumulada es de 50%, cada UDI valdrá $ 1.50 en esa fecha, y así sucesivamente.

El Banco de México es el organismo encargado de calcular y publicar el valor en moneda nacional de las UDI para cada día, conforme a lo siguiente: a más tardar el día 10 de cada mes se publicará el valor correspondiente a los días 11 a 25 de dicho mes, y a más tardar el día 25 de cada mes se publicará el valor correspondiente a los días 26 de ese mes al 10 del mes inmediato siguiente.

La variación porcentual del valor de la UDI del 10 al 25 de cada mes será igual a la variación del INPC en la segunda quincena del mes inmediato anterior. La variación del valor de la UDI del 25 de un mes al 10 del mes inmediato siguiente será igual a la variación del INPC en la primera quincena del mes referido en primer término. La variación será uniforme durante esos días, para garantizar que quienes requieran hacer operaciones tengan un mínimo de certidumbre y un esquema de máxima facilidad para hacer los cálculos correspondientes.

Invertir en UDI es bueno cuando la inflación es alta. En estos momentos de estabilidad económica quizá no convenga la inversión en UDI, ya que la tasa real es muy pequeña o nula y sólo se compensa la inflación.

Ejemplo 1

Si se invierten $30 000 a un año y con una tasa de interés efectiva de 10%, para que la inversión resulte redituable en el plazo escogido la inflación deberá ser menor que 10%. Si la tasa de inflación resulta mayor, la tasa de interés no dará ningún rendimiento real positivo y, por el contrario, se estará perdiendo parte del capital ya que los $30 000 invertidos originalmente ya no tendrán el mismo poder de compra al vencer el plazo estipulado.

Si la inflación en el año es de 13%, calcule cuánto se habrá perdido en términos reales.

Solución:

Empleando la fórmula de Fisher estudiada en el tema sobre la inflación, se tiene:

$$i_R = \frac{0.10 - 0.13}{1.13} = -2.65\%$$

Hubo una pérdida de 2.65% en términos reales.

Ejemplo 2

Sandra invierte su dinero, \$50 000, en un pagaré en UDI con rendimiento liquidable al vencimiento. El plazo de la inversión es de 6 meses y gana un interés real de 4% anual. Obtenga el monto en pesos al final del plazo establecido. Suponga que al momento de la inversión la UDI vale 3.213906 pesos y en el periodo de 6 meses hubo una inflación de 1.69%.

Solución:

$$\text{Valor del capital en UDI} = \frac{50\,000}{3.213906} = 15\,557.3934 \text{ UDI}$$

El monto obtenido al invertir las UDI es:

$$M = 15\,557.3934\left[1+\left(\frac{0.04}{12}\right)(6)\right] = 15\,868.54127 \text{ UDI}$$

El valor de la UDI al cabo de 6 meses por efecto de la inflación es:

$$(3.213906)(1.0169) = 3.268221$$

Por tanto, el monto en pesos es:

$$M = (15\,868.54127)(3.268221) = \$51\,861.90$$

Utilizando la fórmula de Fisher se puede calcular cuál sería la tasa efectiva equivalente a la tasa real, para el periodo de la inversión se obtiene:

$$i_e = i_R(1+\lambda) + \lambda = (0.02)(1+0.0169) + 0.0169$$

$$i_e = 0.037238 = 3.7238\% \text{ semestral}$$

Por tanto, el monto obtenido es equivalente a haber contratado la inversión, en forma tradicional, a una tasa de interés de 3.7238% semestral (7.4476% anual), esto es:

$$M = 50\,000\,[1 + (0.037238)(1)] = \$51\,861.90$$

La ventaja de invertir en UDI es que, sin importar la inflación que se tenga, siempre se obtendrá un rendimiento mayor a la inflación.

Ejemplo 3

Una persona adquiere hoy a crédito una computadora que cuesta \$16 000 de contado y se conviene en pagarla en 6 mensualidades vencidas, sin enganche.

La operación se lleva a cabo a través de un crédito bancario y se pacta en UDI con una tasa de interés real de 10% anual capitalizable cada mes. Si en el momento en que se celebra la operación el valor de la UDI es de $3.272444 y se supone una inflación mensual de 1%, calcule el pago mensual en pesos.

Solución:

$$\text{Valor de la deuda en UDI} = \frac{16\,000}{3.272444} = 4\,889.31 \text{ UDI}$$

El pago mensual, en UDI, será:

$$A = \frac{(4\,889.31)\left(\dfrac{0.10}{12}\right)}{1-\left(1+\dfrac{0.10}{12}\right)^{-6}} = 838.82 \text{ UDI}$$

Con una inflación de 1% mensual, el pago mensual, en pesos, se muestra en la siguiente tabla:

Mes	Pago mensual en UDI	Valor de la UDI al final del mes	Pago mensual en [redacted]
1	838.82	3.305168	$2772.44
2	838.82	3.338220	$2 800.17
3	838.82	3.371602	$2 828.17
4	838.82	3.405318	$2 856.45
5	838.82	3.439372	$2 885.01
6	838.82	3.473765	$ 2 913.86

Ejercicios

1. José Luis invirtió $185 000 en un pagaré en UDI con Rendimiento Liquidable al Vencimiento a 182 días de plazo. La inversión se realizó el 24 de octubre de 2002, cuando la UDI tuvo un valor de $3.179966. Si la tasa de interés real fue de 3.63% anual, calcule el monto en pesos sabiendo que en la fecha de vencimiento la UDI tuvo un valor de $3.278750.

2. Se van a invertir $250 000 en Unidades de Inversión a un plazo de 3 meses. Si el valor de la UDI al inicio de la inversión es de $3.271599 pesos, la tasa de interés real es de 3.13% anual capitalizable cada mes y la inflación al final del periodo de inversión se estima en 1.15%, obtenga el valor final de la inversión, en pesos.

3. Al invertir en un pagaré bancario en UDI, a 90 días de plazo, se ofrece una tasa real de 1.2% anual, y en certificados de depósito (Cedes) a 90 días de plazo se ofrece una tasa nominal de 5% anual capitalizable cada mes. Si las expectativas de inflación para los próximos 12 meses son de 4.12%, ¿cuál de los dos instrumentos de inversión ofrece mejor rendimiento?

4. Se tiene un crédito hipotecario con un banco por $458 000. La deuda se contrató en UDI cuyo valor al inicio fue de 3.226234 pesos. Si el crédito es por 12 años y la tasa real de interés es de 8.3% anual capitalizable cada mes, obtenga el valor del pago mensual en UDI. Asimismo, estime el valor en pesos de las tres primeras mensualidades, si la tasa de inflación fue de 0.28% mensual.

7.2 Fondos de amortización

Una suma de dinero que se va acumulando con el fin de obtener un determinado monto se llama **fondo de amortización**. El fondo de amortización generalmente se genera invirtiendo cantidades iguales al principio o al final de periodos iguales; esto significa que el valor futuro del fondo, al final de cierto tiempo, corresponde al monto de una anualidad anticipada o vencida.

Los fondos de amortización se establecen con el fin de pagar una obligación que se vence en fecha futura, como la compra de equipo nuevo que sustituya al equipo depreciado u obsoleto, para los fondos de jubilación, etcétera.

Si bien los fondos de amortización y la amortización de deudas se utilizan con el fin de pagar una obligación, existe una clara diferencia entre ellos: los pagos periódicos de una amortización se destinan a liquidar una deuda que ya se tiene; en tanto que los depósitos periódicos hechos a un fondo de amortización tienen como objetivo la acumulación con el fin de liquidar una deuda futura.

Ejemplo 7.9

La vida útil de un equipo industrial que acaba de adquirir una compañía es de 5 años. Con el fin de reemplazarlo al final de este tiempo, la compañía establece un fondo de amortización efectuando depósitos anuales vencidos en una cuenta bancaria que paga 9.6% anual. Si se estima que el equipo costará 1 442 740 dólares, halle el valor del depósito.

Solución:

Se trata de determinar el pago periódico de una anualidad vencida cuyo monto será 1 442 740 dólares al final de 5 años y cuya tasa de interés es de 9.6% anual capitalizable cada año:

$$A = \frac{Fi}{(1+i)^n - 1} = \frac{(1\,442\,740)(0.096)}{[(1+0.096)^5 - 1]} = 238\,206.8579$$

$$A = 238\,206.8579 \text{ dólares}$$

El fondo de amortización se forma invirtiendo 238 206.8579 dólares al final de cada año, durante 5 años.

Una **tabla de capitalización**, llamada también **tabla de fondo de amortización**, muestra la forma como se acumula el dinero, periodo tras periodo, en un fondo de amortización.

Ejemplo 7.10

Construya la tabla de capitalización del ejemplo anterior.

Solución:

Año	Cantidad en el fondo al inicio del año (dólares)	Interés ganado en el año (dólares)	Depósito hecho al final del año (dólares)	Monto al final del año (dólares)
1	0	0	238 206.8579	238 206.8579
2	238 206.8579	22 867.8584	238 206.8579	499 281.5742
3	499 281.5742	47 931.0311	238 206.8579	785 419.4632
4	785 419.4632	75 400.2685	238 206.8579	1 099 026.5900
5	1 099 026.5900	105 506.5526	238 206.8579	1 442 740.0010

La tabla de capitalización se construye de la siguiente forma:

- El interés ganado al final de un año se obtiene utilizando la fórmula del interés simple, usando como capital la cantidad al inicio del año (columna 2). Por ejemplo, el interés ganado al final del segundo año es:

$$I = (238\,206.8579)(0.096)(1) = 22\,867.8584 \text{ dólares}$$

- El monto al final de un año (columna 5) es igual a la suma de las columnas 2, 3 y 4. Por ejemplo, el monto al final del segundo año es

$$238\,206.8579 + 22\,867.8584 + 238\,206.8579 = \$499\,281.5742$$

- Los depósitos hechos al final de un año no ganan intereses.

Ejemplo 7.11

Salvador desea comprar una impresora multifuncional que cuesta $3 000. Como desea comprarla de contado, crea un fondo de ahorro con abonos quincenales anticipados de $492.76. Si la tasa de interés que gana el fondo es de 10% capitalizable cada quincena, ¿cuántos depósitos deberá hacer? Elabore la tabla de capitalización.

Solución:

La respuesta se obtiene al despejar n de la ecuación (6.3).

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{Fi}{A(1+i)}+1\right]}{\log(1+i)} = \frac{\log\left[\dfrac{(3\,000)(0.10/24)}{(492.76)(1+0.10/24)}+1\right]}{\log(1+0.10/24)}$$

$$n = 6 \text{ depósitos quincenales}$$

La tabla de capitalización es la siguiente:

Quincena	Depósito hecho al inicio de la quincena	Cantidad en el fondo al inicio de la quincena	Interés ganado en la quincena	Monto al final de la quincena
1	$492.76	$492.76	$2.05	$494.81
2	$492.76	$987.57	$4.12	$991.69
3	$492.76	$1 484.45	$6.19	$1 490.64
4	$492.76	$1 983.40	$8.26	$1 991.66
5	$492.76	$2 484.42	$10.35	$2 494.77
6	$492.76	$2 987.53	$12.45	$2 999.98

Observe que:

- El interés ganado en la quincena se obtiene al usar la fórmula del interés simple, donde el capital es la cantidad que se tiene en el fondo al inicio de la quincena (columna 3).

- El monto al final de la quincena (columna 5) se obtiene al sumar las columnas 3 y 4.
- La cantidad que se tiene en el fondo al inicio de una quincena (columna 3) es igual al monto que se tiene al final de la quincena anterior, más el depósito hecho al inicio de la quincena.

Ejemplo 7.12

Norma desea tomar unas vacaciones dentro de un año. Por tal motivo,. crea un fondo vacacional mediante depósitos bimestrales vencidos de $5 000. Con la elaboración de la tabla de capitalización, diga cuál será el monto del fondo al cabo de un año, si la tasa de interés en el primer semestre del año fue de 11% capitalizable cada bimestre y de 12.4% capitalizable cada bimestre en el segundo semestre.

Solución:

Semestre	Cantidad en el fondo al inicio del semestre	Interés ganado en el semestre	Depósito hecho al final del semestre	Monto al final del semestre
1	0	0	$5 000.00	$5 000.00
2	$ 5 000.00	$ 91.67	$5 000.00	$ 10 091.67
3	$10 091.67	$185.01	$5 000.00	$ 15 276.68
4	$ 15 276.68	$ 315.72	$5 000.00	$20 592.40
5	$20 592.40	$425.58	$5 000.00	$ 26 017.98
6	$ 26 017.98	$537.70	$5 000.00	$ 31 555.68

El monto al cabo de un año es de $31 555.68. El lector puede comprobar el resultado anterior, planteando una ecuación de valor.

Ejercicios 7.2

1. ¿Qué diferencia hay entre amortización y fondos de amortización?
2. Si se depositan $2 000 cada fin de mes en un fondo de amortización que gana 1.2% mensual capitalizable cada mes, ¿cuál será el monto del fondo al cabo de 6 meses? Elabore la tabla de capitalización.

3. ¿Cuánto se logrará acumular en un año en un fondo de amortización, si el señor Mejía deposita en el fondo $46 250 al inicio de cada bimestre? La tasa de interés es de 13.4% capitalizable cada bimestre. Elabore la tabla de capitalización.

4. Una persona abre un fondo de ahorro con el fin de acumular $75 000 en un semestre. Si el fondo gana un interés de 13% capitalizable cada mes, ¿de cuánto deberá ser el depósito mensual al fondo, si éste se realiza en forma vencida? Elabore la tabla de capitalización.

5. Una persona desea reunir $7 800 para comprar una cámara fotográfica dentro de 4 meses. ¿Cuánto deberá depositar cada fin de quincena en una cuenta bancaria que paga 14.22% de interés capitalizable quincenalmente? Elabore la tabla de capitalización.

6. Diego necesitará $100 000 dentro de un año. ¿Qué cantidad deberá depositar en un fondo de ahorro al inicio de cada trimestre para lograr su objetivo? El fondo gana una tasa de interés de 12% capitalizable trimestralmente. Elabore la tabla de capitalización.

7. Una compañía necesitará reponer una máquina dentro de 8 años, la cual, en ese momento se podrá vender en 8 000 dólares. De acuerdo a los estudios realizados se espera que la máquina cueste alrededor de 97 000 dólares y se decide establecer un fondo de amortización para cubrir el costo. Si se puede obtener 8% capitalizable cada semestre, ¿cuánto se tiene que depositar al final de cada semestre para tener el dinero y reponer la máquina al final de su vida útil?

8. El gerente de un hospital desea establecer un fondo de amortización para comprar un equipo de Tomografía Computarizada Tridimensional en un término de 3 años. Para esto se deberá destinar cierta cantidad cada inicio de cuatrimestre hasta completar la cantidad de 1 000 000 de dólares. Si los depósitos producen 10% capitalizable cada cuatrimestre, determine el valor del depósito cuatrimestral.

9. Un cierto fondo de amortización debe acumular dentro de 4 años un monto de $670 000. En este momento el fondo cuenta con $87 500. Obtenga la cantidad que se debe depositar al final de cada mes para formar el monto estipulado. La inversión se efectúa a 2.715% mensual.

10. Ramón desea tener $45 000 para darlos de enganche para una casa. Si puede ahorrar $6 200 cada fin de mes en un banco que le paga una tasa de interés de 1.25% mensual, ¿cuánto tiempo se tardará en acumular los $45 000? Elabore la tabla de capitalización.

11. ¿Cuántos depósitos semanales de $1 000 se necesitan para acumular $130 000 en un fondo que genera intereses a una tasa de 10% capitalizable cada semana?
   a) Considere anualidad vencida.
   b) Considere anualidad anticipada.

12. ¿Cuántos depósitos mensuales anticipados de $13 000 cada uno deberá realizar una empresa para acumular $3 000 000 en un fondo de jubilación para sus empleados, que genera intereses de 1% mensual capitalizable cada mes?

13. Adriana desea ahorrar $9 350 con el fin de comprar un refrigerador. Si puede ahorrar $1 600 cada fin de mes e invierte esa cantidad a 9% capitalizable mensualmente, ¿cuántos depósitos completos hará y cuál será el valor del depósito final? Elabore la tabla de capitalización.

14. Una persona desea reunir $250 000 en 3 años, realizando depósitos al final de cada cuatrimestre en un fondo de ahorro que paga 11% capitalizable cada 4 meses. Después de un año el banco elevó la tasa de interés a 14%. Si los depósitos continuaron igual, ¿cuál será el monto al final de los 3 años? Elabore la tabla de capitalización.

15. En una fábrica se necesitará reponer un equipo dentro de 8 años y la administración de la empresa decide establecer un fondo de amortización. El equipo cuesta actualmente 95 000 dólares. Tomando en cuenta que el equipo subirá de precio de acuerdo a la tasa de inflación y que ésta se estima en 3% anual, ¿cuánto se tiene que depositar cada mes en una cuenta que paga 0.85% mensual capitalizable cada mes?

16. Un fabricante de artículos de aluminio pretende comprar dentro de 14 meses una máquina que ahora cuesta $178 000. Con ese fin, crea un fondo con depósitos bimestrales anticipados que gana una tasa de interés de 12.12% capitalizable cada bimestre. ¿De cuánto debe ser cada uno de los depósitos, si el precio de la máquina aumenta cada mes en un porcentaje igual a la inflación mensual? La inflación en los primeros cinco meses fue de 0.94% mensual y en los meses siguientes de 1.06% mensual.

17. ¿A qué tasa de interés tendrían que hacerse 5 depósitos mensuales anticipados de $20 000 para acumular $103 415.75 al momento de realizar el quinto depósito? Elabore la tabla de capitalización.

18. Resuelva el ejercicio anterior, si los depósitos mensuales son vencidos.

CAPÍTULO

8

Otras anualidades

Objetivos

Al finalizar el estudio de este capítulo el alumno podrá:

- Definir y explicar las anualidades generales, variables y las rentas perpetuas.
- Plantear y resolver problemas en los que se utilicen estos conceptos.

8.1 Rentas perpetuas

Una **renta perpetua** o **perpetuidad** es una anualidad cuyo plazo no tiene fin. Este tipo de anualidades se presenta cuando se invierte un capital y únicamente se retiran los intereses; por tanto, mientras se mantenga invertido el capital se tendrá una renta perpetua.

Son ejemplos de rentas perpetuas los siguientes:

- Los legados hechos a centros de investigación, organismos de beneficencia, universidades, etc., que se invierten y cuyos intereses se utilizan al final de cada periodo.
- Los dividendos provenientes de acciones preferentes de una compañía.

Puesto que los pagos de una renta perpetua, en teoría, no terminan nunca, es imposible calcular el valor futuro de los mismos; en cambio, el valor actual de una renta perpetua está perfectamente definido. Por ejemplo, si Sonia deposita \$45 000 en una cuenta de inversión que paga un interés del 1.1% mensual, un mes después puede retirar \$495 dejando intacto el capital inicial. Al final del segundo mes podrá repetir esta operación retirando otros \$495 y así, en teoría, hasta el infinito. Se dice que \$45 000 son el valor actual de una renta perpetua de \$495 por mes.

Las rentas perpetuas pueden ser vencidas, anticipadas o diferidas.

Considere una renta perpetua de A pesos que se pagará al final de cada periodo de interés. Si i es la tasa de interés por periodo, expresada en forma decimal, el valor presente de la renta perpetua simple vencida es aquella cantidad P que en un periodo de interés produce A pesos de intereses. Esto es:

$$Pi = A$$

Por tanto:

$$P = \frac{A}{i} \tag{8.1}$$

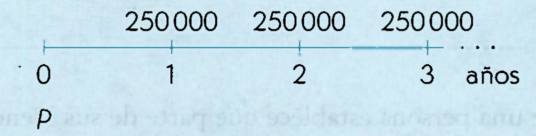
La ecuación anterior puede obtenerse, también, tomando el límite cuando n tiende a infinito en la ecuación (6.2).

Ejemplo (8.1)

El testamento del señor Canavati, conocido filántropo, establece que deberá pagarse al asilo de ancianos *María Auxiliadora*, una renta perpetua de \$250 000, pagaderos al final de cada año. ¿Cuál es el valor actual de ese legado, suponiendo que se encuentra invertido a 12.64% de interés anual?

Solución:

El diagrama de tiempo de la perpetuidad es el siguiente:



Según la ecuación (8.1), se tiene:

$$P = \frac{250\,000}{0.1264} = \$1\,977\,848$$

El valor actual del legado es de $1 977 848. Esto significa que al invertir $1 977 848 a 12.64% anual, se generará un interés de $250 000 al año, el cual es retirado y entregado al asilo. Estos retiros serán por tiempo indefinido, excepto que cambie la tasa de interés, o bien, se retire todo, o parte del capital.

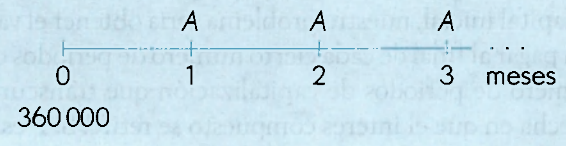
Ejemplo 8.2

Encuentre el pago mensual de una perpetuidad cuyo valor presente es de $360 000, suponiendo un interés de 13% anual capitalizable cada mes.

Solución:

Debido a que la capitalización es mensual y el pago de la renta perpetua se efectúa cada mes, en realidad no existe la capitalización de los intereses.

El diagrama de tiempo de la perpetuidad es:



Despejando A de la ecuación (8.1), se tiene:

$$A = Pi = (360\,000)\left(\frac{0.13}{12}\right) = \$3\,900$$

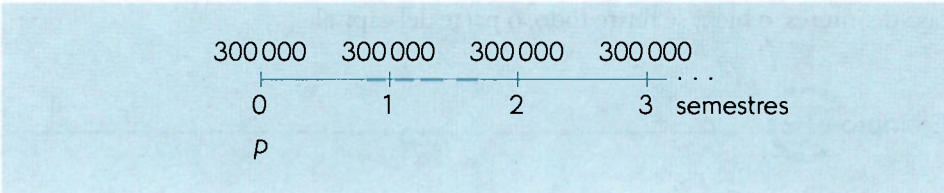
$360 000 invertidos a 13% capitalizable cada mes generan un interés de $3 900 mensuales, el cual no es reinvertido, sino que se retira para utilizarse en alguna otra cosa. Mientras permanezca el dinero invertido a 13%, el retiro de los $3 900 mensuales seguirá por tiempo indefinido.

Ejemplo 8.3

El testamento de una persona establece que parte de sus bienes serán invertidos de tal modo que el Centro de Investigación Biológica reciba, a perpetuidad, una renta de $300 000 al inicio de cada semestre. Si la tasa de interés es de 11.54% anual, encuentre el valor presente de la donación.

Solución:

El diagrama de tiempo de la perpetuidad es el siguiente:



Obtener el valor presente de una perpetuidad anticipada, consiste en calcular la cantidad P que disminuida en una renta producirá una renta perpetua A. Esto es:

$$P - 300\,000 = \frac{300\,000}{\left(\frac{0.1154}{2}\right)}$$

$$P = 5\,499\,306.76$$

Si en lugar de retirar el interés a medida que se gana, se deja capitalizar por cierto número de periodos, al final de los cuales se retira el interés compuesto ganado, dejando sólo el capital inicial, nuestro problema sería obtener el valor actual de una renta perpetua a pagar al final de cada cierto número de periodos de capitalización.

Sea n el número de periodos de capitalización que transcurrirán entre la fecha actual y la fecha en que el interés compuesto se retire. Si P es el capital inicial, entonces

$$F = P(1 + i)^n$$

Si al monto anterior se le resta el capital inicial, el resultado será el interés compuesto generado en n periodos de capitalización; en otras palabras, el resultado de la resta es el valor de la renta perpetua.

Esto es:

$$F - P = A$$

$$P(1 + i)^n - P = A$$

Factorizando:

$$A = P[(1 + i)^n - 1]$$

Por tanto:

$$P = \frac{A}{(1 + i)^n - 1} \qquad (8.2)$$

Ejemplo 8.4

Una institución de beneficencia recibe cada semestre la cantidad de $180 000. Si la tasa de interés es de 10% capitalizable cada mes, determine el valor presente de la donación.

Solución:

$$P = \frac{A}{(1 + i)^n - 1} = \frac{180\,000}{\left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^6 - 1}$$

$$P = \$3\,525\,726.12$$

$3 525 726.12 es la cantidad de dinero que se debe de invertir el día de hoy a 10% capitalizable cada mes, con el fin de retirar $180 000 al final de cada semestre. La comprobación sería la siguiente:

Si $3 525 726.12 se depositan en una cuenta de inversión durante 6 meses a 10% capitalizable cada mes, se tendrá un monto de

$$F = 3\,525\,726.12\left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^6 = \$3\,705\,726.12$$

Si a esta cantidad se le resta el donativo hecho a la institución de beneficencia, se tiene el saldo que se volverá a invertir, éste es:

$$\text{saldo a invertir} = 3\,705\,726.12 - 180\,000$$

$$\text{saldo a invertir} = \$3\,525\,726.12$$

Por tanto, la institución de beneficencia podrá seguir gozando del donativo semestral en tanto el capital continúe ganando 10% anual con capitalización mensual.

Ejercicios 8.1

1. El testamento de la señora Julia Gómez establece que una parte de su fortuna se invertirá de modo que el *Centro de Investigaciones de Fenómenos Paranormales* reciba, a perpetuidad, la cantidad de $150 000 cada fin de año. Si la tasa promedio de interés en el mercado financiero es de 11.4%, halle el valor actual de la donación.

2. ¿Cuánto puede retirar cada bimestre y por tiempo indefinido el señor Rizo, si se le depositan $500 000 en un banco que paga un interés de 12% anual?

3. ¿Qué cantidad de dinero es necesario depositar en un fideicomiso con el fin de otorgar una beca perpetua para estudios de maestría, que cuesta $45 000 al semestre, suponiendo una tasa de interés de 10.2% anual?

4. Cierta persona legó $720 000 a un asilo de ancianos para que cada fin de trimestre reciba una cantidad fija para su mantenimiento. Si la tasa de interés es de 3% trimestral, ¿cuánto recibirá trimestralmente el asilo?

5. ¿Cuál es la renta mensual que se debe cobrar por una casa que tiene un valor de $378 000, si se desea obtener una tasa de rendimiento de 8% anual?

6. Una casa se renta en $2 800 mensuales. ¿Cuál es la tasa de rendimiento ganada por el propietario si está valuada en $435 000?

7. Una inversión de $700 000 producen una renta trimestral de $19 775. ¿Cuál es la tasa anual que gana la inversión?

8. ¿Cuál es el valor presente de una perpetuidad anticipada, si la renta tiene un valor de $5 600 quincenales y la tasa de interés es de 0.84% mensual?

9. ¿Cuál es el valor de un capital que produce una renta de $10 800 mensuales anticipados, si la tasa de rendimiento es de 13% anual?

10. La fundación *Arriba México* donó $2 000 000 a una institución de beneficencia. El dinero se depositó en una cuenta que paga una tasa de interés de 14% anual capitalizable cada mes. ¿Cuánto podrá retirar la institución cada mes, si el retiro es anticipado y se desea que éstos sean por tiempo ilimitado?

11. Joaquín ganó el primer premio del sorteo *Melate*. Una vez descontado el impuesto, recibió $3 864 000 que depositó en una cuenta que paga una tasa de interés de 12.8% anual. Si Joaquín desea recibir una renta quincenal por tiempo indefinido, comenzando en el momento en que deposita el dinero, ¿cuál será el valor de ésta?

12. Un filántropo crea un fondo con $800 000 que se invertirán a 9.33% capitalizable cada mes, durante 6 años. El monto obtenido al cabo de ese tiempo se utilizará para ayudar a la institución *Madres Solteras, A.C.* ¿Qué cantidad bimestral recibirá esta institución si el dinero gana una tasa de interés del 10.5% capitalizable cada bimestre?

13. El señor Camacho legó a un hospital $185 000 para la compra de un equipo esterilizador y $11 300 cada fin de semestre para su mantenimiento. Si la tasa de interés es de 13.8% anual capitalizable cada 6 meses, ¿cuál fue la cantidad total que legó el señor Camacho?

14. Un agricultor compró un tractor en $943 000. ¿Qué cantidad necesita invertir, con el fin de contar con una renta perpetua de $26 000 anuales, para el mantenimiento del tractor? La tasa de interés es de 8.75% anual capitalizable cada mes.

15. Con el fin de cruzar un río el ayuntamiento de una población construyó un puente, con un costo de $7 800 000. Se calcula que habrá que reemplazarlo cada 10 años con un costo igual. ¿Qué cantidad de dinero es necesario invertir a 13% capitalizable cada mes para proveer un número infinito de reemplazos?

16. El testamento de Don Julio establece que se invertirán $1 750 000 en un fondo de ayuda a *Cáritas*. Si el dinero gana 12% capitalizable cada quincena, ¿cuál será la renta perpetua que recibirá *Cáritas* cada año?

17. El Gobierno Estatal construyó un paso a desnivel y establece un fondo de $5 000 000 para su mantenimiento, que se llevará a cabo cada trimestre por tiempo indefinido. Si el fondo gana un interés de 11.35% anual capitalizable cada mes, ¿qué cantidad se destinará al mantenimiento del paso a desnivel?

18. Tomás decide crear un fondo de jubilación que complemente lo que recibirá de la Afore. El fondo lo abre con $15 000 y deposita en él $1 400 cada mes, empezando un mes después de la apertura del fondo. El monto obtenido al cabo de 15 años de aportaciones se utilizará para obtener una mensualidad por tiempo indefinido. ¿Cuál será el valor de la mensualidad, si el fondo gana 14% capitalizable cada mes?

19. ¿A qué tasa de interés anual capitalizable cada quincena están invertidos \$2 500 000, si por esta cantidad el Departamento de Investigación Solar de una universidad recibe una renta perpetua de \$179 259.72 cada semestre?

20. Una empresa determinó que con \$1 850 000, invertidos en un fideicomiso, son suficientes para que uno de sus ejecutivos que se acaba de jubilar pueda recibir \$15 640 cada mes, de por vida. ¿Cuál debe ser la tasa de interés a la que se debe invertir el dinero?

21. Un filántropo donó 20 microcomputadoras a una escuela así como \$80 000 con el fin de que cada año se destinen \$10 000 a la compra de software. Si los intereses se capitalizan cada mes, encuentre la tasa a la cual se debe invertir la donación.

22. El señor Solís donó \$100 000 a una iglesia con el fin de que se destinen \$5 000 cada 6 meses para la conservación y mantenimiento del altar. Si el dinero se invierte en un fideicomiso que capitaliza los intereses cada mes, encuentre el valor de la tasa nominal.

23. ¿Con qué tasa de interés mensual deberían invertirse \$300 000 para retirar \$4 500 cada mes por tiempo indefinido?

8.2 Anualidades generales

Las anualidades estudiadas hasta este momento han sido anualidades simples; esto es, anualidades donde el periodo de capitalización coincide con el periodo de pago. En el capítulo 6 se mencionó que una **anualidad general** es aquella en la que el periodo de capitalización no coincide con el periodo de pago. Por ejemplo, una persona deposita \$600 cada quincena en una cuenta de ahorro cuyos intereses se capitalizan cada mes.

En esta sección se estudiarán las anualidades ciertas, inmediatas y generales, las que pueden ser vencidas, anticipadas o diferidas. A este tipo de anualidades se les conoce como **anualidades generales**.

Para resolver un problema de anualidad general es necesario modificarlo de tal manera que los periodos de pago y los de capitalización coincidan. Es decir, es necesario modificar la anualidad general en una anualidad simple equivalente. La forma más sencilla de llevar a cabo este cambio es convertir la tasa de interés dada en una tasa equivalente cuyo periodo de capitalización coincida con el periodo de pago. La tasa equivalente se obtiene mediante el uso de la ecuación (5.3).

Ejemplo 8.5

Calcule el monto y el valor presente de una anualidad vencida de $2 500 quincenales durante 3 años, si la tasa de interés es de 16% capitalizable cada mes.

Solución:

En este problema el periodo de pago es de una quincena, en tanto que el periodo de capitalización es de un mes, por ello se cambia la tasa de interés dada, 16% capitalizable cada mes, a una tasa equivalente cuyo periodo de capitalización sea quincenal, con el fin de que coincida con el periodo de pago.

Utilizando la ecuación (5.3), se tiene:

$$i_{eq} = \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{q}} - 1\right]q = \left[\left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{\frac{12}{24}} - 1\right]24$$

i_{eq} = 15.94701924% anual capitalizable cada quincena.

Una vez obtenida la tasa equivalente el problema deja de ser una anualidad general para convertirse en una anualidad simple vencida. Por tanto, utilizando las ecuaciones (6.1) y (6.2), se tiene

$$F = 2\,500\left[\frac{\left(1 + \frac{0.1594701924}{24}\right)^{72} - 1}{\left(\frac{0.1594701924}{24}\right)}\right] = \$229\,869.89$$

$$P = 2\,500\left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.1594701924}{24}\right)^{-72}}{\left(\frac{0.1594701924}{24}\right)}\right] = \$142\,691.55$$

Recuerde que una forma más sencilla de obtener el valor presente es utilizando la fórmula del interés compuesto, despejando P y utilizando $229 869.89 como monto:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} = F(1+i)^{-n} = (229\,869.89)\left(1 + \frac{0.1594701924}{24}\right)^{-72}$$

$$P = \$142\,691.55$$

Ejemplo 8.6

Encuentre el valor futuro de 15 depósitos bimestrales anticipados de $8 000, si la tasa de interés es de 11.5% anual capitalizable cada mes.

Solución:

En primer lugar, es necesario obtener la tasa de interés anual equivalente capitalizable bimestralmente.

$$i_{eq} = \left[\left(1+\frac{0.115}{12}\right)^{\frac{12}{6}} - 1\right]6 = 11.55510415\% \text{ anual capitalizable cada bimestre}$$

Utilizando la ecuación (6.3), se tiene:

$$F = 8\,000\left[\frac{\left(1+\dfrac{0.1155510415}{6}\right)^{15} - 1}{\left(\dfrac{0.1155510415}{6}\right)}\right]\left(1+\frac{0.1155510415}{6}\right)$$

$$F = \$140\,258.74$$

Ejemplo 8.7

Una tienda departamental vende un teléfono celular en $1 470 de contado. Se puede comprar a crédito, a 6 mensualidades, pagando una tasa de interés de 28% capitalizable cada semana. ¿Cuál es el valor del abono mensual?

Solución:

La tasa de interés equivalente con capitalización mensual es:

$$i_{eq} = \left[\left(1+\frac{0.28}{52}\right)^{\frac{52}{12}} - 1\right]12 = 28.25233627\%$$

La mensualidad se obtiene despejando A de la ecuación (6.2):

$$A = \frac{Pi}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{(1\,470)\left(\frac{0.2825233627}{12}\right)}{1-\left(1+\frac{0.2825233627}{12}\right)^{-6}}$$

$$A = \$265.58$$

Ejemplo 8.8

¿Cuántos depósitos quincenales anticipados de \$425 cada uno serán necesarios para acumular \$10 800, si la tasa de interés es de 13.8799% compuesto en forma mensual?

Solución:

La tasa de interés equivalente con capitalización quincenal es:

$$i_{eq} = \left[\left(1+\frac{0.138799}{12}\right)^{\frac{12}{24}} - 1\right]24 = 13.84\%$$

Sustituyendo los datos en la ecuación (6.3), se tiene:

$$10\,800 = 425\left[\frac{\left(1+\frac{0.1384}{24}\right)^{n} - 1}{\left(\frac{0.1384}{24}\right)}\right]\left(1+\frac{0.1384}{24}\right)$$

$$0.145700967 = \left(1+\frac{0.1384}{24}\right)^{n} - 1$$

$$\left(1+\frac{0.1384}{24}\right)^{n} = 1.145700967$$

$$n\log\left(1+\frac{0.1384}{24}\right) = \log 1.145700967$$

Por tanto:

$$n = 23.65464521 \text{ quincenas}$$

Teóricamente se necesitan 23.65464521 depósitos quincenales para acumular \$10 800. En la práctica, como podrá recordar el lector, se tienen dos soluciones: si se llevan a cabo 23 depósitos quincenales de \$425, se tendrá un monto de \$10 480.92; si se realizan 24 depósitos, el monto será por \$10 968.81. Otra solución sería ajustar el pago quincenal tomando 23 quincenas completas, esto es:

$$A = \frac{(10\,800)\left(\frac{0.1384}{24}\right)}{\left[\left(1+\frac{0.1384}{24}\right)^{23}-1\right]\left(1+\frac{0.1384}{24}\right)}$$

$$A = \$437.94$$

Al depositar \$437.94 al inicio de cada quincena, durante 23 quincenas, se tendrá un monto de \$10 800.

Ejercicios 8.2

1. Obtenga el monto y el valor presente de 10 pagos trimestrales vencidos de \$10 000, si la tasa de interés es de 26.4143% capitalizable cada mes.

2. ¿Cuál es el valor futuro y el valor actual de 24 pagos mensuales anticipados de \$6 500, si la tasa de interés es de 22.2% anual capitalizable cada bimestre?

3. Una compañía deposita \$25 000 al final de cada mes en un fondo de depreciación que gana un interés de 10.5% capitalizable cada bimestre. ¿Cuánto habrá en el fondo al término de 2 años y 6 meses?

4. Resuelva el problema anterior si la compañía, en lugar de depositar \$25 000 cada mes, deposita \$150 000 al inicio de cada semestre.

5. David desea ahorrar \$120 000 en 2 años. Si hace depósitos semanales en un fondo de ahorro que gana 12.4% anual efectivo, ¿cuánto debe depositar al inicio de cada semana?

6. Estela pidió un préstamo por \$175 000 a cuatro años de plazo, a la empresa donde trabaja para comprar un automóvil nuevo de contado. Si la empresa le cobra una tasa de interés de 25.13% capitalizable cada mes, y Estela va a pagar mediante descuentos quincenales vía nómina, ¿cuánto se le descontará cada quincena?

7. Un automóvil, cuyo precio de contado es de \$163 000, se vende a crédito mediante 36 pagos mensuales anticipados. Si la tasa de interés es

de 20.4% anual capitalizable cada semestre, encuentre el valor de los pagos mensuales y el interés total pagado.

8. ¿Qué pago quincenal es equivalente a uno mensual de $300, si la tasa de interés es de 20% capitalizable cada mes?

9. Una tienda de artículos electrónicos ofrece una calculadora graficadora a crédito a 6 meses de plazo, pagando $243.70 cada quincena. Si la tasa de interés es de 30.1875% capitalizable cada bimestre, encuentre el precio de contado.

10. El comprador de un terreno pagará $25 000 de enganche y $3 850 al principio de cada mes, durante 8 años. Si la tasa de interés es de 23% anual efectivo, ¿cuál es el valor de contado del terreno?

11. Martín compra una casa en $534 000 a 20 años de plazo, dando un enganche de 20% del precio de contado y el saldo en pagos quincenales con 16.75% de interés capitalizable cada año. Halle el valor del pago quincenal y el interés total pagado.

12. La compañía *Alfa & Omega, S. A.*, desea acumular $1 000 000 en un fondo de amortización, al término de 7 años. ¿Qué depósito es necesario hacer al final de cada bimestre si el fondo paga 15.3781% capitalizable semestralmente?

13. El *Banco Nacional de Crédito Rural* otorga un préstamo a un grupo de campesinos bajo la siguiente forma de pago: $150 000 trimestrales durante 5 años, debiéndose dar el primer pago dentro de 2 años. Encuentre el valor del préstamo, si la tasa de interés es de 20% con capitalización mensual.

14. Una tienda departamental ofrece su tradicional plan anual de "Compre ahora y empiece a pagar hasta dentro de 4 meses". Un cliente compra un equipo de cine doméstico que pagará mediante 13 abonos mensuales. Si el precio de contado del equipo es de $8 730 y la tasa de interés que cobra la tienda es de 37.9402% efectivo, ¿cuál es el abono mensual?

15. Una secretaria deposita cada fin de quincena $350 de su sueldo en una cuenta de ahorro que paga 10.793% capitalizable cada mes. ¿Cuántos depósitos debe hacer para reunir $12 000?

16. Una avioneta cuyo precio de contado es de $3 700 000 se vende con un pago inicial de 40% y el saldo en pagos mensuales de $83 700.85. Si la tasa de interés cargada es de 11% semestral capitalizable cada semestre, encuentre el número de pagos necesarios para saldar la deuda.

17. Margarita compra un automóvil usado valuado en 3 400 dólares. Paga 340 dólares de cuota inicial y acuerda pagar 110 dólares al final de cada quincena. Halle el número de pagos completos y el pago final, una quincena después, si la tasa de interés es de 14% capitalizable cada dos meses.

18. Un equipo industrial tiene un precio de contado de $9 000 000. Una fábrica lo adquiere mediante un pago inicial de $1 000 000 y 36 pagos mensuales consecutivos de $543 877, el primero con vencimiento al cabo de un año y medio. ¿Qué tasa nominal capitalizable cada bimestre se está cargando? ¿Cuál es la tasa efectiva?

19. Una videocámara digital se vende en $11 310, al contado. A plazos, se vende sin enganche y en 18 mensualidades vencidas de $790 cada una. Obtenga la tasa de interés efectiva que carga la tienda.

20. En la compra de una radiograbadora con reproductor de CD, que cuesta $3 225 de contado, el plan a crédito consiste en 10 pagos quincenales anticipados de $349.70 cada uno. ¿Cuál es la tasa anual con capitalización mensual que se cobra?

21. El señor Bermejo abre una cuenta de ahorro con $12 000 y, posteriormente, deposita $460 cada quincena. ¿Cuál será el monto al cabo de 5 años, si la tasa de interés es de 10.36% compuesto cada mes?

22. El señor Morales abre una cuenta de ahorro con $35 000 y, posteriormente, deposita $650 cada quincena, realizando el primer depósito 4 meses después del inicial. Si la tasa de interés es de 12.3% capitalizable cada mes, ¿cuál será el monto al cabo de 5 años, contados a partir de la apertura de la cuenta?

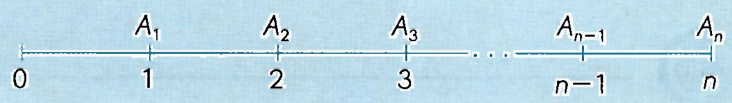
23. Una compañía tiene establecido un plan de jubilación equivalente a 180 días de sueldo nominal diario más 50 días de sueldo nominal diario por cada año de servicio. La forma de pago al trabajador es en una sola exhibición y se otorga cuando el trabajador tenga, al menos, 60 años de edad, independientemente de los años trabajados en la compañía. El sueldo utilizado para el cálculo del pago es el devengado en el momento en que el trabajador solicita su retiro.

    El señor León tiene 62 años de edad y desea jubilarse. Tiene trabajando en la compañía 26 años y actualmente gana $620 diarios, incluyendo sábado y domingo. El dinero de la jubilación piensa depositarlo en una cuenta de inversión que le da 13.8397% capitalizable cada mes y de ahí retirar $7 000 cada fin de quincena. ¿Cuántos retiros quincenales podrá efectuar en total?

24. Los padres de una joven que cumplirá 13 años próximamente desean depositar en una cuenta, durante 3 años, cierta cantidad de dinero al inicio de cada mes, comenzando el día en que ella cumpla los 13 años. El monto obtenido en el momento en que la hija cumpla 18 años será utilizado para generar una serie de pagos semestrales de \$70 000 anticipados durante 4 años, con el fin de pagar las colegiaturas de la universidad. Si la hija ingresará a la universidad justo cuando cumpla 18 años, ¿qué cantidad se debe depositar en la cuenta con el fin de cumplir este objetivo? La tasa de interés se mantiene constante durante todo este tiempo en 14% anual capitalizable cada mes.

8.3 Anualidades variables

Una **anualidad variable** es aquella cuyos pagos son diferentes entre sí. Si A_1, A_2, A_3,. . ., A_n son los pagos hechos *al final* de cada periodo, se tiene el siguiente diagrama de tiempo:



Si $A_1 < A_2 < A_3 < \ldots < A_n$, entonces se dice que la anualidad es variable **creciente**. Si $A_1 > A_2 > A_3 > \ldots > A_n$, se tiene una anualidad variable **decreciente**. Si la anualidad es variable y no corresponde a uno de los tipos anteriores, entonces se tiene una anualidad variable **sin dirección**.

Cualquiera que sea el tipo de problema de anualidad variable, éste se resuelve utilizando ecuaciones de valor, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 8.9

El Banco Nacional ofrece un interés de 10% capitalizable cada mes en las cuentas de ahorro. Ricardo planea depositar \$1 000 cada fin de mes, durante 3 meses, en una cuenta de ahorro de dicho banco. Los 3 meses siguientes piensa depositar \$2 000 cada mes y, posteriormente, depositar \$2 500 mensuales durante 4 meses. Encuentre el monto de lo ahorrado.

Solución:

De acuerdo con el diagrama de tiempo:

	1000	1000	1000	2000	2000	2000	2500	2500	2500	2500
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 meses
										F

Tomando el mes 10 como fecha focal, se tiene:

$$F = 1000\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^9 + 1000\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^8 + 1000\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^7 +$$

$$2000\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^6 + 2000\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^5 + 2000\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^4 +$$

$$2500\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^3 + 2500\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^2 + 2500\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^1 + 2500$$

$$F = \$19\,586.05$$

Ejemplo 8.10

Rafael compró un horno de microondas a crédito. El pago se hará mediante 4 abonos quincenales vencidos, de la siguiente forma: \$500 dentro de 15 días, \$400 dentro de un mes, \$300 dentro de un mes y medio y \$200 dentro de dos meses. Si la tasa de interés cobrada es de 2.55% mensual capitalizable cada mes, obtenga el precio de contado.

Solución:

El diagrama de tiempo es el siguiente:

	500	400	300	200
0	1	2	3	4 quincenas
P				

El periodo de capitalización no coincide con el periodo de pago; por tanto, se debe calcular primero la tasa de interés equivalente.

$$i_{eq} = \left[(1 + 0.0255)^{\frac{12}{24}} - 1\right] 24 = 30.40737324\% \text{ capitalizable cada quincena}$$

Para obtener el valor presente (o precio de contado) de los pagos quincenales, se plantea una ecuación de valor, estableciendo la fecha focal en el momento actual.

$$P = 500\left(1 + \frac{0.3040737324}{24}\right)^{-1} + 400\left(1 + \frac{0.3040737324}{24}\right)^{-2} +$$

$$300\left(1 + \frac{0.3040737324}{24}\right)^{-3} + 200\left(1 + \frac{0.3040737324}{24}\right)^{-4}$$

$$P = 1362.85$$

Ejemplo 8.11

Susana abrió una cuenta de ahorro depositando \$3 400. Dos meses después depositó \$2 800 y dos meses más tarde hizo un depósito por \$3 600. Pasados dos meses del último depósito, Susana retiró su dinero recibiendo \$10 262.51 en total. Si la capitalización de los intereses es mensual, obtenga la tasa de interés que le pagó el banco.

Solución:

El diagrama de tiempo es el siguiente:

3 400	2 800	3 600		
0	2	4	6	meses
10 262.51				

Si se toma como fecha focal la fecha de retiro del dinero, se puede formular la siguiente ecuación de valor:

$$10\,262.51 = 3400\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{6} + 2800\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{4} + 3\,600\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{2}$$

donde i es la tasa anual de interés.

La ecuación de valor anterior se puede resolver mediante métodos analíticos; sin embargo, resulta más sencillo resolverla mediante prueba y error, o bien mediante una calculadora programable o una financiera.

El valor de i que satisface a la ecuación de valor es:

$$i = 0.14 = 14\% \text{ anual capitalizable cada mes}$$

Valor obtenido por medio de una calculadora programable.

La mayor parte de las anualidades variables son del tipo creciente o decreciente y los aumentos o disminuciones se llevan a cabo de una manera constante.

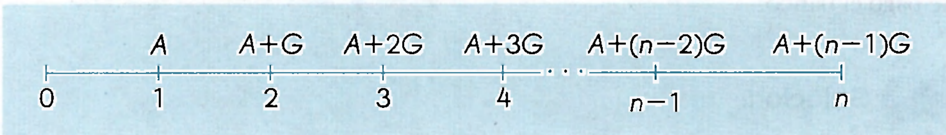
Una **serie de gradiente** es una serie de pagos hechos a intervalos iguales de tiempo y que aumentan o disminuyen de acuerdo a una regla establecida. La cantidad constante de aumento o disminución recibe el nombre de **gradiente** y la cantidad usada como inicio de la serie recibe el nombre de **base**.

Se considera dos clases de gradientes: el **gradiente aritmético** o **lineal** y el **gradiente geométrico**.

Gradiente aritmético

En el gradiente aritmético los pagos varían en **sucesión aritmética**; esto es, cada pago es igual al interior, más o menos una cantidad constante. Si la cantidad constante es positiva, los pagos son crecientes; si la cantidad constante es negativa, los pagos son decrecientes.

A continuación se muestra el diagrama de tiempo para un gradiente aritmético.



En este diagrama A es la base y G es el gradiente aritmético.

Sea P el valor presente de la serie de gradiente anterior. Si se toma como fecha focal el momento actual, se tiene:

$$P = A(1+i)^{-1} + (A+G)(1+i)^{-2} + (A+2G)(1+i)^{-3} + \ldots + [A+(n-1)G](1+i)^{-n}$$

Donde i es la tasa de interés por periodo. La igualdad anterior se puede escribir como:

$$P = A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + G(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + 2G(1+i)^{-3} + \ldots + A(1+i)^{-n} + (n-1)G(1+i)^{-n}$$

Reacomodando términos, se tiene:

$$P = [A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + \ldots + A(1+i)^{-n}] + [G(1+i)^{-2} + 2G(1+i)^{-3} + \ldots + (n-1)G(1+i)^{-n}]$$

El primer corchete de la igualdad anterior es el valor presente de una anualidad vencida. Por tanto:

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + [G(1+i)^{-2} + 2G(1+i)^{-3} + \ldots + (n-1)G(1+i)^{-n}]$$

Sacando a G como factor común:

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + G[(1+i)^{-2} + 2(1+i)^{-3} + \ldots + (n-1)(1+i)^{-n}] \quad (1)$$

Sea:

$$L = (1+i)^{-2} + 2(1+i)^{-3} + \ldots + (n-1)(1+i)^{-n}$$

Al resolver la suma anterior se tiene:

$$L = \frac{1}{i^2}\left[1 - \frac{(1+ni)}{(1+i)^n}\right] \quad (2)$$

Sustituyendo la expresión (2) en la ecuación (1) se tiene:

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{G}{i^2}\left[1 - \frac{(1+ni)}{(1+i)^n}\right] \quad (8.3)$$

La ecuación (8.3) es la fórmula general para obtener el valor presente de una serie de gradiente aritmético.

Para calcular el valor futuro de la serie de gradiente aritmético se utiliza la fórmula del interés compuesto:

$$F = P(1+i)^n$$

Donde P es sustituida por la ecuación (8.3):

$$F = \left\{A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{G}{i^2}\left[1 - \frac{(1+ni)}{(1+i)^n}\right]\right\}(1+i)^n$$

Es decir,

$$F = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^n + \frac{G}{i^2}\left[1 - \frac{(1+ni)}{(1+i)^n}\right](1+i)^n$$

Simplificando la expresión anterior,

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{G}{i^2}[(1+i)^n - (1+ni)] \quad (8.4)$$

Ejemplo 8.12

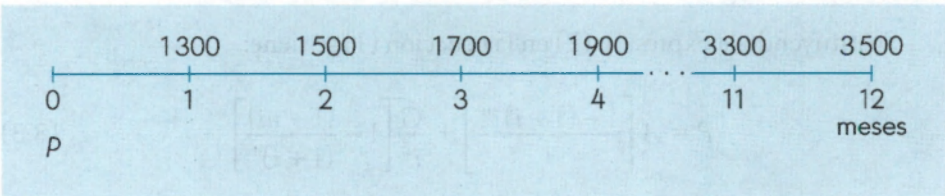
Guillermo pide prestada cierta cantidad de dinero y firma un contrato-pagaré en el que se estipula la obligación de pagar en un año con pagos mensuales vencidos y una tasa de interés de 30% anual con capitalización mensual. Si el primer pago mensual es por $1 300 y los pagos sucesivos aumentarán $200 cada mes, encuentre la cantidad de dinero que Guillermo pidió prestada. ¿Cuánto se paga por intereses?

Solución:

El valor del pago número 12 se obtiene utilizando la ecuación (3.1):

$$a_{12} = 1300 + (12 - 1)(200) = 3\,500$$

Por tanto, el diagrama de tiempo es el siguiente:



En este problema los pagos forman una progresión aritmética, donde la base es $1 300 y el gradiente es igual a $200. Esto es:

$A = 1300$

$G = 200$

$n = 12$

$i = 30\%$ anual $= 2.5\%$ mensual

Sustituyendo estos valores numéricos en la ecuación (8.3), se tiene:

$$P = 1300\left[\frac{1-(1+0.025)^{-12}}{0.025}\right] + \frac{200}{(0.025)^2}\left[1 - \frac{1+(12)(0.025)}{(1+0.025)^{12}}\right]$$

$$P = \$24\,015.85$$

Los intereses son la diferencia entre el total pagado y la cantidad prestada. El total pagado es la suma de una sucesión aritmética, esto es:

$$1\,300 + 1\,500 + 1\,700 + \ldots + 3\,500$$

El valor de la suma se obtiene utilizando la ecuación (3.2):

$$1\,300 + 1\,500 + 1\,700 + \ldots + 3\,500 = \frac{12}{2}(1\,300 + 3\,500) = \$28\,800$$

Por tanto:

$$I = 28\,800 - 24\,015.85 = \$4\,784.15$$

Ejemplo 8.13

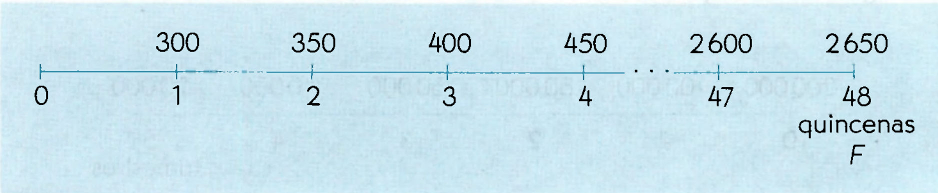
Pablo desea ahorrar cada fin de quincena \$300 durante 2 años, aumentando sus depósitos sucesivos \$50 cada quincena. Encuentre el monto y el interés ganado al cabo de dos años, si la tasa de interés es de 14.0408% capitalizable cada mes.

Solución:

Por la ecuación (3.1), se tiene:

$$\text{Depósito en la quincena número } 48 = 300 + (48 - 1)(50) = \$2\,650$$

Por tanto:



Como el periodo de capitalización no coincide con el periodo del depósito, es necesario encontrar la tasa de interés equivalente:

$$i_{eq} = \left[\left(1 + \frac{0.140408}{12}\right)^{\frac{12}{24}} - 1\right]24 = 14\% \text{ anual capitalizable quincenalmente}$$

En este ejemplo, la base es \$300 y el gradiente es \$50. Por tanto, utilizando la ecuación (8.4), se tiene:

$$F = 300\left[\frac{\left(1 + \frac{0.14}{24}\right)^{48} - 1}{\left(\frac{0.14}{24}\right)}\right] + \frac{50}{\left(\frac{0.14}{24}\right)^2}\left[\left(1 + \frac{0.14}{24}\right)^{48} - \left(1 + \frac{(48)(0.14)}{24}\right)\right]$$

$$F = \$78\,356.22$$

Para calcular la cantidad total depositada por Pablo, se utiliza la ecuación (3.2):

$$S_{48} = \frac{48}{2}(300 + 2\,650) = \$70\,800$$

Si Pablo depositó un total de \$70 800 y el monto obtenido fue de \$78 356.22, entonces el interés ganado fue

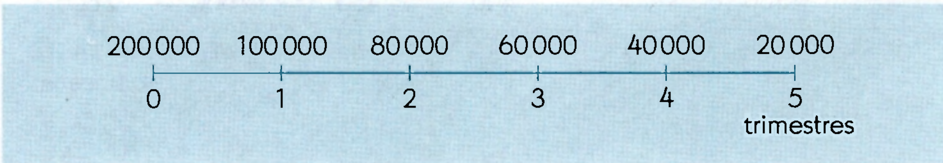
$$I = 78\,356.22 - 70\,800 = \$7\,556.22$$

Ejemplo 8.14

La compañía *Alfa & Omega, S. A.*, ha firmado un contrato según el cual tiene que hacer los siguientes pagos: \$200 000 de inmediato; \$100 000 al final del primer trimestre; \$80 000 al final del segundo; \$60 000 al final del tercero; \$40 000 al final del cuarto y \$20 000 al final del quinto trimestre. ¿Qué cantidad de dinero debe invertir la compañía en un fondo especial que gana 12% capitalizable en forma trimestral, para hacer los pagos indicados?

Solución:

El diagrama de tiempo es:



En este caso los flujos de efectivo decrecen en forma aritmética, por tanto,

$A = 100\,000$

$G = -20\,000$

$n = 5$

$i = 12\%$ anual $= 3\%$ trimestral

Sustituyendo los datos en la ecuación (8.3), se tiene:

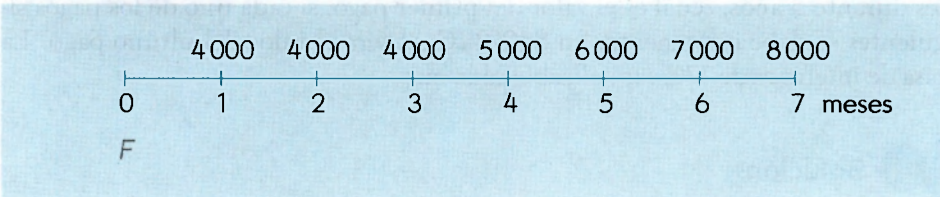
$$P = 100\,000\left[\frac{1-(1+0.03)^{-5}}{0.03}\right] + \frac{-20\,000}{(0.03)^2}\left[1 - \frac{1+(5)(0.03)}{(1+0.03)^5}\right]$$

$$P = \$280\,195.21$$

La cantidad de dinero que debe invertirse es de \$280 195.21. Esta cantidad no toma en cuenta el pago inmediato de \$200 000.

Ejemplo 8.15

Determine el valor futuro de la siguiente serie de gradiente.



i = 18% anual capitalizable cada mes

Solución:

En este problema el inicio de la serie de gradiente se encuentra al final del periodo 2 y los pagos de \$4 000 que se encuentran al final de los periodos 1 y 2 forman una anualidad vencida. Por tanto, el problema se resuelve en dos partes.

Parte 1. Cálculo del valor futuro de la anualidad ordinaria.

$$F_1 = 4000\left[\frac{\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^2 - 1}{\left(\frac{0.18}{12}\right)}\right]\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^5$$

$$F_1 = \$8\,682.91$$

Parte 2. Cálculo del valor futuro de la serie de gradiente.

$$F_2 = 4000\left[\frac{\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^5 - 1}{\left(\frac{0.18}{12}\right)}\right] + \frac{1000}{\left(\frac{0.18}{12}\right)^2}\left[\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^5 - \left(1+\frac{(5)(0.18)}{12}\right)\right]$$

$$F_2 = \$30\,760.20$$

Por tanto:

$$F = F_1 + F_2 = \$39\,443.11$$

Ejemplo 8.16

Sergio desea comprar un terreno que tiene un precio de contado de \$195500. Si paga \$25 000 de enganche y el resto lo va a pagar mediante abonos mensuales durante 5 años, ¿cuál es el valor del primer pago, si cada uno de los pagos siguientes se debe incrementar en \$100? ¿Cuál será el valor del último pago? La tasa de interés es de 17% capitalizable cada mes.

Solución:

$$170500 = A\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.17}{12}\right)^{-60}}{\left(\frac{0.17}{12}\right)}\right] + \frac{100}{\left(\frac{0.17}{12}\right)^2}\left[1-\frac{1+\frac{(60)(0.17)}{12}}{\left(1+\frac{0.17}{12}\right)^{60}}\right]$$

$$170\,500 = 40.23727798A + 101\,922.1007$$

$$A = \$1704.34$$

El valor del último pago se obtiene mediante la ecuación (3.1):

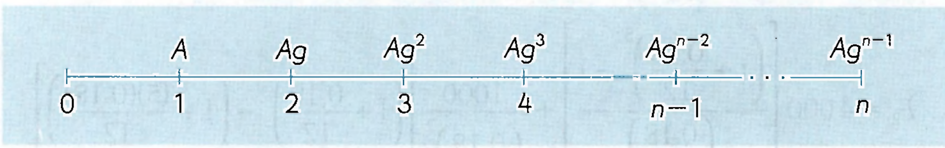
$$a_{60} = 1704.34 + (60-1)(100) = \$7604.34$$

Gradiente geométrico

En una serie de gradiente geométrico los pagos varían en **sucesión geométrica**; esto es, cada pago es igual al anterior multiplicado por una constante g, llamada **gradiente geométrico**.

Si $g > 0$, la serie de gradiente será creciente, si $g < 0$, la serie de gradiente será decreciente.

En seguida se muestra el diagrama de tiempo para un gradiente geométrico:



donde A es la base.

Sea P el valor presente de la serie de gradiente anterior. Si se toma como fecha focal el momento actual, entonces:

$$P = A(1+i)^{-1} + Ag(1+i)^{-2} + Ag^2(1+i)^{-3} + \ldots + Ag^{n-1}(1+i)^{-n}$$

donde i es la tasa de interés por periodo.

Factorizando la expresión anterior, se tiene:

$$P = A[(1+i)^{-1} + g(1+i)^{-2} + g^2(1+i)^{-3} + \ldots + g^{n-1}(1+i)^{-n}]$$

La expresión entre corchetes es una serie geométrica, cuya razón común es $g(1+i)^{-1}$. Por la ecuación (3.4) se tiene:

$$(1+i)^{-1}+g(1+i)^{-2}+g^2(1+i)^{-3}+\ldots+g^{n-1}(1+i)^{-n} = \frac{(1+i)^{-1}[g^n(1+i)^{-n}-1]}{g(1+i)^{-1}-1}$$

Simplificando la expresión anterior:

$$(1+i)^{-1}+g(1+i)^{-2}+g^2(1+i)^{-3}+\ldots+g^{n-1}(1+i)^{-n} = \left[\frac{g^n(1+i)^{-n}-1}{g-(1+i)}\right]$$

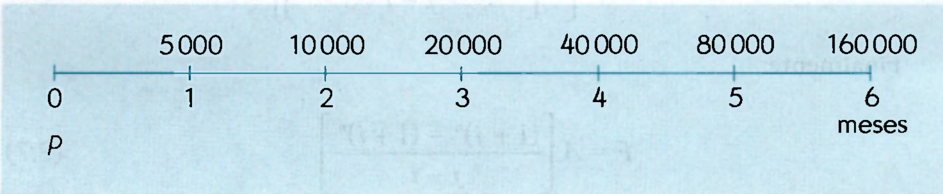
Por tanto, el valor presente de la serie de gradiente geométrico lo da:

$$P = A\left[\frac{g^n(1+i)^{-n}-1}{g-(1+i)}\right] \tag{8.5}$$

Ejemplo 8.17

¿Por qué cantidad fue el crédito para la compra de una máquina, si ésta se amortiza mediante 6 pagos mensuales a una tasa de interés de 26% capitalizable cada mes? El primer pago es por $5 000, el segundo pago es el doble del primero, el tercer pago es el doble del segundo, etcétera.

Solución:



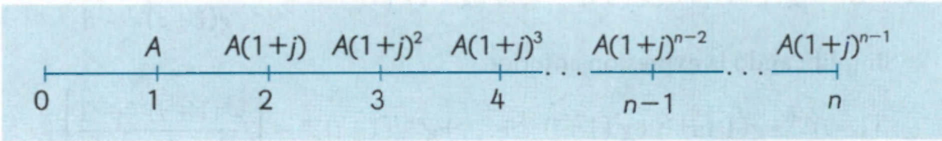
En este caso se tiene una serie de gradiente geométrico, donde $A = \$5\,000$ y $g = 2$. De acuerdo con la ecuación (8.5), se tiene:

$$P = 5\,000\left[\frac{2^5\left(1+\frac{0.26}{12}\right)^{-6}-1}{2-\left(1+\frac{0.26}{12}\right)}\right]$$

$$P = \$282\,501.78$$

La situación más común que se presenta en las series de gradiente geométrico es que el gradiente sea un porcentaje fijo. En este caso, cada pago es igual al anterior multiplicado por la constante $(1 + j)$, donde j es el gradiente en porcentaje, expresado en forma decimal.

Para esta situación, el diagrama de tiempo es el siguiente:



El valor presente de la serie anterior, se obtiene sustituyendo g por $(1 + j)$ en la ecuación (8.5). Esto es:

$$P = A\left[\frac{g^n(1+i)^{-n} - 1}{g-(1+i)}\right] = A\left[\frac{(1+j)^n(1+i)^{-n} - 1}{(1+j)-(1+i)}\right]$$

Por tanto:

$$P = A\left[\frac{(1+j)^n(1+i)^{-n} - 1}{j-i}\right] \tag{8.6}$$

El valor futuro se obtiene sustituyendo la ecuación (8.6) en la fórmula del interés compuesto; es decir:

$$F = P(1+i)^n = \left\{A\left[\frac{(1+j)^n(1+i)^{-n} - 1}{j-i}\right]\right\}(1+i)^n$$

Finalmente:

$$F = A\left[\frac{(1+j)^n - (1+i)^n}{j-i}\right] \tag{8.7}$$

Ejemplo 8.18

Un padre de familia ha destinado cierta cantidad de dinero para que su hijo estudie una carrera universitaria que dura 9 semestres y, debido a la inflación, la colegiatura aumenta 3.5% semestral. Si el padre deposita el dinero en una cuenta bancaria que paga 10% capitalizable cada semestre, ¿qué cantidad de dinero tendrá que depositar en la cuenta, si la colegiatura correspondiente al primer semestre es de \$24 870?

Solución:

Los datos son los siguientes:

$A = 24\,870$

$j - 3.5\%$ semestral

$n = 9$

$i = \frac{10}{2}\%$ semestral $= 5\%$ semestral

Sustituyendo los datos en la ecuación (8.6), se tiene:

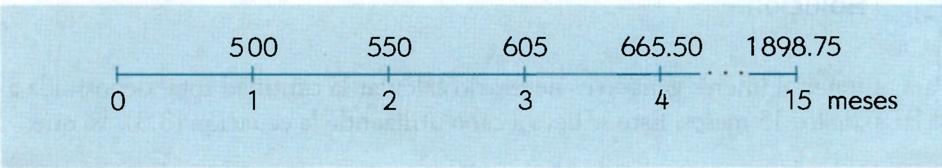
$$P = 24\,870\left[\frac{(1+0.035)^9(1+0.05)^{-9}-1}{0.035-0.05}\right]$$

$$P = \$201\,387.67$$

El padre de familia tiene que depositar $201 387.67 en este momento; con ese dinero se pagará la colegiatura de los próximos 9 semestres.

Ejemplo (8.19)

Encuentre el monto de la siguiente serie de gradiente geométrico.



$i = 16\%$ capitalizable cada mes

Solución:

Se identifica una serie de gradiente geométrico si el cociente entre dos pagos sucesivos cualesquiera es constante.

$$\frac{550}{500} = \frac{605}{550} = \frac{665.50}{605} = 1.1$$

Por tanto,

$$g = (1 + j) = 1.1$$

Entonces,

$$j = 0.10 = 10\%$$

Esto significa que cada pago es igual al anterior incrementado en 10%.

En este ejemplo se tienen los siguientes datos:

$A = 50$

$j = 10\%$ mensual

$n = 15$

$i = \frac{16}{12}\%$ mensual

Sustituyendo los datos en la ecuación (8.7), se tiene:

$$F = 500\left[\frac{(1+0.10)^{15} - \left(1+\frac{0.16}{12}\right)^{15}}{0.10 - \frac{0.16}{12}}\right]$$

$$F = \$17\,062.26$$

Ejemplo 8.20

Encuentre el interés ganado en el ejemplo anterior.

Solución:

Para obtener el interés ganado es necesario calcular la cantidad total depositada a lo largo de los 15 meses. Esto se lleva a cabo utilizando la ecuación (3.3), así que:

$$S_{15} = \frac{500\,(1 - 1.1^{15})}{1 - 1.1} = \$15\,886.24$$

Se depositó un total de \$15 886.24 y el monto fue de \$17 062.26; por tanto, el interés ganado fue:

$$I = 17\,062.26 - 15\,886.24 = \$1\,176.02$$

Ejemplo 8.21

Un banco le presta a un cliente \$560 000 con un interés de 21% capitalizable cada mes. El deudor tiene un plazo de 5 años para liquidar la deuda. Si el primer pago vence dentro de un mes y de ahí en adelante cada pago aumenta 2%, ¿cuál debe ser el valor del primer pago mensual? Elabore los primeros ocho renglones de la tabla de amortización.

Solución:

A	$A(1.02)$	$A(1.02)^2$	$A(1.02)^3$	...	$A(1.02)^{59}$	
0	1	2	3	4	60	meses

560 000

$$A = \frac{P(j-i)}{(1+j)^n(1+i)^{-n} - 1} = \frac{(560\,000)\left(0.02 - \dfrac{0.21}{12}\right)}{(1+.02)^{60}\left(1+\dfrac{0.21}{12}\right)^{-60} - 1}$$

$$A = \$8\,825.50$$

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$560 000.00
1	$ −974.50	$9 800.00	$ 8825.50	$ 560 974.50
2	$ −815.04	$ 9 817.05	$ 9 002.01	$ 561 789.54
3	$ −649.27	$ 9 831.32	$ 9 182.05	$ 562 438.81
4	$ −476.99	$9 842.68	$ 9 365.69	$ 562 915.80
5	$ −298.02	$ 9 851.03	$ 9 553.01	$ 563 213.82
6	$ −112.17	$9 856.24	$ 9744.07	$563 325.99
7	$ 80.75	$9 858.20	$ 9 938.95	$ 563 245.24
8	$ 280.94	$9 856.79	$ 10 137.73	$562 964.30

Note el lector que las primeras seis amortizaciones son negativas; esto es, la deuda crece debido a que los intereses mensuales son mayores al abono. A partir del mes siete, comienza a reducirse la deuda.

Ejercicios 8.3

1. Un comerciante renta por 5 años una bodega. El contrato de arrendamiento estipula que durante el primer año se pagará una renta semestral anticipada de $96 000; el segundo año la renta semestral anticipada será de $110 400; el tercer año será de $123 000 cada semestre anticipado y en el cuarto y quinto años será de $133 800 semestrales. Si el costo promedio del dinero es de 2% mensual capitalizable cada semestre, encuentre el valor presente de la renta de la bodega.

2. Al final de cada bimestre, una persona depositará una cantidad diferente de dinero en una cuenta de ahorro que paga 10.95% anual capitalizable cada mes. ¿Qué cantidad habrá en la cuenta al cabo de un año si los depósitos bimestrales serán los siguientes? ¿Cuál fue el interés ganado?

Bimestre	Cantidad a depositar
1	\$9 000
2	\$7 500
3	\$5 000
4	\$8 000
5	\$6 000
6	\$8 000

3. La compañía *HT&T* tiene establecido un fondo de jubilación para sus empleados. Si un empleado se jubila en este momento, la compañía le dará su fondo de jubilación en 6 pagos anuales anticipados, como sigue:

Número de pago	Cantidad a recibir
1	\$120 000
2	\$132 000
3	\$145 200
4	\$159 720
5	\$175 692
6	\$193 261

Si el fondo gana 12.2842% capitalizable cada mes, encuentre el valor presente.

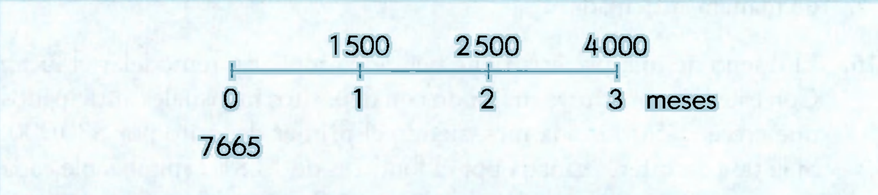
4. Gloria deposita \$4 000 en una cuenta de ahorro que paga 9% capitalizable cada mes. Al cabo de 3 meses deposita \$6 000; 3 meses más tarde deposita \$9 000 y 3 meses después retira el monto obtenido y lo transfiere a un fondo de inversión que paga 10.21% capitalizable diariamente. ¿Cuánto dinero habrá en el fondo al cabo de un año?

5. Pablo pide \$12 500 prestados y acuerda pagar una tasa de interés de 1.92% mensual capitalizable cada mes. Al cabo de tres meses da un abono de \$4 800 y dos meses después otro de \$3 600. Si Pablo desea liquidar su adeudo dos meses después de hecho el último abono, ¿cuál será la cantidad a pagar? Elabore la tabla de amortización.

6. Gustavo depositó \$4 200 al final de cada mes durante 4 meses en un fondo de ahorro que tenía inicialmente \$11 000. Al finalizar el quinto mes hizo un retiro y al concluir el sexto mes depositó \$3 000. Si al

final del séptimo mes depositó $5 300, ¿qué cantidad retiró al terminar el quinto mes, si el monto al finalizar el octavo mes fue de $22486.15? Suponga una tasa de interés de 11% capitalizable cada mes.

7. Utilice el siguiente diagrama de tiempo para calcular la tasa de interés anual capitalizable cada mes.



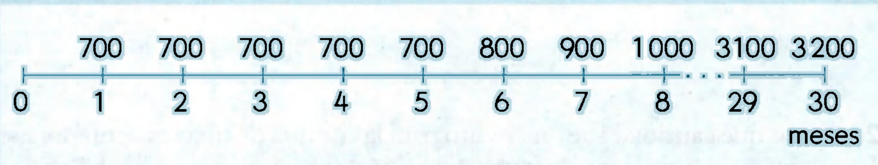
8. El costo de mantenimiento de una máquina al final del primer año de trabajo fue de $84 000. Si este costo se incrementa en $25 000 cada año, durante la vida útil del equipo, que es de 12 años, determine el valor presente de los costos de mantenimiento. Utilice una tasa de interés de 13.6% anual capitalizable cada año.

9. ¿Cuál fue la cantidad otorgada en préstamo para la compra de un automóvil, si el dinero se pagó con 36 abonos mensuales vencidos y se utilizó una tasa de interés de 18% capitalizable cada mes? El primer abono fue por $1300 y aumenta sucesivamente en $250. ¿Cuánto se paga de interés?

10. ¿Cuánto dinero deberá depositarse inicialmente en una cuenta de ahorros que paga 11% anual con capitalización trimestral, para producir lo suficiente para efectuar 20 retiros semestrales vencidos que comienzan con $10 000 y disminuyen $600 cada semestre?

11. El gerente de producción de una aceitera está pensando en comprar una máquina que cuesta $387 000 y tiene una vida útil de 10 años. El mantenimiento de la máquina costará $10 000 los primeros tres semestres; $13 500 el cuarto; $17 000 el quinto; $20 500 el sexto; etc. Si el costo promedio del dinero es de 14% capitalizable semestralmente, ¿cuánto dinero deberá invertir la compañía en un fondo de mantenimiento para pagar los costos del servicio?

12. Encuentre el valor futuro y el interés ganado de la siguiente serie de gradiente.



i = 16% capitalizable cada mes

13. Se hacen 25 depósitos bimestrales vencidos en un fondo que paga intereses a una tasa de 11.9406% compuesto cada mes. El primer depósito es por \$2 000; el segundo por \$3 000; el tercero por \$4 000; el cuarto por \$5 000 y así sucesivamente. Calcule el monto y el interés ganado.

14. Resuelva el ejercicio anterior, si los depósitos bimestrales se llevan a cabo de manera anticipada.

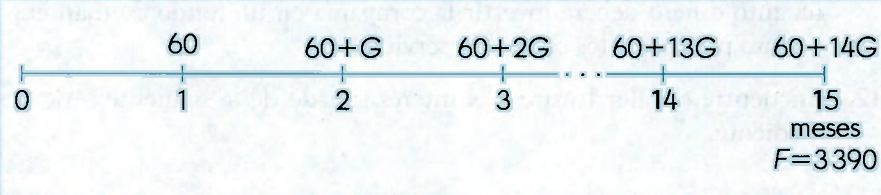
15. El dueño de una pizzería tiene pensado ampliar y remodelar el local. Con este fin, constituye un fondo con depósitos mensuales anticipados que crecen \$5 000 cada mes, siendo el primer depósito por \$30 000. Si la tasa de interés ganada por el fondo es de 13.8% capitalizable cada mes, ¿cuánto se acumula al cabo de un año?

16. Una persona desea comprar un reproductor de DVD cuyo precio de contado es de \$3 000. Lo puede adquirir sin enganche a 6 meses de plazo. Si la tasa de interés es de 33% capitalizable mensualmente, ¿cuál debe ser el valor de la primera mensualidad, si cada uno de los siguientes pagos se incrementará \$70? Elabore la tabla de amortización.

17. Una persona desea comprar una casa que cuesta \$544 640. Ofrece un pago inmediato de \$100 000 y el resto lo va a pagar mediante abonos mensuales durante 9 años. ¿Cuál debe ser el valor de los primeros cinco abonos mensuales y el valor del último abono, si cada uno de los siguientes decrece \$110? La tasa de interés es de 17% compuesto cada mes.

18. La señora Aguirre, mediante depósitos quincenales, desea acumular \$190 000 al cabo de dos años. Si la tasa de interés es de 1.1% mensual compuesto cada quincena, ¿cuál debe ser el valor del primero y el último depósito, si cada uno de los siguientes depósitos aumenta en \$150?

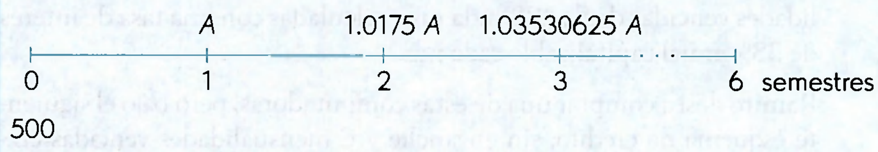
19. Encuentre el valor del gradiente de la siguiente serie.



i = 26.5% compuesto mensualmente.

20. ¿Por qué cantidad fue un crédito para la compra de una computadora, si ésta se amortiza mediante 8 abonos quincenales a una tasa de interés de 11.4% capitalizable cada quincena? El primer abono es de 10 dólares, el segundo de 20 dólares, el tercero de 40 dólares, etc. ¿Cuál es el interés pagado por disponer del crédito?

21. Suponiendo una tasa de interés de 33% compuesto cada semestre, encuentre el valor del primer pago en la siguiente serie de flujos de efectivo.



22. Guillermo planea jubilarse el próximo año, y por tal motivo está revisando su fondo de retiro personal. Con objeto de compensar los efectos de la inflación piensa retirar \$5 000 al final del primer mes y aumentar la cantidad que retira 0.5% cada uno de los siguientes meses, durante 15 años. ¿Cuánto dinero deberá tener en el fondo de retiro al principio de su jubilación, si el dinero está invertido a 12% compuesto cada mes?

23. Daniel compra a crédito un equipo de aire acondicionado que vale \$7 800 de contado. El pago del equipo se realiza mediante 16 abonos mensuales que aumentan 10% sucesivamente. Si la tasa de interés es de 28% capitalizable mensualmente,

a) ¿De cuánto será el primero y el último abono?

b) ¿Cuál es el interés a pagar por utilizar el crédito?

24. Construya la tabla de amortización para una deuda de \$250 000 que se va a liquidar mediante 8 pagos mensuales, con un interés de 28% capitalizable cada mes, si los pagos se incrementan 8.5% mensual.

25. ¿Cuánto se acumula en un fondo de ahorro con 24 depósitos bimestrales anticipados que crecen a una tasa de 15%, si el primero es de \$1 000 y la tasa de interés de 1.54% bimestral capitalizable cada bimestre?

26. Una imprenta se vende en \$847 975. El comprador da un enganche de \$100 000 y se compromete a pagar el saldo en 3 años, con pagos mensuales que crecen 5%, siendo el primer pago por \$12 200. Si la tasa de interés es de 24% capitalizable cada mes, determine el número de pagos mensuales que es necesario efectuar.

27. ¿Cuántos depósitos quincenales vencidos serán necesarios para acumular \$100 000, si el primer depósito será de \$2 500 y los depósitos siguientes crecerán en 3%? La tasa de interés es de 14% anual convertible quincenalmente.

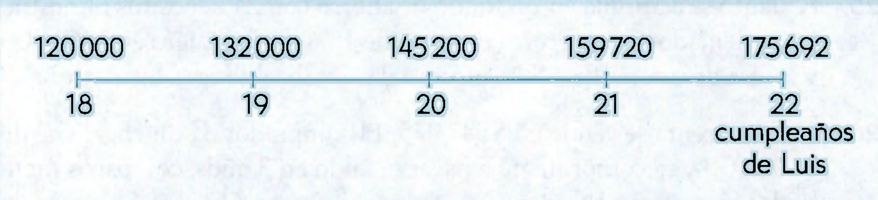
28. Se compra un proyector de $21 000, con abonos quincenales que aumentan 12% sucesivamente. Si el primer abono fue de $952.60 y la tasa de interés de 28.2% capitalizable cada quincena, ¿cuántos abonos saldan la deuda?

29. Una tienda especializada en equipo de cómputo vende una computadora a crédito, bajo el siguiente sistema: sin enganche y 13 mensualidades vencidas de $1 388 cada una, calculadas con una tasa de interés de 33% anual capitalizable cada mes.

Ramiro desea comprar una de estas computadoras, pero bajo el siguiente esquema de crédito: sin enganche y 6 mensualidades vencidas crecientes en progresión aritmética, siendo $500 el valor del gradiente. Si el dueño de la tienda acepta la forma de pago de Ramiro, encuentre el valor de los pagos mensuales equivalentes.

30. Un banco le presta a un empresario $1 000 000 con un interés de 22% capitalizable cada mes. El deudor tiene un plazo de 10 años para amortizar la deuda mediante pagos mensuales. El primer pago vence dentro de un mes y de ahí en adelante cada pago aumentará 2% mensual durante 10 meses, de tal manera que a partir del doceavo mes, y hasta la total liquidación de la deuda, los pagos serán iguales al pago número 11. Calcule la cantidad que se deberá pagar al final del primer mes.

31. Los padres de Luis deciden hacer depósitos anuales iguales en una cuenta bancaria y realizan el primer depósito en el quinto cumpleaños de su hijo. El último depósito será en el decimoquinto cumpleaños. El monto obtenido servirá para efectuar los retiros anuales mostrados en el siguiente diagrama de tiempo:



Si la tasa de interés anual es del 12% capitalizable cada mes,
a) ¿Qué tipo de serie forman los retiros anuales?
b) ¿Cuál es el valor del gradiente?
c) ¿En qué porcentaje aumentan los retiros anuales?
d) ¿Cuál es el valor de los depósitos anuales de los años cinco al quince, inclusive?

Ejercicios especiales

1. Deduzca la fórmula del valor futuro de una serie de gradiente geométrico, a partir de la ecuación (8.5).
2. Utilice la fórmula desarrollada en el ejercicio anterior para resolver el siguiente problema: ¿Cuánto se acumula en un año en un fondo de ahorro con depósitos mensuales vencidos que comienzan con $1000 y crecen duplicándose sucesivamente? La tasa de interés es de 13.4% compuesto cada mes.
3. Yolanda compra una casa, cuyo precio de contado es de $470000, mediante un enganche de 25% y el resto mediante un crédito hipotecario, con una tasa de interés de 17.7% capitalizable cada mes. Si el crédito es por 12 años y los abonos mensuales crecen 5% cada año, ¿cuál será el abono mensual correspondiente al primer año?
4. El señor Zárate desea comprar una videocámara digital que cuesta $11700 de contado. Como al señor Zárate no le gusta comprar a crédito, decide crear un fondo de ahorro con depósitos mensuales que se incrementan 8% cada trimestre. Si desea comprar la videocámara dentro de un año, y el fondo de ahorro gana una tasa de interés de 1% capitalizable mensualmente, ¿cuánto deberá depositar al final de cada mes, durante el año? Suponga que el precio de la videocámara será un 10% más cara debido, básicamente, a la cotización con el dólar.

Tema especial

AFORES

Los sistemas de pensiones tienen como objetivo fundamental proteger el ingreso de los trabajadores y sus familias ante los riesgos de invalidez, cesantía en edad avanzada, vejez y fallecimiento.

El antiguo sistema de pensiones que operaba en México a través del Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) se basaba en un **sistema de reparto**, el cual se caracterizaba en que las cuotas de los trabajadores en activo y de los patrones se acumulaban en una sola cuenta que se utilizaba, básicamente, para pagar las pensiones de los jubilados. Sin embargo, en 1992 el Seguro Social reconoció que este sistema iba a la quiebra, debido a que el número de pensionados aumentaba más rápido que el de trabajadores en activo. En 1950 había 67 trabajadores en activo para sostener a un pensionado; en 1997, por cada pensionado había 8 trabajadores activos. Esto significaba que para mantener las pensiones se hacía necesario aumentar cada año las cuotas que pagan los trabajadores y patrones, lo cual no sería aceptado por unos y otros.

Por otro lado, el sistema de reparto era injusto ya que un trabajador que cotizó durante 40 años, obtenía casi la misma pensión que otro que hubiera cotizado sólo 10 años. Además la pensión se calculaba tomando en cuenta los salarios de los últimos 5 años. Asimismo, si un trabajador no llegaba a cumplir con los requisitos para jubilarse, podía perder todo el dinero aportado para tal fin.

Con el fin de evitar las injusticias del sistema de reparto y los problemas que causaba, se emitió una nueva Ley del Seguro Social y se creó un nuevo sistema de jubilación basado en el ahorro individual: **Las Afore**.

¿Qué son las Afore?

A partir del 1 de julio de 1997 entra en vigor el nuevo sistema de pensiones como consecuencia de la nueva Ley del Seguro Social. En este nuevo sistema cada trabajador asegurado en el IMSS es propietario de una cuenta individual de ahorro para su retiro. En esta cuenta se acumulan las aportaciones del propio trabajador, del patrón y del gobierno.

Asimismo, se crearon empresas financieras privadas especializadas en el manejo de los ahorros de los trabajadores destinados a su jubilación, llamadas *Administradoras de Fondos para el Retiro* (Afore). Cada trabajador se puede registrar libremente en la Afore de su preferencia y, si así lo desea, podrá cambiar de Afore una vez al año.

Este nuevo sistema es transparente ya que todo trabajador conoce, en cualquier momento, cuál es el monto acumulado en su cuenta para el retiro.

¿Quiénes deben inscribirse en una Afore?

Este sistema es obligatorio para todas las personas asalariadas e inscritas en el IMSS. Una reforma a la Ley de los Sistemas de Ahorro para el Retiro recientemente aprobada, permite que cualquier trabajador independiente pueda contar con una cuenta individual en la Afore de su elección.

¿En qué benefician las Afore a la economía del país?

Este sistema, por su carácter de obligatorio, aumenta el ahorro interno y la inversión a fin de sostener el crecimiento económico del país.

¿Dónde se invierte el dinero de los trabajadores?

La administración del dinero por parte de las Afore se lleva a cabo a través de las *Sociedades de Inversión Especializadas en Fondos para el Retiro* (Siefore).

Las Siefore invierten los ahorros del trabajador en diferentes instrumentos financieros que les permiten obtener altos rendimientos. El trabajador puede elegir la Siefore de su preferencia.

Las Siefore tienen una estructura y funcionamiento parecido a los fondos de inversión que existen en las Bolsas de Valores de todo el mundo y su objetivo exclusivo es invertir los ahorros de la cuenta individual, de tal manera que se conserve el poder adquisitivo de los recursos conforme al Índice Nacional de Precios al Consumidor y genere una ganancia.

¿Quién supervisa a las Afore?

Las Afore son supervisadas por la *Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro* (CONSAR), órgano desconcentrado de la Secretaría de Hacienda.

¿Cómo elegir una Afore?

Los aspectos básicos que se deben considerar para la elección de una Afore son:

- Comisión cobrada por administrar los recursos.
- Rendimiento.
- Servicio.
- Solidez institucional.

¿Qué comisiones cobran las Afore?

Las afore son empresas privadas que cobran una comisión por el trabajo que realizan por la administración de las cuentas individuales. Existen tres tipos de comisiones:

Comisión sobre flujo. Esta comisión es un porcentaje sobre el salario base de cotización y se cobra en una sola exhibición al momento de hacer la aportación a la Afore. No aplica a la aportación que hace el gobierno ni a la cuota social.

Comisión sobre saldo. Es un porcentaje anual que se cobra sobre el saldo acumulado en la cuenta individual y se aplica mensualmente al saldo promedio de la cuenta. El saldo al que se cobra la comisión incluye las aportaciones voluntarias más el rendimiento obtenido a una fecha determinada.

Comisión sobre rendimiento real. En este caso, la Afore cobra la comisión sólo si la Siefore registra un rendimiento positivo una vez descontada la inflación. Si el rendimiento es igual o inferior a la inflación, no se efectúa ningún cargo por este concepto a la cuenta individual del trabajador.

¿Cómo se realizan las aportaciones?

Los recursos destinados al ahorro para el retiro se administran en una cuenta individual abierta a nombre del trabajador. La cuenta individual está integrada por tres subcuentas:

Subcuenta de Retiro, Cesantía en Edad Avanzada y Vejez (RCV).

Es el dinero que se acumula para la jubilación por medio de las siguientes aportaciones:

- Las aportaciones para el Retiro las realiza el patrón y son el 2% bimestral del Salario Base de Cotización (SBC).[1]
- El dinero para la cuenta individual en cuanto a Cesantía en Edad Avanzada y Vejez[2] lo aporta el patrón, el trabajador y el Gobierno Federal (aportación tripartita) y está constituido por:

Patrón:	3.150% bimestral del SBC
Trabajador:	1.125% bimestral del SBC
Gobierno Federal:	0.225% bimestral del SBC

Lo anterior hace un total del 4.5% bimestral del Salario Base de Cotización.

Adicionalmente el Gobierno Federal aporta una *Cuota Social* en las cuentas individuales de los trabajadores por cada día de salario cotizado. La Cuota Social es el 5.5% del Salario Mínimo General para el Distrito Federal, vigente el 1 de julio de 1997, el cual se actualiza trimestralmente, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre, en la misma proporción en que varíe el INPC.

Subcuenta para Vivienda. Es el dinero que se aporta con el fin de que se tenga acceso a un financiamiento para obtener una vivienda y corresponde al 5% del Salario Base de Cotización, el cual es aportado por el patrón. Este dinero es administrado por el INFONAVIT y la Afore sólo lleva el registro de dichos recursos, así como de sus intereses.

Subcuenta de Aportaciones Voluntarias. Es el dinero que aporta de manera voluntaria un trabajador a su cuenta individual. Este ahorro se puede utilizar en caso de necesidad o guardarlo para lograr una pensión mayor al

[1] El Salario Base de Cotización se integra con los pagos hechos en efectivo por cuota diaria y las gratificaciones, percepciones, alimentación, habitación, primas, comisiones, prestaciones en especie y cualquier otra cantidad o prestación que se entregue al trabajador por sus servicios.

[2] Para los efectos de la ley del IMSS, existe *cesantía en edad avanzada* cuando el asegurado quede sin trabajo remunerado después de cumplir 60 años de edad.

momento de retirarse. Cada 6 meses se podrá retirar una parte o la totalidad de estas aportaciones.

Desde agosto del año 2000, la CONSAR emitió reglas para que las Afore puedan operar Siefores especializadas en la inversión de recursos provenientes de la subcuenta de Aportaciones Voluntarias.

¿Cuándo se jubila un trabajador?

Un trabajador se puede pensionar cuando:

- Cumpla 65 años de edad y haya cotizado un mínimo de 1 250 semanas al IMSS. En este caso, puede escoger entre contratar un seguro de renta vitalicia o bien, programar su retiro en la misma Afore. Esto no impide que siga trabajando y que utilice la pensión para aumentar sus ingresos.
- Si queda cesante después de los 60 años y ha cotizado un mínimo de 1 250 semanas al IMSS, podrá optar entre contratar un seguro de renta vitalicia o programar su retiro en la misma Afore. El trabajador cesante que tenga 60 años de edad o más y no reúna las semanas de cotización que demanda la ley, podrá retirar el saldo de su cuenta individual en una sola exhibición o seguir cotizando hasta cubrir las semanas necesarias para que opere su pensión.
- Por invalidez total.
- Antes de los 65 años, si reúne un capital que le permita una pensión que sea por lo menos un 30% mayor que la pensión garantizada.

Si un trabajador no cumple con los requisitos para obtener una pensión, entonces podrá retirar su dinero en una sola exhibición.

¿Qué es el retiro programado?

Es la modalidad que ofrece la Afore de obtener una pensión fraccionando el monto total de los recursos acumulados en la cuenta individual. De esta forma, el trabajador recibirá cada mes una parte de su ahorro acumulado hasta que éste se agote. El monto dependerá de los recursos que se generaron durante su vida laboral y de la esperanza de vida del jubilado.

¿Qué es la renta vitalicia?

La otra opción que tiene un trabajador es la renta vitalicia. Este tipo de pensión consiste en que el jubilado recibe un pago periódico desde el momento de la contratación hasta su muerte. La institución encargada de hacerlo será una compañía de seguros, a la cual se le transfieren, desde la Afore, los recursos acumulados en la cuenta individual del trabajador. El monto de la pensión dependerá de la cantidad con que se contrate la renta vitalicia.

¿Qué es la pensión mínima garantizada?

Es la que ofrece el gobierno a un trabajador cuando éste reúne los requisitos para pensionarse y su saldo acumulado para el retiro no alcanza para pagarle cuando menos un salario mínimo general para el D. F. El gobierno complementará lo necesario para otorgar este salario mínimo, el cual se actualizará anualmente, en el mes de febrero, conforme al Índice Nacional de Precios al Consumidor.

¿Será suficiente el monto que obtenga un trabajador al final de su vida laboral para vivir dignamente?

Al momento de jubilarse un trabajador, teóricamente termina su vida productiva y comienza a recibir una pensión. Ésta es una renta programada que recibirá mensualmente y que proviene del fondo que acumuló durante su etapa productiva. La pensión es, simplemente, el gasto de ese fondo en forma de renta fija.

Una pregunta importante que debe hacerse todo trabajador es: ¿El monto acumulado será suficiente para mantener el nivel de vida que llevaba mientras trabajaba? La respuesta varía, pero en general, los cálculos hechos por diversos especialistas en el tema de pensiones indican que el monto obtenido será insuficiente para llevar una vida libre de preocupaciones económicas.

A continuación se analizará un ejemplo que podría dar cierta luz al respecto.

Daniel tiene 25 años de edad y empieza a trabajar formalmente como asalariado, con un salario mensual de $6 000 (salario base de cotización). Su vida laboral será de 40 años, de los 25 a los 65 años. Se tienen, además, los siguientes supuestos, con el fin de simplificar los cálculos:

- El salario de Daniel aumentará 5% anual durante toda su vida laboral.
- Se considera una tasa de inflación constante de 3% anual.
- La tasa real de interés que pagará la SIEFORE será de 6% anual.
- La AFORE cobra una comisión de 1.70% sobre flujo y se mantiene constante durante los 40 años.
- No se considera la cuota social del gobierno.
- No hay aportaciones voluntarias.

Si el salario base de cotización de Daniel es de $12 000 bimestrales ($6 000 mensuales), las aportaciones serán las siguientes:

Aportación patronal por concepto de retiro: 2.0% de $12 000 = $240

Aportación tripartita por concepto de Cesantía en Edad Avanzada y Vejez: 4.5% de $12 000 = $540

Por tanto, la cantidad total depositada en la Afore es de $780 cada bimestre.

La comisión cobrada por la Afore es:

1.7% de $12 000 = $204 cada bimestre

Por tanto, la aportación bimestral neta que se invierte en la Siefore es:

$780 − $204 = $576

Por otro lado, si la tasa real de interés es del 6% anual y la inflación es de 3% anual, entonces mediante la fórmula de Fisher, vista en la sección 5.6, se tiene la siguiente tasa efectiva

$$i_e = 9.18\% \text{ anual}$$

Utilizando la fórmula (5.4), la tasa efectiva se transforma en la siguiente tasa nominal capitalizable cada bimestre:

$$i = 8.85\% \text{ anual}$$

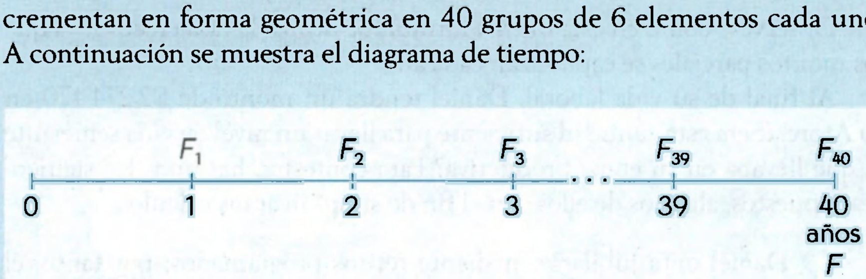
La aportación bimestral a la Afore de $576 se mantiene durante un año, ya que al siguiente ésta aumenta en un porcentaje igual al aumento de salario, esto es, un 5%. Por tanto, la aportación a la Afore durante los seis bimestres del segundo año será de:

$$(576)(1.05) = \$604.80$$

En cada uno de los seis bimestres del tercer año, se tendrá una aportación de:

$$(576)(1.05)^2 = \$635.04$$

Y así sucesivamente. Por tanto, los depósitos que se hacen a la Afore se incrementan en forma geométrica en 40 grupos de 6 elementos cada uno. A continuación se muestra el diagrama de tiempo:



Donde $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{40}$ son los montos de las aportaciones bimestrales que se mantienen constantes cada año y F es el monto final al cabo de 40 años de aportaciones, esto es 240 aportaciones bimestrales.

Como $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{40}$ son los montos de una anualidad vencida, entonces:

$$F_1 = 576\left[\frac{\left(1+\frac{0.0885}{6}\right)^6 - 1}{\left(\frac{0.0885}{6}\right)}\right] = \$3\,585.974209$$

$$F_2 = 576(1.05)\left[\frac{\left(1+\frac{0.0885}{6}\right)^6 - 1}{\left(\frac{0.0885}{6}\right)}\right] = \$3\,585.974209(1.05)$$

$$F_3 = 576(1.05)^2\left[\frac{\left(1+\frac{0.0885}{6}\right)^6 - 1}{\left(\frac{0.0885}{6}\right)}\right] = \$3\,585.974209(1.05)^2$$

Y así sucesivamente hasta llegar a:

$$F_{40} = 576(1.05)^{39}\left[\frac{\left(1+\frac{0.0885}{6}\right)^6 - 1}{\left(\frac{0.0885}{6}\right)}\right] = \$3\,585.974209(1.05)^{39}$$

Como se ve, $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{40}$ forman una serie de gradiente geométrico; por tanto, por la ecuación (8.7), se tiene:

$$F = 3\,585.974209\left[\frac{(1.05)^{40} - (1.0918)^{40}}{0.05 - 0.0918}\right] = \$2\,274\,470$$

Obsérvese cómo en esta última fórmula se utilizó la tasa efectiva, ya que los montos parciales se capitalizan cada año.

Al final de su vida laboral, Daniel tendrá un monto de \$2 274 470 en su Afore. ¿Será esta cantidad suficiente para llevar un nivel de vida semejante al que llevaba en su etapa productiva? Para contestar, hagamos los siguientes supuestos, algunos de ellos con el fin de simplificar los cálculos.

- Daniel opta jubilarse mediante retiros programados; por tanto, él recibirá una cantidad mensual hasta que su fondo de retiro se agote.

- Al jubilarse una persona, su nivel de gastos no es igual al que se tiene durante la vida laboral. Por tanto, supongamos que Daniel desea obtener cada mes el 80% de su último salario mensual: esto es,

  $$\text{Último salario mensual} = 6\,000(1.05)^{39} = \$40\,228.51$$

  Por tanto,

  $$80\% \text{ del último salario mensual} = \$32\,183$$

- La tasa de inflación se considera de cero.
- La tasa de interés real que gana el fondo de pensiones es del 6% anual capitalizable cada mes.

Bajo estos supuestos, ¿cuántas mensualidades recibirá Daniel antes de que se agote el fondo? La respuesta se obtiene al resolver la siguiente ecuación:

$$2\,274\,470 = 32\,183\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{-n}}{\left(\frac{0.06}{12}\right)}\right]$$

Por tanto,

$$n = 87 \text{ pagos mensuales}$$

El dinero del fondo de retiro se agota en aproximadamente 7 años y 4 meses. Si Daniel no muere en ese intervalo de tiempo, ¿cómo le hará para vivir? ¿Buscará trabajo?

Según el *Consejo Nacional de Población* (CONAPO), en un informe presentado el 21 de julio del 2003, la esperanza de vida promedio de un mexicano, es de 75 años. Sin embargo, supongamos que Daniel no quiere correr un riesgo de sobrevivencia, es decir que su fondo de retiro se agote y él continúe con vida. Por tal motivo, él supone una esperanza de vida de 85 años; esto es, 20 años para agotar su fondo de retiro. En este caso, ¿cuánto dinero puede recibir cada mes?

$$2\,274\,470 = A\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{-240}}{\left(\frac{0.06}{12}\right)}\right]$$

$$A = \$16\,295$$

Esta cantidad es, aproximadamente, el 40% de su último salario mensual.

El monto acumulado en la cuenta individual de un trabajador depende, entre otros, de su salario, del número de años laborados y de la tasa real de interés. El lector puede calcular la cantidad que tendrá en su fondo de retiro, basándose en este ejemplo. Así podrá tener una idea de cómo será su calidad de vida como jubilado, en lo referente al aspecto económico.

¿Cómo lograr un retiro seguro?

Además del sistema de pensiones de las Afore, es necesario contar con un plan de ahorro voluntario, ya sea utilizando la subcuenta de ahorro voluntario de las Afore, o bien, a través de una empresa financiera especializada en planes de inversión para el retiro.

Como ejercicio, el lector puede calcular cuánto es necesario depositar en la subcuenta de ahorro voluntario para tener un monto determinado, estimando los aumentos de sueldo y una tasa de inflación.

En la página de Internet de la Consar, www.consar.gob.mx, se encuentra una pestaña titulada *Orientación al público* la cual permite acceder a la *Guía del Sistema de Pensiones para los trabajadores afiliados al IMSS* y a la *Guía práctica para elegir Afore.* Asimismo, en dicha página se encuentra la *Calculadora de Proyección de Saldos de la Cuenta Individual*, donde el lector puede hacer diversas estimaciones del monto que podría obtener al final de su vida laboral, lo cual puede ayudar para decidir cuál sería la mejor opción de Afore, tanto por sus rendimientos como por sus comisiones.

CAPÍTULO 9

Bonos y obligaciones

Objetivos

Al finalizar el estudio de este capítulo el alumno podrá:

- Explicar qué son los bonos y las obligaciones.
- Plantear y resolver problemas de obligaciones y bonos.
- Calcular las tasas de rendimiento de las obligaciones y bonos.

9.1 Introducción

Cuando una empresa privada o un gobierno necesitan dinero para financiar sus proyectos a largo plazo, y la cantidad requerida es tan elevada, que sería difícil obtenerla de un solo banco o inversionista, el problema se puede resolver emitiendo *obligaciones* o *bonos* que pueden ser comprados tanto por personas físicas como morales. La empresa o gobierno emisor de las obligaciones o bonos recolectan el dinero proveniente de los inversionistas obligándose a pagarles un interés periódico y a reintegrar el capital al cabo de cierto tiempo.

Las **obligaciones** o **bonos** se pueden definir como documentos o títulos de crédito emitidos por una empresa privada o por un gobierno, a un plazo determinado, que ganan intereses pagaderos a intervalos de tiempo perfectamente definidos.

Cuando los documentos se emiten por parte de una empresa privada, se les llama **obligaciones** o **bonos corporativos**; cuando los emite una institución gubernamental, reciben el nombre de **bonos**. Esta nomenclatura, sin embargo, no es estricta.

Los bonos y obligaciones se clasifican en **nominativos** y **al portador**. Son nominativos aquellos que tienen el nombre de su propietario, mientras que los bonos y obligaciones al portador no lo tienen.

Las obligaciones o bonos corporativos también se clasifican por el tipo de garantía que las respalda. Una **obligación fiduciaria** se refiere a aquella garantía que está constituida en un fideicomiso. La **obligación hipotecaria** es aquella que está garantizada con hipoteca sobre bienes propiedad de la empresa emisora. Una **obligación prendaria** es aquella que está garantizada por diversos bienes. La **obligación quirografaria** está garantizada por la buena reputación de la empresa emisora en cuanto a su cumplimiento con obligaciones contraídas.

Los bonos y obligaciones se emiten generalmente acompañados de **cupones** para el pago de intereses. Los cupones son pagarés que están impresos en serie y unidos a la misma obligación o bono, y cada uno tiene impresa la fecha de su vencimiento. Para cobrar el interés ganado en un determinado periodo, el tenedor de la obligación o bono desprende el cupón correspondiente y lo presenta al banco para su cobro. Algunos bonos y obligaciones no pagan intereses periódicamente, carecen de cupones; en este caso el interés generado se capitaliza y se paga al vencimiento de la obligación o bono. Asimismo, existen bonos y obligaciones que no pagan intereses en absoluto debido a que se venden en una cantidad inferior a su valor nominal; es decir, se venden aplicando una tasa de descuento. Este tipo de obligaciones o bonos se llaman *obligaciones* o *bonos de cupón cero*.

Las partes esenciales de una obligación o bono son:

- *Fecha de emisión:* es aquella en la cual la empresa emisora coloca en el mercado de valores sus obligaciones o bonos.

- *Valor nominal:* es el valor marcado en el documento y constituye el capital que el inversionista inicial proporciona al emisor del mismo, excepto cuando el documento es colocado con descuento.
- *Valor de redención:* es la cantidad que el emisor de la obligación o bono tendrá que entregar al tenedor (inversionista) del documento al concluir el plazo estipulado para la vigencia de la emisión.

Cuando el valor de redención es igual al valor nominal, se dice que la obligación o bono se *redime a la par*. Se tiene una emisión *bajo la par* o *con descuento* cuando el valor de redención es menor que el valor nominal. Cuando el valor de redención es mayor que el valor nominal, la emisión se redime *sobre la par* o *con premio.*

La redención de una obligación o bono se lleva a cabo en la **fecha de vencimiento,** llamada también **fecha de redención,** la cual está estipulada en la obligación o bono. Sin embargo, el emisor tiene la opción de redimir una obligación o bono antes de su fecha de vencimiento. Para que esto se pueda llevar a cabo, es necesario que el documento contenga una cláusula de **redención anticipada.**

Las ventajas que logra el emisor al redimir anticipadamente una obligación o bono son varias. Por ejemplo, si las tasas de interés bajan, la cláusula de redención anticipada permite a la empresa emisora retirar las obligaciones o bonos que están en circulación en este momento, reemplazándolas por obligaciones o bonos que paguen una tasa de interés más baja.

Es común que el tenedor de una obligación o bono lo transfiera (lo venda) a otro inversionista antes de la fecha de vencimiento. Cuando esto ocurre, la obligación o bono se puede transferir a *la par* (si el precio de compraventa de la obligación o bono es igual al de redención), *bajo la par* (cuando el precio de compraventa es menor que el de redención) o *sobre la par* (si el precio de compraventa es mayor que el de redención).

- *Tasa de interés nominal:* es la tasa utilizada por el emisor de la obligación o bono para el pago de los intereses, también se conoce como **tasa de cupón.**

Dependiendo de las características del mercado financiero, la tasa de interés puede ser:

- *Fija:* en este caso la tasa de interés no varía con respecto a las condiciones del mercado. La tasa es establecida al momento de la emisión y está vigente durante la vida de la obligación o bono. Este tipo de obligaciones o bonos protegen al inversionista contra una caída en las tasas de interés.
- *Variable:* en este caso los intereses son ajustados periódicamente para reflejar las condiciones del mercado prevalecientes en ese momento y están ligados a una tasa de referencia como pueden ser Cetes, TIIE, etc. Esta obligación o bono protege al inversionista contra alzas en las tasas de interés.

- *Real:* el valor nominal se ajusta periódicamente con la inflación y sobre este valor ajustado se calculan los intereses con la tasa de cupón pactada al momento de la emisión. Este tipo de bono protege al inversionista contra la pérdida de poder adquisitivo de su inversión.

Ejemplo 9.1

¿Qué significa la expresión: *un bono con valor nominal de $100 se redime a $108*?

Solución:

Significa que el valor de redención del bono será de 108% de su valor nominal. Esto es

$$108\% \text{ de } 100 = (1.08)(100) = \$108$$

En este caso el bono se redime con premio o *sobre la par*. También se puede decir que el bono se redime a 8% más de su valor nominal.

Ejemplo 9.2

Los dueños de una fábrica de ropa están planeando la expansión de su negocio. Por tal motivo emiten obligaciones con valor nominal de $100 cada una, con el fin de financiar el proyecto de inversión. Las obligaciones vencerán a la par dentro de 10 años y pagarán un interés trimestral de 15% anual.

El señor Jiménez compró una obligación[1] a través de su agente de bolsa por $90. ¿A qué pagos tiene derecho el señor Jiménez? ¿Cuál será el interés total que recibirá por su inversión?

Solución:

El señor Jiménez recibirá $100 en la fecha de vencimiento (o redención) de la obligación; esto es dentro de 10 años. Además, recibirá cada 3 meses el interés del cupón correspondiente, el cual tiene un valor de

$$I = (100)\left(\frac{0.15}{12}\right)(3) = \$3.75$$

[1] Aunque en teoría es posible la compra de una sola obligación, en la práctica existe un mínimo de compra. La cantidad mínima es establecida por cada casa de bolsa o institución bancaria.

La obligación se compró con descuento (*bajo la par*), debido a que se pagó por ella una cantidad inferior a su valor nominal. Esto hace que la rentabilidad de la inversión sea mayor a 15% anual.

Como en 10 años hay 40 periodos trimestrales, el interés total ganado por el inversionista es:

$$(\$3.75/\text{cupón})(40 \text{ cupones}) = \$150$$

Ejercicios 9.1

1. ¿Cuál es el objetivo de emitir obligaciones por parte de una empresa?
2. ¿Qué es un cupón?
3. Cuando se dice que un bono con valor nominal de $100 se redime a 98, ¿qué se está indicando?
4. Determine el valor de redención de una obligación con valor nominal de $250 que se redime a 114.57.
5. ¿Cuál es el significado de la expresión: *una obligación con valor nominal de $1 000 que se redime a la par, se compra a 94*?
6. Determine el valor de vencimiento de una obligación con valor nominal de $500 que se redime:
   a) En 11% más de su valor nominal.
   b) En 8% menos de su valor nominal.
7. ¿Qué significa la expresión: *un bono con valor nominal de $500 se redime a la par*?
8. Si el pago de los intereses es cada semestre a la tasa de 8.5% anual, determine el interés que usted recibirá por periodo, si compra un bono de valor nominal de 100 dólares con vencimiento a la par a 15 años.
9. Se desea ampliar una fábrica de muebles y para financiar el proyecto se emiten obligaciones con un valor nominal de $500 cada una, pagando intereses mensuales de 15.25% anual. Si el señor Pérez invierte en la compra de 300 obligaciones, ¿a qué pagos tiene derecho si la compra de las obligaciones y el vencimiento de las mismas es a la par?
10. ¿Cuál sería el pago por intereses que recibirá la señora Hernández si compra 2 500 bonos de $100 de valor nominal, que pagan un interés semestral de 13% anual?
11. ¿A qué pagos tiene derecho una persona que compró bonos de cupón cero, si los bonos vencen dentro de 10 años y su valor nominal es de 1 000 dólares cada uno?

12. ¿En cuánto se transfiere un bono que se redime a 108, si tiene un valor nominal de $100 y se compra a 95?

13. Calcule el interés semestral que recibirá el poseedor de una obligación que se redime a 115 al cabo de 5 años, sabiendo que la tasa de interés es de 14% anual y el valor de redención es de $287.50.

9.2 Valor presente de los bonos y obligaciones

Una característica importante de los bonos y obligaciones es que pueden negociarse en el mercado de valores; es decir, pueden ser comprados y vendidos en cualquier momento, antes de la fecha de redención, por personas diferentes al beneficiario original del bono u obligación.

El precio que pagará un inversionista interesado en la compra de los títulos, llamado **precio de mercado**, podrá ser *a la par*, cuando el precio de mercado sea igual al valor de redención; *sobre la par* (con premio), si se paga un precio superior al valor de redención; *bajo la par* (con descuento), si se paga un precio menor al valor de redención.

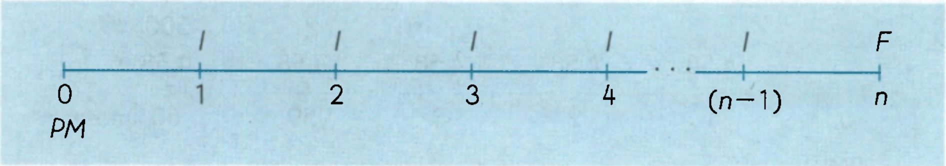
El precio que se fija para una obligación o bono depende, básicamente, de los siguientes factores:

- La tasa de interés nominal.
- La tasa de interés deseada por el inversionista.
- El tipo de garantía de la obligación o bono.
- El intervalo de tiempo para el pago de los intereses.
- El valor de redención.
- El tiempo que debe transcurrir hasta la fecha de redención.
- Las condiciones económicas prevalecientes en el país.

Con base en los factores anteriores, un inversionista interesado en la compra de bonos y obligaciones debe determinar cuánto está dispuesto a pagar por ellos.

Si *PM* es el precio de mercado de una obligación o bono, *F* es el valor de redención e *I* es el interés que recibe el inversionista en forma periódica (interés del cupón), entonces se tiene el siguiente diagrama de tiempo:

Recuerde que, si la obligación o bono se redime a la par, entonces el valor nominal es igual al valor de redención.



A partir del diagrama anterior, se ve que el precio a pagar por una obligación o bono se determina sumando el valor presente del valor de redención y el valor presente de los intereses periódicos, con base en una tasa de interés deseada por el inversionista, llamada **tasa de retorno** o **tasa de rendimiento** de la inversión. Esto es,

$$PM = F(1 + r)^{-n} + I\left[\frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}\right] \tag{9.1}$$

donde r es la tasa de rendimiento.

El interés periódico que se obtiene a través de los cupones, se calcula mediante la fórmula del interés simple, utilizando como capital el **valor nominal** de la obligación o bono.

En esta sección se resolverán ejemplos y ejercicios en los que la compraventa de bonos y obligaciones se lleva a cabo en una fecha de vencimiento de cupón, es decir, el día en que la emisora de los títulos paga los intereses correspondientes a un cupón.

Ejemplo 9.3

El señor Romo desea ganar 14% de interés capitalizable cada mes de una inversión en obligaciones. ¿Cuánto deberá pagar hoy por una obligación que tiene un valor nominal de $500, paga intereses mensuales a la tasa de 11% anual y su redención será a la par dentro de 5 años?

Solución:

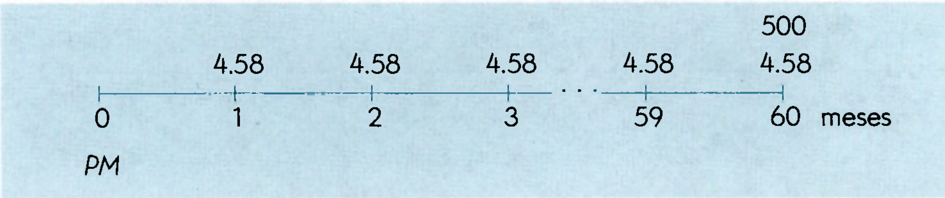
Al comprar la obligación, el señor Romo adquiere el derecho de recibir el pago mensual de los intereses y el valor de redención en la fecha de vencimiento.

El pago mensual que recibirá el señor Romo por concepto de intereses es:

$$I = (500)\left(\frac{0.11}{12}\right)(1) = \$4.58 \text{ por cada obligación}$$

El valor de redención que recibirá, al cabo de 5 años, es de $500.

Lo anterior queda mostrado en el siguiente diagrama de tiempo:



Como el señor Romo desea obtener un rendimiento de 14% capitalizable cada mes, el precio a pagar por la obligación se obtiene calculando el valor presente de los intereses mensuales, los cuales forman una anualidad vencida, más el valor presente del valor de redención (o vencimiento), ambos calculados a la tasa de 14% capitalizable cada mes.

$$PM = 500\left(1+\frac{0.14}{12}\right)^{-60} + 4.58\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.14}{12}\right)^{-60}}{\left(\frac{0.14}{12}\right)}\right]$$

$$PM = \$446.14$$

El precio que deberá pagar el señor Romo por cada obligación es de $446.14. Este precio no incluye los intereses del cupón que vence el día de la compraventa, ya que el interés de este cupón pertenece al vendedor del bono.

La ganancia obtenida por el inversionista por cada obligación es de:

$$\text{Ganancia} = \$500 + (\$4.58/\text{mes})(60 \text{ meses}) - \$446.14 = \$328.66$$

Ejemplo 9.4

Resuelva el ejemplo anterior, si las obligaciones se rediman a 115.

Solución:

Ya se mencionó que 115 significa que el valor de redención es 115% de su valor nominal, es decir, se tiene un valor de redención sobre la par.

El valor de redención es

$$F = (1.15)(500) = \$575$$

El interés mensual que se obtiene es el mismo ($4.58 por cada obligación), ya que su cálculo se basa en el valor nominal.

El precio de mercado de la obligación es

$$PM = 575\left(1+\frac{0.14}{12}\right)^{-60} + 4.58\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.14}{12}\right)^{-60}}{\left(\frac{0.14}{12}\right)}\right]$$

$$PM = \$483.53$$

Ejemplo 9.5

Una compañía emite bonos con valor de $100 cada uno, redimibles a la par a un plazo de 5 años. La tasa de interés que ofrece es de 12.8% anual pagadero cada trimestre. ¿Qué precio se debe pagar por cada bono si se adquieren un año antes del vencimiento y se desea un rendimiento de 15.6% capitalizable cada mes?

Solución:

Antes de calcular el valor de mercado del bono, es necesario obtener la tasa equivalente capitalizable trimestralmente de la tasa de rendimiento deseada. Por la ecuación (5.3), se tiene que

$$i_{eq} = \left[\left(1 + \frac{0.156}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1\right]4 = 15.8037\%$$

El interés trimestral de cada cupón es

$$I = (100)\left(\frac{0.128}{4}\right)(1) = \$3.20$$

Por tanto, el valor de compra del bono es:

$$PM = 100\left(1 + \frac{0.158037}{4}\right)^{-4} + 3.20\left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.158037}{4}\right)^{-4}}{\left(\frac{0.158037}{4}\right)}\right]$$

$$PM = \$97.27$$

Ejemplo 9.6

Editorial Escorpión, S. A., emitió obligaciones por un total de $6 000 000 las cuales devengan intereses trimestrales y vencen a la par dentro de 4 años. Determine la tasa de interés nominal o tasa de cupón, si el valor de mercado de la emisión es de $5 544 186 a la tasa de rendimiento de 15% capitalizable cada trimestre.

Solución:

Para calcular la tasa de interés nominal que ofrece el emisor de las obligaciones, es necesario obtener primero el valor de los intereses devengados por los cupones.

Si I es el interés trimestral devengado por los cupones, entonces, es posible formar la siguiente ecuación de valor:

$$5\,544\,186 = 6\,000\,000\left(1+\frac{0.15}{4}\right)^{-16} + I\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.15}{4}\right)^{-16}}{\left(\frac{0.15}{4}\right)}\right]$$

$$5\,544\,186 = 3\,329\,212.865 + 11.87016504\,I$$

$$I = 186\,600$$

Si los intereses son por \$186 500, entonces:

$$I = (6\,000\,000)\left(\frac{i}{4}\right)(1) = 186\,600$$

donde i es la tasa anual de interés nominal.

Por tanto,

$$i = \frac{(186\,600)(4)}{6\,000\,000}$$

$$i = 0.1244 = 12.44\%\text{ anual}$$

Ejercicios 9.2

1. Usted compra bonos a 7 años de plazo, con valor nominal de \$1 000 cada uno, que vencen a la par y que pagan un interés bimestral de 10% anual.
   a) ¿Qué cantidad recibirá cada bimestre por concepto de intereses, por cada bono comprado?
   b) Si usted invirtió \$640 000 en bonos, ¿qué interés bimestral recibirá?

2. Antonio compra bonos de cupón cero; es decir, que no pagan intereses periódicos, ya que son colocados entre los inversionistas con descuento. Si los bonos comprados por Antonio tienen un valor nominal de \$100 y la tasa de descuento aplicada es de 8% anual, ¿cuál es el precio a pagar por cada bono, sabiendo que vencen al cabo de tres años?

3. Encuentre el precio a pagar por una obligación con valor nominal de \$100 que se redime a la par y fue colocada en el mercado de valores con cupones mensuales al 10% anual. La obligación se compra a los dos años y medio antes de su vencimiento y se desea un rendimiento de 15% capitalizable cada mes. Calcule el interés mensual que recibirá

un inversionista que compró 5 000 obligaciones y la ganancia que se obtendrá por cada obligación comprada.

4. Una empresa paraestatal desea colocar bonos entre los inversionistas del mercado de valores, con un valor nominal de $1 000. ¿Qué precio puede pagarse por los bonos si serán redimidos en 12 años a 110, pagan intereses de 7% semestral y se desea obtener un rendimiento de 17.36% anual capitalizable cada mes? ¿La compra es bajo la par o sobre la par?

5. Un bono corporativo que paga intereses trimestrales de 15% anual es redimible a la par al cabo de 3 años. Si su valor nominal es de $1 000, calcule el precio que debe pagarse por él,
   a) si la tasa de interés vigente en el mercado es de 15% capitalizable cada trimestre.
   b) si la tasa de interés vigente en el mercado es de 20% capitalizable cada trimestre.
   c) si la tasa de interés vigente en el mercado es de 10% capitalizable cada trimestre.
   d) ¿Qué conclusiones obtiene a partir de los resultados anteriores?

6. Una empresa textil emitió hace 5 años obligaciones con valor nominal de 50 € cada una, con un plazo de redención de 15 años, liquidables a 115, y la tasa de interés fija del 8.12% anual pagadera cada semestre.
   a) ¿Cuál es el valor de redención?
   b) ¿Qué precio debe pagarse por cada obligación, si hoy es el día de pago del décimo cupón y la tasa de rendimiento deseada es del 9.2% convertible cada semestre?

7. La empresa *Mexicana de Televisión por Cable, S. A.*, efectúa una emisión de 25 000 obligaciones con valor nominal de $500 cada una y redimibles a la par. La empresa pagará los intereses mediante cupones semestrales de $27.50 por cada obligación. Si la fecha de vencimiento es dentro de 10 años y la tasa de interés vigente en el mercado es de 9.75% capitalizable cada semestre, encuentre:
   a) La tasa de interés nominal (la tasa de interés que paga la empresa emisora).
   b) El precio de mercado de una obligación.
   c) La inversión hecha por una persona que recibe $63 250 cada semestre por concepto de intereses.

8. Un inversionista compra bonos emitidos por el gobierno municipal de Zapopan, Jalisco, en $952.85 cada uno. El valor nominal del bono es de $1 000 y se redime a 112 al cabo de 5 años. Encuentre la tasa de interés del cupón mensual, sabiendo que la tasa de rendimiento es de 13% capitalizable cada mes.

9. Tres años antes de la fecha de redención, el señor Robles invirtió \$239 950 en comprar 1 000 bonos redimibles a la par. ¿Cuál es el valor nominal de cada bono si los cupones se cobran cada mes a una tasa de interés de 14.3% anual y la tasa de rendimiento es de 16% capitalizable mensulamente?

10. Una obligación quirografaria de la compañía Salomón Industries de 1 000 dólares y que devenga intereses de 9% anual vence el 15 de noviembre de 2010. El interés es pagadero los días 15 de marzo, el 15 de julio y el 15 de noviembre de cada año. Determine el precio de compra de una obligación de esta compañía para el 15 de julio de 2003, si la tasa de rendimiento deseada es de 10.365% capitalizable cada mes, sabiendo que la obligación se redime a 113.84.

11. Una obligación de *Tecnología Láser, S. A.*, con valor nominal de \$300, se negocia en \$280.49. ¿Qué tasa de interés están devengando los cupones mensuales, si la obligación se redime a la par dentro de 3 años y medio y se tiene una tasa de rendimiento de 15% capitalizable cada mes?

12. El *Banco Nacional* colocó hoy en el mercado financiero una nueva emisión de bonos por 100 millones de dólares, con un plazo de 7 años y un valor de redención de 102. Los intereses del cupón se cobrarán cada año. Encuentre la tasa de interés de la emisión si la tasa de rendimiento se desea de 8% anual capitalizable cada año y el precio de mercado de la emisión es igual a su valor nominal.

13. Una obligación de *Aceros de México* se redime a la par el 10 de agosto del año 2008. Los intereses se pagan los días 10 de febrero, 10 de mayo, 10 de agosto y 10 de noviembre a la tasa de 14% anual. Si el precio de una obligación el 10 de agosto de 2003 es de \$1 000, encuentre el valor nominal de la obligación si la tasa de rendimiento es igual a la tasa de interés de los cupones.

14. Resuelva el ejercicio anterior, si la obligación se redime a 115.

15. La compañía *Telefónica Celular de Occidente, S. A.*, lanzó una emisión de bonos a 10 años de plazo. Los bonos tendrán un rendimiento de 12% capitalizable cada semestre y los cupones se cobrarán semestralmente a una tasa de 9% anual. Si el precio de mercado del total de la emisión es de \$129 810 000 y será redimible a 112, calcule el valor nominal de la emisión.

16. Una obligación del *Grupo Industrial Delta* de valor nominal \$500 se redime a 108.50 y paga intereses de 13.85% anual en cupones trimestrales. En este momento el precio de mercado de la obligación es de \$504.04 a una tasa de rendimiento de 16% capitalizable trimestralmente. Encuentre el tiempo que falta para el vencimiento.

17. El ingeniero Rodríguez invirtió $796 575 en la compra de 750 obligaciones de una compañía minera. El valor nominal es de $1 000, se redime a la par y paga intereses de 14% anual los días 10 de marzo y 10 de septiembre. Si la tasa de rendimiento es de 12% capitalizable semestralmente, ¿cuándo tiempo falta para la redención de los títulos?

18. La compañía *Televisora del Anáhuac, S. A.*, emitió bonos con valor nominal de $500, los cuales se adquieren con un descuento de 5.23% de su valor nominal, 5 años antes de su vencimiento. Si los bonos se rediman a la par y los intereses se pagan cada bimestre, encuentre la tasa de interés nominal, suponiendo un rendimiento de 15% capitalizable bimestralmente.

9.3 Precio entre fechas de pago de cupones

Todos los ejemplos y ejercicios de la sección anterior se resolvieron bajo el supuesto de que los bonos y las obligaciones fueron comprados exactamente el día del vencimiento de un cupón. En la realidad, los bonos y las obligaciones se pueden comprar, también, entre fechas de pago de cupones. En este caso, el interés del cupón que está por vencerse pertenece, una parte de él, al vendedor de la obligación o bono y la otra pertenece al comprador. El precio que se va a pagar por una obligación o bono en estas circunstancias, llamado **precio neto**, será la suma del **precio de mercado** más la parte proporcional de los intereses del cupón que está por vencerse y que le corresponde al vendedor del título.

El *precio de mercado* es simplemente el *valor presente* de la obligación o bono en la *fecha de compra*, **sin incluir** el interés del cupón que está por vencerse. Para determinar el precio de mercado de una obligación o bono entre dos fechas de pago de cupón, se utiliza el método mostrado en el siguiente ejemplo.

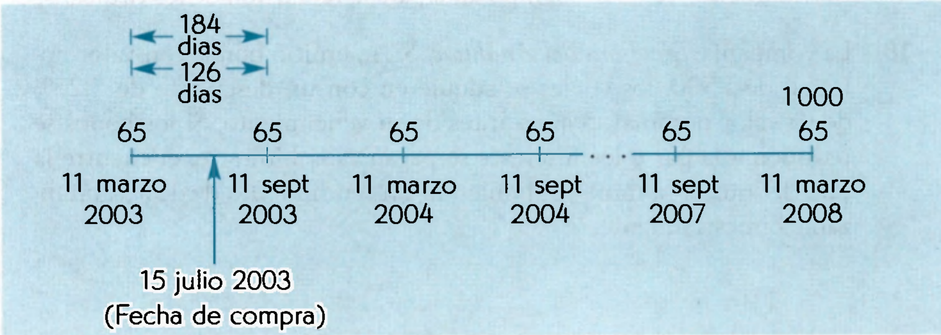
Ejemplo 9.7

Un bono con valor nominal de $1 000 y tasa de interés nominal de 13% anual pagadero el 11 de marzo y el 11 de septiembre de cada año, vence a la par el 11 de marzo de 2008. Si el bono se compra el 15 de julio de 2003, determine el precio de mercado utilizando una tasa de rendimiento de 16% anual capitalizable cada semestre.

Solución:

El interés semestral del cupón es

$$I=(1000)\left(\frac{0.13}{2}\right)(1)=\$65$$



Para calcular el precio de mercado del bono en la fecha de compra se determinan, en primer lugar, los precios de mercado del bono en las fechas de pago de cupón inmediatamente antes y después de la fecha de compra, utilizando la ecuación (9.1). Luego, se lleva a cabo una interpolación lineal entre estos dos valores para obtener el precio del bono en la fecha de compra.

Sea PM_0 el precio de mercado del bono en la fecha de cupón que se encuentra inmediatamente antes de la fecha de compra; esto es, el 11 de marzo de 2003 y sea PM_1 el precio de mercado en la fecha de cupón que se encuentra inmediatamente después de la fecha de compra, es decir el 11 de septiembre de 2003.

$$PM_0=1000\left(1+\frac{0.16}{2}\right)^{-10}+65\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.16}{2}\right)^{-10}}{\left(\frac{0.16}{2}\right)}\right]=\$899.3488$$

$$PM_1=1000\left(1+\frac{0.16}{2}\right)^{-9}+65\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.16}{2}\right)^{-9}}{\left(\frac{0.16}{2}\right)}\right]=\$906.2967$$

El precio de mercado del bono en la fecha de compra se calcula suponiendo que éste aumenta en forma lineal entre las dos fechas, lo cual no es absolutamente cierto, ya que el crecimiento en el precio es realmente exponencial debido a que la tasa de rendimiento es capitalizable. Por tanto, al suponer que el crecimiento es lineal, se puede obtener la pendiente de la línea recta, la cual representa el aumento de precio por día; esto es

$$\frac{\Delta PM}{\Delta t}=\frac{PM_1-PM_0}{t_1-t_0}=\frac{906.2967-899.3488}{184}=0.03776 \text{ pesos/dia}$$

ΔPM significa incremento en el precio de mercado y Δt es el incremento de tiempo.

Como el bono se vendió 126 días después del 11 de marzo, el precio de mercado aumenta en

$$(0.03776 \text{ pesos/día})(126 \text{ días}) = \$4.7578$$

Por tanto, el precio de mercado del bono el 15 de julio de 2003 es

$$PM = 899.3488 + 4.7578 = \$904.1066$$

El precio anterior no incluye la parte proporcional de los intereses del cupón que vence el 11 de septiembre de 2003 y que pertenecen al vendedor de la obligación.

Ejemplo 9.8

Obtenga el precio neto del bono respecto al ejemplo anterior.

Solución:

Ya se mencionó que el precio de mercado no incluye los intereses del cupón que está por vencerse. Los intereses de este cupón pertenecen en parte al vendedor del bono y en parte al comprador. Por lo anterior, el precio neto, *PN*, que pagará el comprador será la suma del precio de mercado más la parte proporcional de los intereses del cupón que está por vencerse y que pertenecen al vendedor.

Para calcular la parte proporcional del interés del cupón que vence el 11 de septiembre de 2003 y que pertenece al vendedor del bono, se lleva a cabo una proporción: si por 184 días transcurridos se reciben $65 de interés, entonces por 126 días transcurridos, ¿cuánto se recibirá de interés? La respuesta se calcula de la siguiente manera:

$$\frac{(126)(65)}{184} = \$44.5109$$

Este método de cálculo supone que el interés del cupón crece linealmente desde un valor de $0 hasta un valor de $65, en un periodo de 184 días.

El precio neto a pagar por el bono será

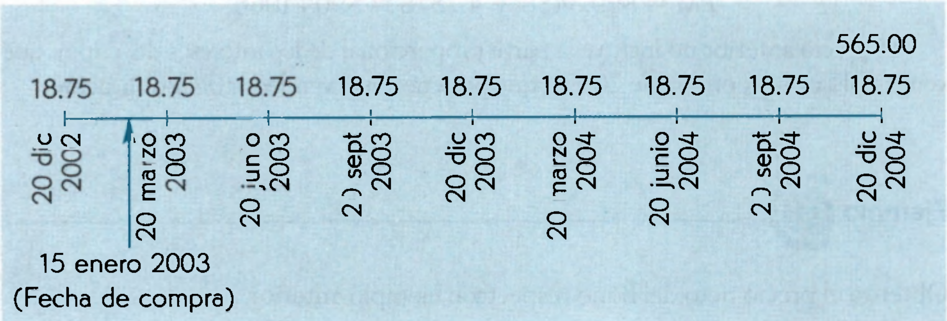
$$PN = \$904.1066 + 44.5109 = \$948.6175$$

Ejemplo 9.9

El 15 de enero de 2003 un inversionista adquiere un bono con fecha de redención 20 de diciembre de 2004. Su valor nominal es de $500 y será redimido a 113. ¿Qué precio neto debe pagar el inversionista por el bono, si la tasa del cupón es de 15% anual y los intereses se pagan cada trimestre? Suponga una tasa de rendimiento de 11.22% anual capitalizable cada trimestre.

Solución:

$$I = (500)\left(\frac{0.15}{4}\right)(1) = \$18.75$$



$$PM_0 = 565\left(1+\frac{0.1122}{4}\right)^{-8} + 18.75\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.1122}{4}\right)^{-8}}{\left(\frac{0.1122}{4}\right)}\right] = \$585.5380$$

$$PM_1 = 565\left(1+\frac{0.1122}{4}\right)^{-7} + 18.75\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.1122}{4}\right)^{-7}}{\left(\frac{0.1122}{4}\right)}\right] = \$583.2123$$

Como del 20 de diciembre de 2002 al 20 de marzo de 2003 hay 90 días, entonces la pendiente de la recta que une los dos puntos es:

$$\frac{\Delta PM}{\Delta t} = \frac{PM_1 - PM_0}{t_1 - t_0} = \frac{583.2123 - 585.5380}{90} = -0.02584 \text{ pesos/día}$$

Del 20 de diciembre de 2002 al 15 de enero de 2003 hay 26 días, por tanto, el precio de mercado del bono en la fecha de compra es:

$$PM = 585.5380 + (-0.02584)(26) = \$584.8662$$

Para calcular los intereses del cupón que vence el 20 de marzo de 2003 y que pertenecen al vendedor del bono, se tiene

$$\text{Interés correspondiente al vendedor} = \frac{(18.75)(26)}{90} = \$5.4167$$

Por tanto, el precio neto del bono es:

$$PN = \$584.8662 + 5.4167 = \$590.2829$$

Ejercicios 9.3

1. Una obligación con valor nominal de $1 000 y tasa de interés de 10% anual pagadero el 5 de junio y el 5 de diciembre de cada año, vence el 5 de diciembre de 2010 a la par. La obligación fue comprada el 5 de septiembre de 2003, con una tasa de rendimiento de 15% capitalizable cada semestre. Determine el precio de mercado y el precio neto.

2. Resuelva el ejercicio anterior si la obligación se redime a 110.50.

3. El 19 de noviembre de 2000 el Gobierno Federal emitió bonos con valor nominal de $500 que se redimen a 118, ocho años después, pagando un interés trimestral de 13.8% anual. ¿Cuánto deberá pagarse por cada bono el 22 de octubre de 2003, si se ofrecen con una tasa de rendimiento de 12.2% anual capitalizable cada trimestre?

4. Resuelva el ejercicio anterior si el bono se redime a la par.

5. Las obligaciones emitidas por la compañía *Italian Pizza* tienen un valor nominal de 1 000 dólares, pagan intereses mensuales de 8.5% anual y vencen a la par el 15 de enero de 2007. El interés es pagadero los días 15 de cada mes. Calcule el precio neto de una obligación el 23 de mayo de 2004, utilizando una tasa de rendimiento de 10.0417% anual capitalizable bimestralmente.

6. 21 meses antes de su redención, se vende una obligación con valor nominal de $300 y vencimiento a la par. ¿Cuál es su precio neto si se paga un interés de 12% pagadero cada cuatrimestre y se pretende un rendimiento de 16% capitalizable cuatrimestralmente?

7. El 11 de abril de 2003 se compra un paquete de obligaciones de la compañía *Diana Software, S. A.*, con valor nominal de $800 cada una y que se rediman a 95 el 13 de agosto de 2006. Los intereses son de 15% y se pagan los días 13 de los meses de febrero y agosto de cada año. Obtenga el precio neto de una obligación, si se desea un rendimiento de 18% capitalizable cada semestre.

8. Un inversionista posee bonos corporativos de una compañía europea, los cuales le dan un interés semestral de 4.50 € por cada bono. Treinta y tres meses antes del vencimiento, el inversionista vende los bonos en 95.4028 € cada uno. Si la tasa de rendimiento del comprador es de 12% anual capitalizable cada 6 meses, encuentre el valor nominal de los bonos. Los bonos se redimen a la par.

9. Verónica compra 870 obligaciones con valor nominal de 1 000 dólares y que se rediman en 1 060 dólares. Ella vende las obligaciones 29 meses

antes de su vencimiento en 996.63 dólares cada una, con una tasa de rendimiento de 12% anual capitalizable cada bimestre. Si los intereses se cobran cada bimestre, obtenga

a) La tasa de interés del cupón.

b) La cantidad de dinero que recibe al vender las obligaciones.

c) La cantidad de dinero que recibía Verónica cada bimestre por concepto de intereses.

10. Fernando desea invertir en bonos y se le presentan las siguientes dos alternativas:

1a. Compra de bonos ajustados a la inflación. El valor nominal de este tipo de bonos, que es de $1000 inicialmente, se ajusta cada año de acuerdo al porcentaje de inflación ocurrido en el año, aunque el pago de intereses no sufre el ajuste. La tasa de interés del cupón es de 7.4% anual pagadera cada semestre y el ajuste por inflación es de 5% anual.

2a. Compra de bonos no ajustable a la inflación. Su valor nominal es de $1000, vencimiento a la par y tasa de interés nominal de 9.6% pagadera cada semestre.

Si ambos tipos de bonos vencen en 6 años y se considera una tasa de rendimiento de 12% capitalizable semestralmente, con base en el valor presente diga cuál tipo de bono le conviene a Fernando.

9.4 Cálculo de la tasa de rendimiento

En todos los ejemplos y ejercicios realizados hasta ahora, se ha indicado la tasa de rendimiento que se desea obtener al comprar una obligación o bono. En la práctica, sin embargo, es común que al inversionista sólo se le diga el precio que deberá pagar por una obligación o bono, sin que en ningún momento se le dé a conocer la tasa de rendimiento que obtendrá de su inversión. Por tanto, la tasa de rendimiento tendrá que calcularse si se desea comparar la inversión en obligaciones o bonos con otras alternativas de inversión.

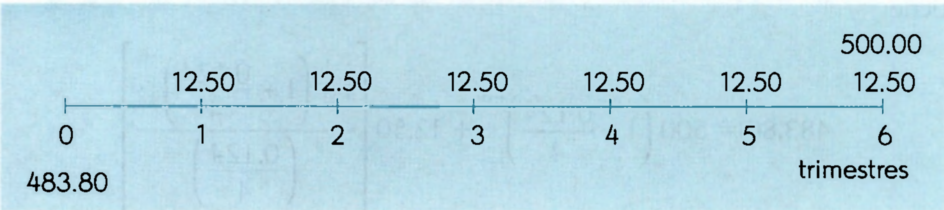
Es imposible obtener una fórmula que proporcione de manera directa la tasa de rendimiento; ésta se obtiene mediante **prueba** y **error**. El lector recordará que este método fue utilizado para el cálculo de la tasa de interés en las anualidades, y que consiste en obtener la tasa de rendimiento mediante tanteos hasta lograr el grado de precisión que se desee. También es posible obtener la tasa de rendimiento utilizando una calculadora programable, una calculadora financiera, o bien, una computadora.

Ejemplo 9.10

Una obligación de $500 se redime a la par dentro de un año y medio. Los intereses se pagan mediante cupones trimestrales a la tasa de 10% anual. Si la obligación se cotiza en este momento en $483.80, ¿cuál será la tasa anual de rendimiento?

Solución:

$$I = (500)\left(\frac{0.10}{4}\right)(1) = \$12.50$$



Si el precio de mercado de la obligación es de $483.80, utilizando la ecuación (9.1), se tiene:

$$483.80 = 500\,(1 + r)^{-6} + 12.50\left[\frac{1-(1+r)^{-6}}{r}\right]$$

donde r es la tasa de rendimiento trimestral.

Como el problema se va a resolver mediante el método de prueba y error, se comienza suponiendo una tasa de rendimiento. Se puede comenzar utilizando un valor cercano a la tasa de interés de los cupones; por ejemplo, supongamos el valor de 12% anual. Al sustituir este valor en la ecuación anterior se tiene:

$$483.80 = 500\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{-6} + 12.50\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{-6}}{\left(\frac{0.12}{4}\right)}\right]$$

$$483.80 \neq 486.457021$$

Si aumentamos el valor a 13%, se tiene

$$483.80 = 500\left(1+\frac{0.13}{4}\right)^{-6} + 12.50\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.13}{4}\right)^{-6}}{\left(\frac{0.13}{4}\right)}\right]$$

$$483.80 \neq 479.852788$$

Por los resultados obtenidos se ve que la tasa de rendimiento se encuentra entre 12% y 13%. Supongamos ahora el valor 12.5%.

$$483.80 = 500\left(1+\frac{0.125}{4}\right)^{-6} + 12.50\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.125}{4}\right)^{-6}}{\left(\frac{0.125}{4}\right)}\right]$$

$$483.80 \neq 483.141189$$

La diferencia entre los dos valores es muy pequeña, por tanto, la tasa de rendimiento está muy cerca de 12.5% anual. Tomando como valor el 12.4%, se tiene

$$483.80 = 500\left(1+\frac{0.124}{4}\right)^{-6} + 12.50\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.124}{4}\right)^{-6}}{\left(\frac{0.124}{4}\right)}\right]$$

$$483.80 = 483.80$$

Por tanto, la tasa de rendimiento es de 12.4% anual capitalizable cada trimestre.

Es posible calcular una tasa de rendimiento aproximada utilizando la siguiente fórmula:

$$r = \frac{2[(I)(n) + F - PM]}{n(F + PM)} \tag{9.2}$$

Donde:

r es la tasa de rendimiento por periodo de capitalización.

I es el interés del cupón.

n es el número de periodos de interés.

F es el valor de redención.

PM es el precio de mercado o valor de compra.

La fórmula anterior es bastante utilizada en la práctica ya que permite obtener una tasa de rendimiento muy cercana a la tasa de rendimiento real.

Ejemplo 9.11

Utilice la fórmula (9.2) para obtener la tasa de rendimiento del ejemplo 9.10.

Solución:

Los valores que deben ser sustituidos en la fórmula son:

$I = \$12.50$

$n = 6$ trimestres

$F = \$500$

$PM = \$483.80$

Por tanto,

$$r = \frac{2[(12.50)(6) + 500 - 483.80]}{6(500 + 483.80)}$$

$$r = 0.030900589 \text{ por trimestre} = 3.0900589\% \text{ trimestral}$$

$$r = 12.36\% \text{ anual}$$

Ejemplo 9.12

Un bono con valor nominal de $300 paga un interés de 13% anual mediante cupones pagaderos cada semestre los días 15 de mayo y 15 de noviembre y vence, a la par, el 15 de noviembre de 2006. Si el 15 de julio de 2003 se cotiza en $288.38. ¿Cuál es la tasa de rendimiento aproximada?

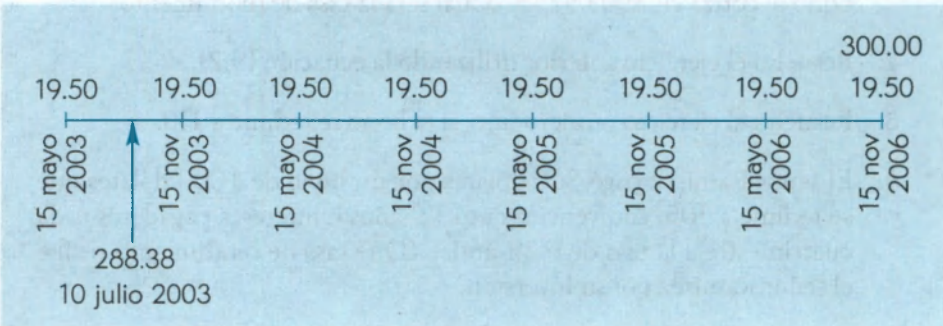
Solución:

En este ejemplo se presenta la situación de un bono que se compra en una fecha que no coincide con alguna fecha de pago de cupón, donde

$I = \$19.50$

$F = \$300$

$PM = \$288.38$



Para obtener el número de periodos semestrales se tiene que del 15 de noviembre de 2003 al 15 de noviembre de 2006 hay 6 semestres. Del 10 de julio de 2003 al 15 de noviembre de 2003, hay 128 días, es decir,

$$\frac{128}{184} = \frac{16}{23} \text{ semestres}$$

Por tanto, el número de periodos semestrales es

$$6\frac{16}{23} = \frac{154}{23}$$

Utilizando la ecuación (9.2), se tiene

$$r = \frac{2\left[(19.50)\left(\frac{154}{23}\right) + 300 - 288.38\right]}{\left(\frac{154}{23}\right)(300 + 288.38)}$$

$$r = 7.218278849\% \text{ semestral} = 14.44\ \% \text{ anual}$$

Si se desea tener una respuesta más precisa, es necesario realizar cálculos de prueba y error utilizando tasas supuestas, comenzando con la tasa de rendimiento aproximada de 14.44% anual. Para este caso, el problema de encontrar una tasa de rendimiento más precisa es más complicado que el proceso de cálculo utilizado en el ejemplo 9.10.

El lector interesado en complementar el estudio de los bonos y obligaciones, puede visitar la página de Internet de la *Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros* (CONDUSEF) en **www.condusef.gob.mx**, donde encontrará un vínculo hacia el tema: *¿Cómo funciona el mercado de valores?*

Ejercicios 9.4

1. Un bono de $1 000 paga intereses de 10% anual mediante cupones semestrales y se redime a la par. Cuatro años antes de su vencimiento el bono se cotiza en $905.5235. ¿Cuál será la tasa de rendimiento?
2. Resuelva el ejercicio anterior utilizando la ecuación (9.2).
3. Resuelva el ejercicio número uno, si el bono se redime a 110.
4. El señor Ramírez pagó 800 dólares por un bono de 1 000 dólares que se redime a 105, con vencimiento a 9 años e intereses pagaderos cada cuatrimestre a la tasa de 6.3% anual. ¿Qué tasa de rendimiento recibe el señor Ramírez por su inversión?

5. Utilizando la ecuación (9.2), obtenga la tasa de rendimiento aproximada de una obligación con valor nominal de \$500, redimible a la par en un plazo de 6 años, que se ofrece en el mercado de valores a 94.5% de su valor nominal. Los intereses son de 13% anual en cupones bimestrales.

6. El 15 de marzo de 2003, las obligaciones de cierta empresa se cotizaron a 103, siendo su valor nominal de \$500 y tendrán redención a la par el 15 de marzo de 2008. Obtenga la tasa de rendimiento si se cobran intereses de \$3.75 mediante cupones mensuales.

7. Si usted adquiere un bono de \$1 000, que paga un interés de 12% anual cada trimestre en \$1 020 y lo vende tres años más tarde en \$950,
   a) ¿Cuál fue el rendimiento anual sobre la inversión?
   b) ¿Cuál fue el rendimiento anual efectivo?

8. Un corredor de bolsa vendió a un inversionista un paquete de bonos corporativos con valor nominal de \$1 000 cada uno. La empresa emisora prometió pagar \$40 de interés cada 6 meses y redimir el bono al cabo de 10 años a la par. Al cabo de un año, el inversionista vendió el bono en \$950. ¿Qué tasa de rendimiento recibió el comprador original sobre su inversión?

9. Un bono del gobierno federal, con valor nominal de \$250 y redención a 113, se vende el 8 de febrero de 2003 en \$221.37. ¿Cuál es la tasa de rendimiento aproximada, si los intereses se pagan los días 20 de los meses de enero, abril, julio y octubre con una tasa anual de 12% y se redime el 20 de octubre de 2012?

10. Las obligaciones de *Productos Químicos Sigma, S. A.*, con valor nominal de \$1 000, pagan intereses de 10% anual y vencen a la par el 24 de febrero de 2007. Las fechas de pago de intereses son el 24 de febrero y 24 de agosto. Si las obligaciones se cotizaron a \$966 el 24 de mayo de 2003, ¿cuál sería la tasa de rendimiento aproximada?

Tema especial

Los bonos en México

El principal emisor de bonos en México es el Gobierno Federal, los cuales son colocados entre los inversionistas del mercado de deuda por el Banco de México.

Entre los principales bonos emitidos por el Gobierno Federal están los siguientes:

- *Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal (BONDES).* Hay dos tipos de BONDES: con pago de intereses semestral y protección contra la inflación (BONDES182), y con pago de intereses trimestral (BONDEST). Ambos tipos tienen un valor nominal de $100 y la tasa de interés es variable.
- *Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con Tasa de Interés Fija (BONOS).* Su valor nominal es de $100, pagan intereses cada 6 meses a una tasa que se fija al momento de la emisión y, por lo general, el plazo es de 3 y 5 años.
- *Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal Denominados en Unidades de Inversión (UDIBONOS).* Su valor nominal es de 100 UDIS y operan a descuento. Su principal característica es que están ligados al Indice Nacional de Precios al Consumidor con el fin de proteger al inversionista de las alzas inflacionarias. El plazo de este tipo de bonos es de 182 días y sus múltiplos. Los intereses se generan en UDIS y se pagan cada 182 días.
- *Bonos de Regulación Monetaria del Banco de México (BREMS).* Este bono es de reciente creación y lo emite el Banco de México con el objeto de regular la liquidez en el mercado de dinero. Su valor nominal es de $100 y paga intereses cada 28 días. La tasa de interés es variable y el plazo es, por lo general, de tres años.
- *Bonos de Protección al Ahorro Bancario (BPAs).* El emisor de estos bonos es el Instituto de Protección al Ahorro Bancario (IPAB) y son colocados entre los inversionistas por el Banco de México. Su valor nominal es de $100, el plazo es de 3 o 5 años y el pago de los intereses es cada 28 días.

A continuación se estudiarán los Bonos de Desarrollo con un poco más de profundidad.

BONDES

Los BONDES (Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal) son títulos de crédito nominativos denominados en moneda nacional, negociables y a cargo del gobierno federal, que se emiten a un plazo no inferior a un año. El decreto mediante el cual la Secretaría de Hacienda fue autorizada a emitir BONDES apareció publicado en el Diario Oficial de la Federación del 22 de septiembre de 1987. La primera emisión se realizó el 13 de octubre de 1987.

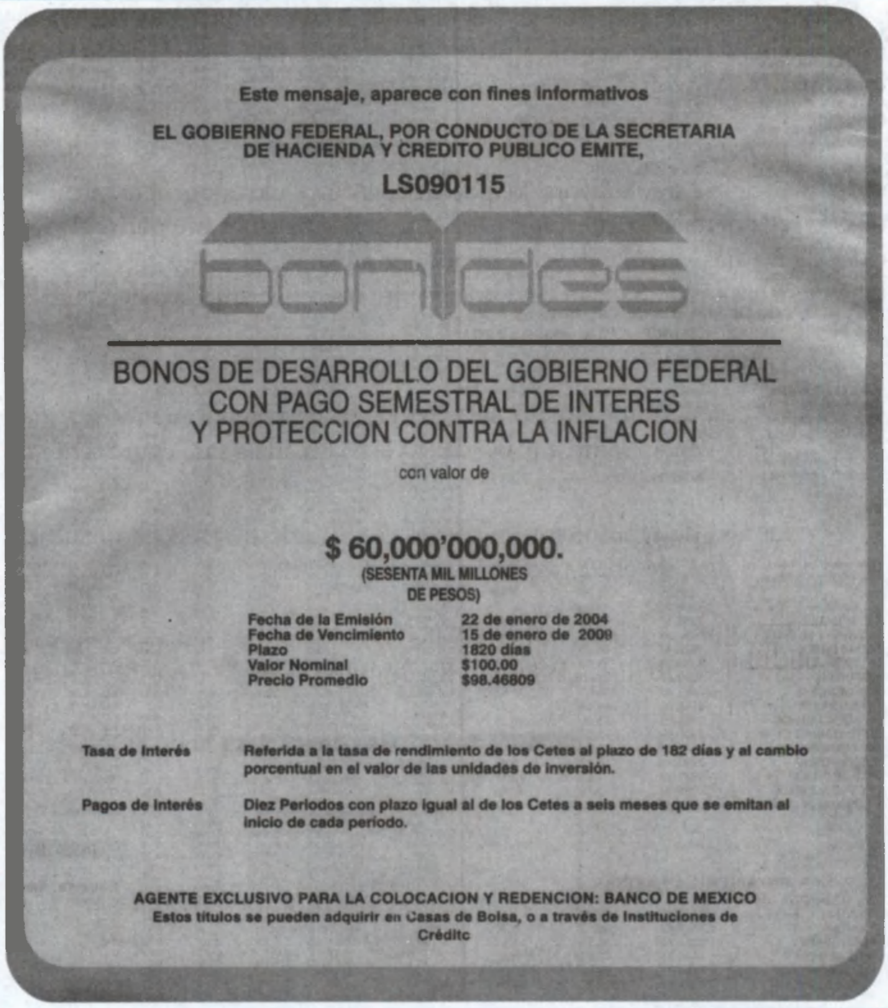
El objetivo que persigue el Gobierno Federal al emitir BONDES es el obtener financiamiento a largo plazo, así como también el regular la oferta monetaria y las tasas de interés. Los BONDES constituyen una alternativa de inversión a mediano y largo plazo.

Los BONDES tienen un valor nominal de $100 y se colocan en el mercado financiero a través de una tasa de descuento, por lo que genera ganancias de capital, además de intereses. Los intereses se pagan sobre periodos vencidos de 28 días, calculados sobre el valor nominal. La tasa de interés es variable y se revisa cada 28 días y es la que resulte mayor de entre las siguientes:

- La tasa de rendimiento de los Cetes en colocación primaria a 28 días.
- La tasa de rendimiento neta del Pagaré con Rendimiento Liquidable al Vencimiento a plazo de 90 días, llevada a tasa equivalente de 28 días.
- La tasa de rendimiento neto del Certificado de Depósito bancario a 90 días, llevada a tasa equivalente de 28 días.

Los BONDES pueden emitirse a diferentes plazos, siendo los más comunes los de 364 y 728 días. Un BONDE a 364 días de plazo tiene 13 periodos de pago de intereses (cupones).

En la siguiente página se muestra un aviso de colocación de BONDES.



Este mensaje, aparece con fines informativos

EL GOBIERNO FEDERAL, POR CONDUCTO DE LA SECRETARIA DE HACIENDA Y CREDITO PUBLICO EMITE,

LS090115

bondes

BONOS DE DESARROLLO DEL GOBIERNO FEDERAL CON PAGO SEMESTRAL DE INTERES Y PROTECCION CONTRA LA INFLACION

con valor de

$ 60,000'000,000.
(SESENTA MIL MILLONES DE PESOS)

Fecha de la Emisión	22 de enero de 2004
Fecha de Vencimiento	15 de enero de 2009
Plazo	1820 días
Valor Nominal	$100.00
Precio Promedio	$98.46809

Tasa de Interés	Referida a la tasa de rendimiento de los Cetes al plazo de 182 días y al cambio porcentual en el valor de las unidades de inversión.
Pagos de Interés	Diez Periodos con plazo igual al de los Cetes a seis meses que se emitan al inicio de cada periodo.

AGENTE EXCLUSIVO PARA LA COLOCACION Y REDENCION: BANCO DE MEXICO
Estos títulos se pueden adquirir en Casas de Bolsa, o a través de Instituciones de Créditc

Ejemplo 9.13

Calcular la tasa de rendimiento mensual, nominal y efectiva, para cierta emisión de BONDES que fue comprada el 3 de febrero, día de pago de intereses, en $96.45 y se vendieron el 28 de abril del mismo año en $98.14. Las tasas de interés fueron las siguientes:

Periodo	Tasa de interés anual capitalizable cada día
Del 3 de febrero al 3 de marzo	12.42%
Del 3 de marzo al 31 de marzo	11.87%
Del 31 de marzo al 28 de abril	12.50%

Solución:

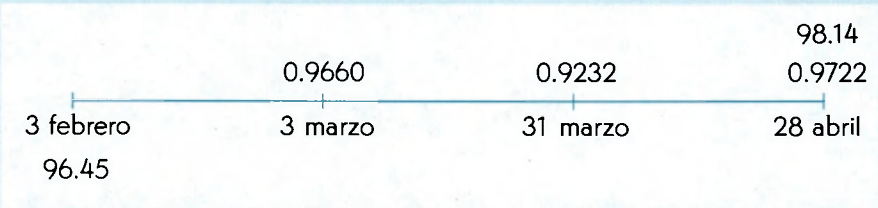
Los intereses devengados al final de cada periodo de 28 días fueron:

$$I = (100)\left(\frac{0.1242}{360}\right)(28) = \$0.9660$$

$$I = (100)\left(\frac{0.1187}{360}\right)(28) = \$0.9232$$

$$I = (100)\left(\frac{0.1250}{360}\right)(28) = \$0.9722$$

El diagrama de tiempo es el siguiente:



Utilizando la ecuación (9.1), se tiene

$$96.45 = 98.14\,(1 + r)^{-84} + 0.9660\,(1 + r)^{-28} + 0.9232\,(1 + r)^{-56} + 0.9722\,(1 + r)^{-84}$$

Resolviendo la ecuación mediante una calculadora programable, se tiene la tasa de rendimiento diaria:

$$r = 0.0005543676 \text{ por día} = 0.05543676\% \text{ diario}$$

$$r = 1.6631\% \text{ mensual nominal}$$

La tasa de interés mensual efectiva es

$$r_{\text{efectiva}} = (1 + 0.0005543676)^{30} - 1 = 1.67654\% \text{ mensual}$$

Ejercicio

1. Resuelva el ejemplo 1 si el bono se vende el 12 de abril en $97.35.

CAPÍTULO 10

Depreciación

Objetivos

Al finalizar el estudio de este capítulo el alumno podrá:

- Entender el concepto de depreciación.
- Distinguir los diversos métodos de depreciación.
- Aplicar los métodos de depreciación.

10.1 Introducción

Desde el momento mismo en que se adquiere un bien, éste empieza a perder valor. Esta pérdida de valor es conocida como *depreciación*.

La **depreciación** se define como la pérdida de valor que sufren los activos fijos[1] haciendo que su **vida útil** resulte limitada. La vida útil se determina con base en la experiencia de los expertos en el tema.

Las causas de la depreciación fundamentalmente son dos: *físicas* y *funcionales*. Las causas físicas se refieren al desgaste producido por el uso o a la acción de los elementos naturales. Por ejemplo, la maquinaria se desgasta por el uso, en cambio los edificios sufren la acción de los elementos naturales al estar expuestos a la intemperie. Algunos activos se desgastan por una combinación de ambos, por ejemplo, los automóviles. Las causas físicas son las que predominan en la depreciación de la mayor parte de los activos fijos.

Las causas funcionales se presentan por obsolescencia o por insuficiencia. La obsolescencia se presenta cuando el activo fijo se retira, no porque se haya desgastado, sino porque resulta anticuado debido a nuevas invenciones, mejoras técnicas, etcétera.

La insuficiencia se presenta cuando el activo fijo no puede hacer frente al servicio que de él se exige. Por ejemplo, suponga que una fábrica tiene una máquina cuyo rendimiento es de 1 500 artículos/hora, el cual resulta suficiente en ese momento. Un año después han aumentado las necesidades de producción y la fábrica necesita una nueva máquina con rendimiento mínimo de 4 000 artículos/hora. La máquina no está desgastada ni obsoleta, pero su vida útil ha terminado ya que es incapaz de satisfacer las necesidades de la empresa.

El **factor efectivo de depreciación** es aquel que actúa primero para acabar la vida útil del activo. Así, si una máquina podría durar 10 años antes de desgastarse, pero será obsoleta en 5 años, se toma como factor efectivo de depreciación la obsolescencia y el periodo de 5 años deberá usarse para los cálculos.

Al terminar la vida útil de un activo fijo éste se reemplaza, invirtiendo en ello cierta cantidad de dinero llamada **costo de reemplazo.** Para llevar a cabo el reemplazo o reposición de los activos es necesario crear un fondo para contar con los recursos necesarios para reemplazar dicho activo. Éste, llamado **fondo de reserva para depreciación,** se forma separando periódicamente cierta suma de dinero de las utilidades de la empresa.

El costo original de un activo menos la depreciación acumulada a una fecha determinada se llama **valor en libros** y representa el valor que aún tiene el bien en

[1] *Activos fijos* son los bienes sujetos al desgaste, a las descomposturas y a los cambios en la tecnología. Ejemplos de activos fijos son: edificios, maquinaria, equipo de cómputo, mobiliario de oficina, etcétera.

los registros contables de la empresa. Por ejemplo, al final del primer año, el valor en libros de un activo fijo es igual al costo original menos la depreciación de ese año. El valor en libros no tiene relación alguna con el **valor de mercado**, ya que el valor en libros se determina con base en el precio original del bien, mientras que el valor de mercado tiende a ser superior debido a la inflación y algunos otros factores.

Cuando un activo fijo ha llegado al final de su vida útil, por lo general siempre conserva algún valor, así sea como chatarra. Este valor recibe el nombre de **valor de salvamento** o **valor de desecho**, el cual puede ser negativo. La diferencia entre el costo original y el valor de desecho de un activo fijo se llama **costo total de depreciación** o **base a depreciar**.

Existen diversos métodos para calcular el cargo periódico por depreciación. Los más utilizados son:

- Método de línea recta.
- Método de la suma de dígitos.
- Método del porcentaje fijo.
- Método del fondo de amortización.

Ejercicios 10.1

1. ¿Cómo se define la depreciación de un activo?
2. ¿Qué es la vida útil de un activo?
3. ¿Cuáles son los principales métodos de depreciación de activos?
4. Investigue qué otros métodos de depreciación de activos existen.
5. ¿Cree usted que los terrenos y algunos metales, como el oro y la plata, se pueden depreciar?

10.2 Método de línea recta

Este método de depreciación es el más sencillo de todos y el más utilizado. Además, es el único aprobado por la Secretaría de Hacienda para cumplir con las disposiciones fiscales sobre depreciación de activos fijos.

Este método supone que la depreciación anual del activo fijo es la misma durante cada año de su vida útil. Designado por *DT* la Depreciación Total sufrida por el activo a lo largo de su vida útil y por n la vida útil de activo, en años, entonces la depreciación anual viene dada por

$$D = \frac{DT}{n} \tag{10.1}$$

La depreciación total viene dada por

$$DT = C - S \tag{10.2}$$

donde C representa el costo inicial del activo y S su valor de salvamento.

Al combinar las ecuaciones (10.1) y (10.2), se obtiene

$$D = \frac{C - S}{n} \tag{10.3}$$

Ejemplo 10.1

Se compra una máquina en \$530 000 y se calcula que su vida útil será de 6 años. Si se calcula que tendrá un valor de desecho de \$53 000, encuentre la depreciación total y la depreciación anual.

Solución:

$C = 530000$

$S = 53000$

$n = 6$

La depreciación total se obtiene mediante la ecuación (10.2).

$$DT = 530000 - 53000 = \$477000$$

La depreciación total representa la depreciación acumulada a lo largo de los seis años de vida útil de la máquina.

Utilizando la ecuación (10.3) se obtiene la depreciación anual.

$$D = \frac{530000 - 53000}{6} = \$79500 \text{ por año}$$

La depreciación anual es de \$79 500. Esto significa que el fondo de reserva para depreciación se forma guardando \$79 500 al final de cada año, durante 6 años; de tal manera que la depreciación acumulada en ese tiempo más el valor de salvamento sea igual al costo de reemplazo:

$$(79500)(6) + 53000 = \$530000$$

Una práctica común consiste en elaborar una tabla **de depreciación**; esto es, una tabla que muestra la depreciación anual, depreciación acumulada y valor en libros de un activo fijo, año por año de su vida útil.

Ejemplo 10.2

Elabore una tabla de depreciación para el ejemplo 10.1.

Solución:

El valor en libros de la máquina después de un año será de $530 000 − $79 500 = $450 500; después de dos años será $450 500 − $79 500 = $371 000, y así sucesivamente. La depreciación acumulada al término de un año dado, se obtiene al sumar las depreciaciones anuales hasta ese año.

La tabla siguiente muestra cómo disminuye el valor en libros, mientras la depreciación acumulada aumenta.

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0			$530 000
1	$79 500	$ 79 500	$450 500
2	$79 500	$159 000	$371 000
3	$79 500	$238 500	$291 500
4	$79 500	$318 000	$212 000
5	$79 500	$397 500	$132 500
6	$79 500	$477 000	$ 53 000

Analizando el problema anterior, resultan evidentes las siguientes objeciones a este método de depreciación.

- La depreciación real es diferente a la calculada por este método, ya que los bienes se deprecian en mayor proporción durante los primeros años de su vida útil, que en los años finales.
- El dinero depositado en el fondo de reserva gana intereses; este hecho no es considerado por el método de línea recta.
- El valor de reposición de un activo no es igual al valor de compra del activo original, debido, principalmente, a la inflación.

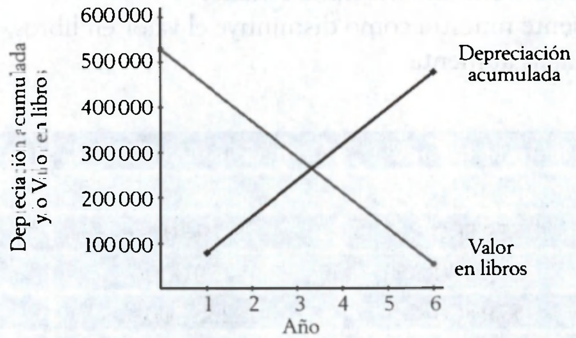
El nombre dado a este método de depreciación se debe al hecho de que al graficar el tiempo transcurrido contra la depreciación acumulada y/o el valor en libros, se obtiene una línea recta. Si la gráfica es tiempo *vs* depreciación acumulada, entonces la línea recta tiene pendiente positiva; si la gráfica es tiempo *vs* valor en libros, entonces la línea recta tiene pendiente negativa.

Ejemplo 10.3

Obtenga la gráfica de la depreciación acumulada y del valor en libros para el ejemplo 10.1.

Solución:

Las gráficas se trazan utilizando como puntos los valores que aparecen en la tabla de depreciación.



Observe la existencia de un punto en el tiempo donde las dos rectas se intersecan. Este punto de intersección representa el momento en el cual la depreciación acumulada es igual al valor en libros y se obtiene, de una manera aproximada, a través de la gráfica. En este caso, la depreciación acumulada es igual al valor en libros a los 3.3 años, aproximadamente.

En los ejemplos anteriores, no se tomó en cuenta la inflación; sin embargo, en las situaciones reales, ésta puede llegar a ser muy importante. En los dos ejemplos siguientes, la inflación será tomada en consideración.

Ejemplo 10.4

¿Cuál es el valor de reposición de un equipo industrial que tuvo un costo de 100 000 dólares, tiene una vida útil de 8 años y la inflación promedio esperada es de 6% anual?

Solución:

En este caso, el valor de reposición se obtiene utilizando la fórmula del monto compuesto, donde la tasa de interés se reemplaza por la tasa de inflación.

$$F = 100\,000(1 + 0.06)^8 = 159\,384.81 \text{ dólares}$$

Ejemplo 10.5

¿Cuál es el valor de salvamento de una máquina cuyo costo fue de $454 000, tiene una vida útil de 5 años, se deprecia en $77 180 cada año y su valor aumenta en 5% anual debido a la inflación?

Solución:

Si la máquina costó $454 000, al cabo de un año el valor de la máquina aumenta 5% y se deprecia en $77 180. Por tanto, el valor de la máquina al cabo de un año será:

$$C_1 = (454\,000)(1.05) - 77\,180 = \$399\,520$$

Al final del segundo año, el valor de la máquina será:

$$C_2 = (399\,520)(1.05) - 77\,180 = \$342\,316$$

Al final del tercer año, la máquina tendrá un valor de:

$$C_3 = (342\,316)(1.05) - 77\,180 = \$282\,251.80$$

Al final del cuarto año, se tiene:

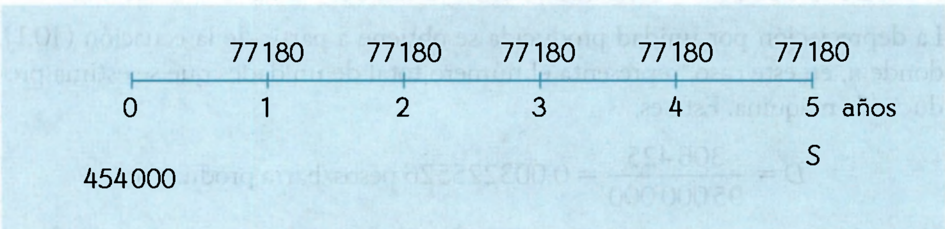
$$C_4 = (282\,251.80)(1.05) - 77\,180 = \$219\,184.39$$

Al cabo de los cinco años de servicio, el valor de salvamento de la máquina será:

$$S = C_5 = (219\,184.39)(1.05) - 77\,180 = \$152\,963.61$$

El método de resolución mostrado es muy tardado y poco práctico en situaciones donde la vida útil del activo es de muchos años. Otra forma de resolver el problema es la siguiente:

El diagrama de tiempo del activo a depreciar es el siguiente:



Donde S es el valor de salvamento de la máquina.

Si el valor de salvamento de la máquina es la resta del valor de adquisición menos la depreciación total, entonces se puede formar la siguiente ecuación de valor:

$$S = 454\,000(1.05)^5 - 77\,180\left[\frac{(1.05)^5 - 1}{0.05}\right]$$

$$S = \$152\,963.61$$

El método anterior se puede generalizar y decir que, si C es el costo inicial del activo, D es la depreciación anual y λ es la tasa anual de inflación, entonces el valor de salvamento o valor de desecho S de un activo, utilizando el método de línea recta, al cabo de n años es:

$$S = C(1 + \lambda)^n - D\left[\frac{(1+\lambda)^n - 1}{\lambda}\right] \tag{10.4}$$

Algunas veces la depreciación de una máquina se lleva a cabo en función de la cantidad de artículos que pueden ser elaborados con dicha máquina o por el número de horas de trabajo útil. Con el fin de utilizar estas variantes del método de línea recta, es necesario conocer el número de unidades que puede producir un determinado equipo o el número de horas de trabajo que puede proporcionar la máquina a lo largo de su vida útil. En ambos casos, estos datos son proporcionados, usualmente, por los fabricantes del equipo.

Ejemplo 10.6

Una empresa fabricante de chocolate en barras compró una máquina elaboradora de las barras en $360 500, a la cual se le calcula un valor de salvamento de 15% de su costo. De acuerdo con el fabricante de la máquina, se estima que ésta podrá producir un total de 95 000 000 de barras de chocolate antes de ser sustituida por otra. Determine la depreciación total y la depreciación por unidad producida.

Solución:

La depreciación total viene dada por la ecuación (10.2):

$$DT = 360\,500 - (0.15)(360\,500) = 360\,500 - 54\,075 = \$306\,425$$

La depreciación por unidad producida se obtiene a partir de la ecuación (10.1), donde n, en este caso, representa el número total de unidades que se estima producirá la máquina. Esto es,

$$D = \frac{306\,425}{95\,000\,000} = 0.003225526 \text{ pesos/barra producida}$$

El resultado anterior indica que cada barra de chocolate que produzca esta máquina, se verá incrementada en sus costos en $0.003225526 por concepto de depreciación.

Ejemplo 10.7

Elabore una tabla de depreciación para el ejemplo anterior, sabiendo que la producción anual de barras de chocolate fue la siguiente.

Año	Producción anual
1	7 300 000
2	9 125 000
3	12 775 000
4	22 995 000
5	42 805 000

Solución:

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0			$360 500.00
1	$ 23 546.34	$ 23 546.34	$336 953.66
2	$ 29 432.92	$ 52 979.26	$307 520.74
3	$ 41 206.10	$ 94 185.36	$266 314.64
4	$ 74 170.97	$168 356.33	$192 143.67
5	$138 068.64	$306 424.97	$ 54 075.03

La depreciación anual se obtiene multiplicando, para cada año, la depreciación por unidad por la producción correspondiente al año en cuestión. Por ejemplo, la depreciación para el primer año es el siguiente:

$$(0.003225526 \text{ pesos/barra})(7\,300\,000 \text{ barras}) = \$23\,546.34.$$

Ejercicios 10.2

Use el método de depreciación de línea recta en cada uno de los siguientes ejercicios.

1. Una máquina que cuesta $925 000 tiene una vida útil estimada de 8 años. Al final de ese tiempo, se calcula que tenga un valor de salvamento de $100 000. Calcule la depreciación total, la depreciación anual y elabore la tabla de depreciación. Utilizando una gráfica como la mostrada en el ejemplo 10.3, ¿en qué tiempo la depreciación acumulada es igual al valor en libros?

2. Calcule la depreciación anual de un automóvil que cuesta $354 000, considerando una vida útil de cinco años y un valor de salvamento igual a 20% del costo del automóvil. Elabore la tabla de depreciación.

3. Se compró un equipo de cómputo en $21 300 y se espera que tenga una vida útil de 3 años; al final de este tiempo será reemplazado por un equipo más moderno. Si su valor de desecho será igual a cero. Determíne:
   a) La depreciación total.
   b) La depreciación anual.
   c) La tabla de depreciación.

4. Una empresa compró un automóvil nuevo en $143 750, para uno de sus agentes de ventas. Si la vida útil del automóvil es de 4 años y la depreciación anual es de $31 625, encuentre el valor de salvamento del automóvil.

5. El señor Ortiz compra un minibús en $674 600, de contado. Si el minibús se deprecia en $46 216.67 cada año y su valor de desecho es de $120 000, encuentre la vida útil del minibús.

6. ¿Cuál es el valor de reposición de un equipo industrial que tuvo un costo de $314 700, tiene una vida útil de 12 años y la inflación promedio esperada es de 3% anual?

7. ¿Cuál es el valor de reposición de una máquina cuyo costo inicial fue de $400 000, si tiene una vida útil de 4 años y la inflación esperada por año es la siguiente?

Año	Tasa de inflación anual
1	3.5%
2	3.2%
3	3.0%
4	2.7%

8. Una empresa compra 6 camionetas en $2 838 000. Se estima que tendrán una vida útil de 6 años después de los cuales deben ser reemplazadas por unidades nuevas. ¿Cuál es el valor de desecho si la depreciación anual es de $425 700 y se considera una tasa de inflación de 4.3% anual?

9. Resuelva el problema anterior si no se toma en cuenta la inflación.

10. ¿Cuál es el valor de salvamento de un horno para la elaboración de pizzas, que costó $175 000, se deprecia $22 150 cada año y aumenta su valor con inflación de 7.2% anual? La vida útil del horno se considera de 7 años.

11. El gerente de un hotel compró un calentador solar para la alberca, el cual tiene una vida útil de 10 años y un valor de desecho de 8% de su costo inicial. Si el calentador costó $175 000, encuentre la depreciación anual considerando una tasa de inflación de 5% anual.

12. El departamento de finanzas de una universidad compró un equipo de video para ser utilizado por los profesores del área. Su costo fue de $95 800 y se considera un valor de desecho de $5 000. Si la vida útil de este equipo se considera de 5 años, calcule la depreciación anual utilizando una tasa de inflación de 10% anual.

13. Una empresa compra un molde para producir un juguete de plástico. El molde tiene una vida útil estimada en 200 000 piezas y su costo fue de $160 000 con un valor de desecho de cero. Elabore la tabla de depreciación, si la producción de juguetes fue la siguiente.

Año	Producción anual
1	32 000
2	54 000
3	57 000
4	57 000

14. La bomba de un pozo agrícola tiene un costo de $100 000 y de acuerdo con el fabricante, una vida útil de 40 000 horas de trabajo. Elabore la tabla de depreciación, si la bomba tiene un valor de salvamento de $10 000 y trabajó 8 100 horas el primer año; 7 800 horas el segundo año; 6 700 horas el tercer año; 6 000 el cuarto año; 5 700 el quinto año y 5 700 el sexto año.

15. Una copiadora se compró en $12 000 y se le estima una capacidad productiva de 2 000 000 de copias. Su valor de desecho es de 20% de su costo y el número de copias obtenidas durante 5 años de operación fue el siguiente: 310 000, 415 000, 480 000, 425 000 y 370 000. Determine la depreciación por copia y elabore la tabla de depreciación.

10.3 Método de la suma de dígitos

Este método, al igual que los otros dos que se estudiarán más adelante, no está autorizado por la Secretaría de Hacienda para efectos fiscales; sin embargo, son utilizados internamente por las empresas para depreciar contablemente sus activos.

El método de la suma de dígitos es un método de depreciación acelerado, en el cual la depreciación es mayor en los primeros años de vida del activo fijo, disminuyendo en los años subsecuentes.

Si DT es la depreciación total o base a depreciar de un activo fijo, entonces la depreciación anual viene dada por

$$D = (DT)(F) \tag{10.5}$$

En donde F es una fracción cuyo denominador es la suma de los años de la vida útil del activo; de ahí el nombre de este método. Por ejemplo, si la vida útil de un activo es de 5 años, entonces el denominador de la fracción F es $1+2+3+4+5=15$.

Si n años es la vida útil de un activo, entonces el numerador de la fracción para el primer año es n; para el segundo año, el numerador será $(n-1)$; para el tercer año $(n-2)$; para el cuarto año $(n-3)$, y así sucesivamente. Por ejemplo, para un bien con 5 años de vida útil, las fracciones F serían

5/15 para el primer año

4/15 para el segundo año

3/15 para el tercer año

2/15 para el cuarto año

1/15 para el quinto año

Ejemplo 10.8

Un camión para el transporte urbano que cuesta $1 280 000 se espera que tenga una vida útil de 7 años y un valor de salvamento de $150 000 al final de ese tiempo. Elabore la tabla de depreciación usando el método de la suma de dígitos.

Solución:

Utilizando la ecuación (10.2) se obtiene la base a depreciar

$$DT = 1\,280\,000 - 150\,000 = \$1\,130\,000$$

Se calcula el denominador de la fracción F sumando los dígitos de los años de la vida útil del camión:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

La suma anterior es una serie aritmética; por tanto, también se puede obtener mediante la ecuación (3.2)

$$S_7 = \frac{(7)(1+7)}{2} = 28$$

Los numeradores de la fracción F, para los años primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto y séptimo serán 7, 6, 5, 4, 3, 2 y 1, respectivamente.

La depreciación anual se obtiene mediante la ecuación (10.5). Por ejemplo, la depreciación para el primer año será:

$$D = (1\,130\,000)\left(\frac{7}{28}\right) = \$282\,500$$

La depreciación para el segundo año es:

$$D = (1\,130\,000)\left(\frac{6}{28}\right) = \$242\,142.86$$

Y así sucesivamente.

La tabla de depreciación se prepara en la misma forma que en el método de línea recta.

Fin de año	Fracción	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0				\$1 280 000.00
1	7/28	\$282 500.00	\$ 282 500.00	\$ 997 500.00
2	6/28	\$242 142.86	\$ 524 642.86	\$ 755 357.14
3	5/28	\$201 785.71	\$ 726 428.57	\$ 553 571.43
4	4/28	\$161 428.57	\$ 887 857.14	\$ 392 142.86
5	3/28	\$121 071.43	\$1 008 928.57	\$ 271 071.43
6	2/28	\$ 80 714.29	\$1 089 642.86	\$ 190 357.14
7	1/28	\$ 40 357.14	\$1 130 000.00	\$ 150 000.00

Ejemplo 10.9

Una maquinaria que costó 184 000 dólares, a la que se le estima una duración de 10 años y un valor de desecho de cero, se va a depreciar por el método de la suma de dígitos. Obtenga la depreciación acumulada y el valor en libros al cabo de 7 años.

Solución:

$$DT = 184\,000 - 0 = 184\,000 \text{ dólares}$$

Suma de los dígitos de los años $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$

$$\text{Depreciación acumulada} = 184\,000\left(\frac{10}{55} + \frac{9}{55} + \frac{8}{55} + \frac{7}{55} + \frac{6}{55} + \frac{5}{55} + \frac{4}{55}\right)$$

$$\text{Depreciación acumulada} = 163\,927.27 \text{ dólares}$$

Por tanto,

$$\text{Valor en libros} = 184\,000 - 163\,927.27 = 20\,072.73 \text{ dólares}$$

Ejercicios 10.3

Use el método de depreciación de la suma de dígitos en cada uno de los siguientes ejercicios:

1. Un agricultor compró un tractor en $640 000. Tiene una vida estimada de 6 años y un valor de desecho de 18% del costo. Elabore la tabla de depreciación.

2. Un despacho de abogados renueva el mobiliario de la oficina con una inversión de $175 000. Suponiendo una vida útil de 5 años y un valor de salvamento de 0, elabore la tabla de depreciación.

3. Calcule la depreciación anual de una laptop que cuesta $19 400, su valor de desecho es de $2 500 y tiene una vida útil de 4 años.

4. Un edificio de oficinas cuesta $5 000 000 y se le estima una vida útil de 60 años, con un valor de salvamento de 20% de su costo inicial. Determine la depreciación anual para los primeros 3 años y para los últimos 3.

5. Un hospital adquiere un equipo de rayos X con valor de $1 465 000. La vida útil de este equipo es de 18 años y su valor de salvamento se calcula en $300 000. ¿Cuál es la depreciación acumulada y el valor en libros después de 10 años?

6. La cafetería de una universidad compró mobiliario y equipo por $970 000. Se estima una vida útil de 5 años y un valor de desecho de $50 000. Sin elaborar la tabla de depreciación, determínese la depreciación acumulada y el valor en libros al cabo de 3 años.

10.4 Método del porcentaje fijo

Este método consiste en utilizar un porcentaje de depreciación constante, llamado **tasa de depreciación**, sobre el valor en libros. Como el valor en libros es una cantidad que disminuye cada año, la base sobre la cual se aplica la tasa de depreciación es una variable y, por tanto, los cargos anuales por depreciación son mayores en los primeros años de vida del activo y van disminuyendo cada año.

La depreciación anual viene dada por la siguiente ecuación

$$D = Vd \tag{10.6}$$

Donde d es la tasa de depreciación y V es el valor en libros del año inmediato anterior al del año cuya depreciación anual se desea calcular.

Ejemplo 10.10

Un laboratorio de análisis clínicos compró un aparato para realizar análisis de biometría hemática. El costo del aparato fue de 60 000 dólares y resultará obsoleto en 5 años. Si se aplica una tasa de depreciación de 35% anual, elabore la tabla de depreciación.

Solución:

Fin de año	Depreciación anual (Dólares)	Depreciación acumulada (Dólares)	Valor en libros (Dólares)
0			60 000.00
1	(0.35)(60 000.00) = 21 000.00	21 000.00	39 000.00
2	(0.35)(39 000.00) = 13 650.00	34 650.00	25 350.00
3	(0.35)(25 350.00) = 8 872.50	43 522.50	16 477.50
4	(0.35)(16 477.50) = 5 767.13	49 289.63	10 710.37
5	(0.35)(10 710.37) = 3 748.63	53 038.26	6 961.74

Utilizando el ejemplo anterior como modelo, es posible deducir una fórmula general que proporcione el valor de salvamento de un activo que se deprecia a una cierta tasa anual mediante el método del porcentaje fijo.

Sea C el costo inicial de un bien; S, su valor de salvamento; n, el número de años de vida útil y d, la tasa de depreciación expresada en forma decimal. Al finalizar el primer año, la depreciación sufrida por el activo es

$$D = Cd$$

y su valor en libros será

$$V_1 = C - D = C - Cd = C(1 - d)$$

Al término del segundo año, el activo se deprecia en:

$$D = V_1 d = C(1 - d)d$$

y su valor en libros al finalizar el segundo año será:

$$V_2 = V_1 - D = C(1 - d) - C(1 - d)d$$

$$V_2 = C(1 - d)(1 - d) = C(1 - d)^2$$

Al término del tercer año, el activo se deprecia en:

$$D = V_2 d = C(1 - d)^2 d$$

y su valor en libros al finalizar el tercer año será:

$$V_3 = V_2 - D = C(1 - d)^2 - C(1 - d)^2 d$$

$$V_3 = C(1 - d)^2(1 - d) = C(1 - d)^3$$

Continuando con el proceso se tiene que el valor en libros al final del m-ésimo año viene dado por:

$$V_m = C(1 - d)^m \tag{10.7}$$

En el último año el valor en libros es exactamente igual al valor de desecho, por tanto:

$$S = C(1 - d)^n \tag{10.8}$$

La ecuación (10.8) es válida para un valor de desecho mayor que cero. Si en un caso dado el valor de desecho fuera cero, es necesario suponer un valor arbitrario de desecho, por ejemplo, se supone que el valor de desecho es de $1.00.

Ejemplo 10.11

Verifique, usando las ecuaciones (10.7) y (10.8), para el ejemplo anterior, el valor en libros al término del tercer año y el valor de salvamento.

Solución:

Por medio de la ecuación (10.7) se puede obtener el valor en libros al cabo de 3 años.

$$V_3 = 60\,000(1 - 0.35)^3 = 16\,477.50 \text{ dólares}$$

El valor de salvamento se obtiene usando la ecuación (10.8).

$$S = 60\,000(1 - 0.35)^5 = 6\,961.74 \text{ dólares}$$

Ejemplo 10.12

Una empresa compra un autobús para el transporte de su personal en $975 000. La vida útil del autobús es de 8 años y su valor de desecho será de $120 000. Calcule la tasa de depreciación que debe aplicarse para depreciar el activo por el método del porcentaje fijo.

Solución:

Utilizando la ecuación (10.8), se tiene

$$120\,000 = 975\,000(1 - d)^8$$

Por tanto,

$$\frac{120\,000}{975\,000} = (1 - d)^8$$

Esto es,

$$\sqrt[8]{\frac{120\,000}{975\,000}} = 1 - d$$

Por tanto,

$$d = 1 - \sqrt[8]{\frac{120\,000}{975\,000}}$$

$$d = 23.0388\% \text{ anual}$$

Ejercicios 10.4

Use el método del porcentaje fijo en cada uno los siguientes ejercicios:

1. El costo de una máquina es de $100 000 y se estima que su vida útil será de 5 años. Elabore la tabla de depreciación considerando una tasa de depreciación de 20% anual.
2. Resuelva el ejercicio anterior, si la tasa de depreciación es de 30% anual.

3. Un automóvil que se va a utilizar como taxi tuvo un costo de $180 000. El carro tiene una vida útil de 4 años, al cabo de los cuales se puede vender en $25 000. Calcule:
   a) La depreciación total.
   b) La tasa de depreciación que debe aplicarse sobre el valor en libros.
   c) Elabore la tabla de depreciación.
4. Claudia acaba de comprar una computadora a un precio de $15 000, con una vida estimada de 5 años y un valor de salvamento estimado en 10% del precio de compra. Calcule la tasa fija de depreciación anual y elabore la tabla de depreciación.
5. Se compró mobiliario de oficina a un costo de $58 400. Se le estima una vida útil de 8 años y un valor de desecho igual a cero. Calcule la tasa anual de depreciación y el valor en libros al término de 4 años.
6. Una compañía fabricante de productos químicos compró un reactor en $395 000. Al reactor se le estima una vida útil de 12 años y un valor de salvamento de 10% de su costo. Determine:
   a) La tasa de depreciación anual.
   b) El valor en libros al final del décimo año.
   c) La depreciación acumulada al final del décimo año.
7. Se compró una máquina cuyo costo fue de $138 000 y se le calcula un valor de desecho de $20 700. Si la máquina se deprecia en 21.11% anual, ¿cuál es su vida útil?
8. Un taller automotriz compró un gato hidráulico en $350 000. Se calcula que el valor de salvamento será de $21 000 al final de una vida de 15 años. ¿En cuánto tiempo, el valor en libros será la mitad de su precio original?

10.5 Método del fondo de amortización

La depreciación anual recuperada por una empresa debe ser, en teoría, depositada en un fondo de reserva cuyo objetivo es lograr el reemplazo del activo. Ninguno de los métodos de depreciación estudiados hasta este momento toma en cuenta los intereses ganados por los depósitos efectuados al fondo de reserva.

El **método del fondo de amortización** es una variante del método de línea recta que sí toma en cuenta los intereses, de tal manera que la suma de los depósitos anuales más sus intereses, sea igual, al final de la vida útil del activo, a la depreciación total.

Si D es la depreciación anual que está siendo colocada en un fondo de depreciación que paga una tasa de interés i (expresada en forma decimal), entonces el monto obtenido al final de n años de vida útil del activo es igual a la depreciación total. De lo anteriormente expuesto se deduce que la depreciación anual se obtiene despejando A de la ecuación (6.1), donde F es el valor de la depreciación total DT.

Esto es:

$$D = \frac{(DT)(i)}{(1+i)^n - 1} \qquad (10.9)$$

Ejemplo 10.13

Una máquina cuyo costo fue de $275 000 tiene una vida útil de 5 años al cabo de los cuales se podrá vender en $22 000. Si los cargos por depreciación anual se invierten en un fondo de reserva que paga un interés de 10% anual, determine

a) La depreciación total.

b) La depreciación anual.

Solución:

a)

$$DT = 275\,000 - 22\,000 = \$253\,000$$

b)

$$D = \frac{(253\,000)(0.10)}{(1+0.10)^5 - 1} = \$41\,440.76$$

Al depositar $41 440.76 cada fin de año en el fondo de depreciación, se tendrá un monto de $253 000 al cabo de 5 años.

Ejemplo 10.14

Elabore la tabla de depreciación para el ejemplo anterior.

Solución:

Fin de año	Depósito	Intereses ganados	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0					$275 000.00
1	$41 440.76	$ 0.00	$41 440.76	$ 41 440.76	$233 559.24
2	$41 440.76	$ 4 144.08	$45 584.84	$ 87 025.60	$187 974.40
3	$41 440.76	$ 8 702.56	$50 143.32	$137 168.92	$137 831.08
4	$41 440.76	$13 716.89	$55 157.65	$192 326.57	$ 82 673.43
5	$41 440.76	$19 232.66	$60 673.42	$252 999.99	$ 22 000.01

El interés ganado al final de un año cualquiera se obtiene al multiplicar la depreciación acumulada al final del año anterior por la tasa de interés.

La depreciación anual en un año cualquiera es la suma del depósito hecho más el interés ganado en ese año.

Ejemplo 10.15

Una empresa pagó $510 000 por un equipo acondicionador de aire. El aparato tiene una vida útil promedio de 12 años y se le estima un valor de desecho de cero. Determine la depreciación acumulada y el valor en libros al cabo de 6 años, considerando una tasa promedio de interés de 12% anual.

Solución:

En primer lugar, es necesario obtener la depreciación anual.

$$D = \frac{(510\,000)(0.12)}{(1.12)^{12} - 1} = \$21\,132.77$$

El depósito de $21 132.77 anuales es una cantidad constante, por tanto, la depreciación acumulada al cabo de 6 años será el valor futuro del depósito anual. Esto es:

$$\text{Depreciación acumulada} = 21\,132.77\left[\frac{(1.12)^6 - 1}{0.12}\right] = \$171\,496.42$$

Por tanto,

$$\text{Valor en libros} = \text{costo} - \text{depreciación acumulada}$$

$$\text{Valor en libros} = 510\,000 - 171\,496.42 = \$338\,503.58$$

Ejercicios 10.5

Utilice el método del fondo de amortización en cada uno de los siguientes ejercicios:

1. Un equipo industrial tiene un costo de $435 000 y un valor de salvamento de $50 000, siendo su vida útil de 5 años. Elabore la tabla de depreciación, tomando en cuenta que los depósitos anuales producen 12% de interés anual.

2. Una escuela adquiere equipo de cómputo con valor de $240 000. Su vida útil esperada es de 3 años y su valor de desecho de $45 000. Elabore la tabla de depreciación, considerando una tasa de interés de 10%.

3. La construcción de una bodega ha costado $634 000, tiene una vida útil de 20 años y se estima que no tendrá valor de desecho. Considerando una tasa de interés de 9% anual, calcule:
   a) La depreciación anual.
   b) La depreciación acumulada y el valor en libros al cabo de 15 años.

4. Una empresa embotelladora de refrescos compró 10 camiones para el reparto de los refrescos a las tiendas de autoservicio y tiendas de abarrotes, a un costo de $6 350 000. A los camiones se les estima una vida útil de 6 años y un valor de desecho de 10% de su costo. Calcule la depreciación acumulada y el valor en libros al cabo de 4 años. Considere que los depósitos anuales se invierten en un fondo al 11.5%.

5. Un taller automotriz compra una compresora de aire con valor de $98 640. La vida útil de dicho aparato es de 12 años, y su valor de salvamento es de $5 000.
   a) Obtenga el depósito anual al fondo de depreciación si la tasa de interés es de 9.2%.
   b) Si el dueño del taller desea vender la compresora al cabo de 3 años a un precio igual a su valor en libros, ¿cuánto deberá pedir?

6. Una compañía adquiere una máquina en $1 260 000, la cual tiene un valor de salvamento de $150 000. Si la aportación anual al fondo de depreciación es de $69 647.39 y la tasa de interés es de 10%, ¿cuál es la vida útil de la máquina?

Respuestas a los ejercicios

Capítulo 1

Ejercicios 1.1

1. 154.453125
2. 190 886.3356
3. 29
4. 14 915.61089
5. 0.841341292
6. 18 548 956.31
7. 133
8. −474.1749372
9. 17.9
10. 32.60061349
11. 118
12. 2
13. 63 715
14. 19.25
15. −13.33243812
16. 17 679.77909
17. 2 340
18. 251 448.36

Ejercicios 1.2

1. 4.82×10^5
2. 2×10^1
3. 1.33×10^{11}
4. 2.58×10^{-7}
5. 4×10^{-2}

6. 7.125×10^{-4}
7. 356
8. 43 650 000
9. 700 000
10. 0.000001
11. 0.0031415
12. 0.62
13. $4.32455828 \times 10^{15}$
14. $1.805537278 \times 10^{20}$
15. 0.024757281
16. 6 580.135144
17. 1.0537
18. $3.360009443 \times 10^{47}$
19. 5 571 550 625
20. 5×10^{10}
21. 5.98×10^{24} kilogramos
22. 696 000 000 metros
23. 9.4608×10^{12} kilómetros
24. 1.44×10^{8} kilómetros
25. 1.048576×10^{9} caracteres
26. El resultado depende de la cotización del día al momento de resolver el ejercicio.

Ejercicios 1.3

1. $\log_2 1024 = 10$
2. $\log_{20} 1 = 0$
3. $\log_{10} 0.001 = -3$
4. $\log_5 78125 = 7$
5. $\log_{100} 100 = 1$
6. $\log_a b = 3x$
7. $22^0 = 1$

8. $8^{\frac{2}{3}} = 4$
9. $4^{-0.5} = 0.5$
10. $20^2 = 400$
11. $11^3 = 1331$
12. $6^t = m$
13. $3 \log_5 u + 5 \log_5 v + 8 \log_5 z$
14. $\log_{12} 50 - 2 \log_{12} x - 5 \log_{12} y$
15. $4[\log_a 6 + \log_a x + \log_a y + 3 \log_a z]$
16. $\log_b m + \frac{1}{3} \log_b n - \log_b p - \frac{1}{2} \log_b q$
17. $\frac{1 + \log_{20} x - \log_{20} y}{4}$
18. $1 + \frac{2}{3} \log_{10} x + \frac{1}{2} \log_{10} y + \frac{1}{2} \log_{10} z$
19. $4 \log_b x + \frac{1}{2} \log_b (x^3 - 2) - 5 \log_b (x + 5)$
20. $\log_a \frac{x^3 y^4}{z^7}$
21. $\log_2 \frac{x \sqrt[3]{y}}{z^5 w}$
22. $\log_c \frac{a^6}{b}$
23. $\log_{10} \sqrt[3]{5.6}$
24. $\log_b = \frac{25t^6}{\sqrt[4]{2t + 3}}$
26. 1.30103

Ejercicios 1.4

1. 1.863061015
2. 3.546666025
3. 1
4. 8.755874856

5. -1.84863015
6. -4.846185136
7. 2.302585093
8. 6.72982407
9. 7.170504085
10. 1
11. -0.673344553
12. -7.079730544
13. 2.35179791
14. 6.45654229
15. 12 589 254.12
16. 0.070794578
17. 31.6227766
18. 0.000158489
19. 8.190705207
20. $1.199606745 \times 10^{13}$
21. 0.2
22. 1
23. 334.2
24. $7.529106644 \times 10^{-15}$
25. 26.03457 cientos de dólares
26. 135.5

Ejercicios 1.5

1. 5 352.958294
2. 39.86339007
3. 436.8837242
4. 14 853.46316
5. 2.203944575
6. 119.1138902

7. $x = 8$
8. $x = 90$
9. $x = \frac{9}{2}$
10. 0.464101615
11. $x = 4$
12. $w = 32$
13. $x = 4$
14. $t = 1.02925064$
15. $x = 2.54558628$
16. $x = 6.365600171$
17. $x = 20$
18. $z = 1.816496581$ y $z = 0.183503419$
19. $w = 0.06$
20. $p = 3.69812106$
21. 11 días, aproximadamente
22. a) 1.103 gramos; b) 39.1 días
23. pH = 2.4. Se tuvo lluvia ácida en la ciudad
24. a) 2417 computadoras; 27 días, aproximadamente
25. a) $3.548133892 \times 10^{16}$ joules; b) 1000 veces más intenso
26. 6836.9 millones de habitantes
27. 0.846% anual promedio
28. a) 9438 toneladas/día; b) 7 años, aproximadamente
29. 3899522 dólares
30. 13.86 años
31. 9.5 horas

Capítulo 2

Ejercicios 2.1

1. 150
2. 0.8
3. 108
4. 20
5. $\frac{2}{3}$
6. $\frac{59}{11}$
7. 19 827 pares de zapatos
8. 18.75 minutos
9. 90 km/h
10. 245 458.33 dólares
11. 96.35 km/h
12. 1 364 películas/semana
13. 16.3 horas/semana
14. La razón de la cantidad de pintura es 1.17
15. $15 000 000
16. 1 108 033 encendedores
17. 16 litros
18. 22.1 metros
19. 337.5 km
20. 75 hombres
21. El trabajador recibirá el equivalente a 10.68 días de salario
22. 232.14 millas
23. 4 horas
24. $3 825
25. 569 páginas

26. 782.31 dólares
27. 4 horas 12 minutos
28. $739 200
29. 57.69 rpm
30. 4.5 metros
31. 6.5 metros
32. 200 dosis
33. 11 horas/día
34. 70 días
35. 5.625 días
36. 32.14 días
37. 2.56 bobinas
38. $6 000
39. 7.3 días
40. 6 trabajadores más
41. $24 590.16, $27 868.85, $19 672.13, $15 409.84, $12 459.02
42. $409 214.09 para El Anciano Feliz, $353 658.54 para Los Abuelitos y $237 127.37 para La Tercera Edad
43. $3 899 810.02, $4 199795.41, $4 963 394.57
44. 41 562.50 dólares, 53 437.50 dólares
45. $120 000, $150 000, $180 000
46. $212 307.69 para Juan, $159 230.77 para Roberto, $88 461.54 para Raúl
47. $905 para Roberto, $710.48 para Hilda, $383.66 para Alejandro
48. $210 174.15, $223 907.12, $195 918.73
49. $30 561.26, $35 160.58, $34 278.16
50. Tania recibe $50 625, Ester recibe $32 625, Esteban recibe $28 125, Cantidad total repartida: $156 375
51. Liliana recibe $14 788.73, Yolanda tuvo 7 faltas
52. Emma recibe $6 395.06, Patricia recibe; $7 166.67, Martha recibe $7 938.27
53. a) Víctor tuvo 10 faltantes, b) $28 301.89, c) $75 000
54. 8.5 de calificación
55. $9 077.66 por concepto de sueldo devengado y $9 977.59 por días trabajados

Ejercicios 2.2

1. a) 0.13, b) 0.3586, c) 3.5, d) 0.00114, e) 0.0825
2. a) 2.28%, b) 33%, c) 175%, d) 8.5%, e) 0.324%
3. 368
4. 390
5. 3.236
6. 2.4
7. 1.1718
8. 175
9. 9765
10. 7.3185
11. 15%
12. 5 000%
13. 16%
14. 75%
15. 0.125%
16. 143.75
17. 32 000
18. 17 850
19. 10
20. 0.14
21. a) $40.80, b) 299.20
22. $8 160
23. $199 650
24. Conviene comprar en la tienda B
25. $29 100
26. $6 438.40
27. $4 558
28. $6 384; $73 416
29. 25% el hijo mayor, 30% el mediano y 45% el menor
30. 8.5%
31. 32%

32. 29.073%
33. 7.364%
34. 28%
35. 8.8235%
36. 4.364%
37. $580 000
38. 154 857 vehículos
39. 78 000 257 bicicletas
40. $2 232.56
41. $450 000
42. $2 440 000
43. 400 gallinas
44. a) $845, b) $126.75
45. Conviene la propuesta de la universidad
46. 15.5%
47. El resultado no es $1 800, sino $1 759.50

Ejercicios 2.3

1. $252, $777
2. $1 059.50
3. $1 132.80
4. $2 586.21
5. $548.39
6. $7 885.71
7. $600
8. $1 472.88
9. $4 556.96
10. $545.20
11. 20%
12. 49.2354%
13. 66.67%
14. $778.38

15. No. 55% de utilidad
16. a) 37.5%, b) 27.27%
17. 30%
18. 13.1%
19. $690
20. Perdió $25 560.58
21. 26.47%
22. 20%
23. 81.82%
24. $4.26 el kilogramo
25. $34.74 el kilogramo
26. $12.57 el litro
27. $171.82 por pastel

Ejercicios 2.4

1. $152, $798
2. $31 500
3. 15%
4. $335.71
5. 66.67%
6. $267 444
7. $4 465.40
8. La que ofrece los descuentos del 30 y 20%
9. $22 230
10. $4 378.34
11. $1 800
12. $208.23
13. 14.5%
14. 31.6%
15. $25 671.36, 31.36%
16. 28.018%

Capítulo 3

Ejercicios 3.1

1. 67, 75, 83
2. 40, 25, 10
3. $\frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}$
4. 127, 255, 511
5. $(x+4a), (x+5a), (x+6a)$
6. $-7, -2, 3, 8, 13, 98$
7. 0, 2, 6, 12, 20, 462
8. $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, 2, \frac{13}{6}, \frac{64}{23}$
9. log 1, log 4, log 9, log 16, log 25, log 484
10. 6, 4, 6, 4, 6, 4
11. $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{121}{1048\,576}$
12. $\frac{5}{2}$
13. 5, 8, 11, 14, 17
14. $-10, 17, -10, 17, -10$
15. 2, 4, 8, 32, 256
16. 84, 1.446627135, 1.028809874, 1.002030822, 1.00013526
17. 500, 50, 5, 0.5, 0.05
18. 5, 14, 27, 44
19. $\frac{49}{20}$
20. -182
21. 189
22. 37.5
23. $1+3+5+7+9+11=6^2$
24. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

Ejercicios 3.2

1. a) Sí es sucesión aritmética
   b) No es sucesión aritmética
   c) Sí es sucesión aritmética
   d) No es sucesión aritmética
2. a) 370, 6 880
   b) -19.8, -236.8
3. 245
4. $\frac{37}{3}$
5. 3.95
6. 32, 72
7. $\frac{238}{5}$
8. $\frac{-281}{2}$
9. $\frac{204}{5}$, 381
10. $(x + 21), (10x + 30)$
11. $13, \frac{83}{5}, \left(\frac{3n}{5} + \frac{47}{5}\right)$
12. $5.5n + 9.5$
13. 559
14. a) 59, b) 10, c) 25
15. a) 10 384, b) 350, c) $\frac{1460}{3}$
16. 25 002 550
17. a) 10 términos, b) 6, c) 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 68, 74
18. 1750
19. 105
20. 151 días
21. \$30 680
22. 201 días
23. \$6 900, séptimo mes
24. \$42
25. \$499 500
26. Compañía Y si piensa trabajar sólo un año; Compañía X si piensa trabajar más de un año por tiempo indefinido, ya que el sueldo mensual es mayor.

27. 630 tubos
28. \$40 800
29. Segunda semana: 444 mg; tercera semana: 388 mg; cuarta semana: 332 mg; quinta semana: 276 mg.

Tema especial. Gauss y las sucesiones

a) 12 502 500

b) $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Ejercicios 3.3

1. a) sí es sucesión geométrica
   b) no es sucesión geométrica
   c) no es sucesión geométrica
   d) sí es sucesión geométrica
2. 0.010611166
3. $1.980704063 \times 10^{28}$
4. 98 304, 131 070
5. 8.107821675
6. 2.848082252
7. a) 14 términos, b) 12 términos
8. 3
9. 15.875
10. 3
11. 511.5
12. \$24 435 948
13. \$3 289 880.45
14. \$$1.844674407 \times 10^{19}$
15. 32.3 millones de habitantes
16. 14.8 millones de dólares
17. 6.6% mensual
18. 5.1% anual promedio
19. 10.833 meses
20. 163 868 sarapes

Capítulo 4

Ejercicios 4.1

1. $18 400
2. 23.78% anual
3. $8 136.17
4. $625
5. $2 868.75
6. $1 354.20
7. $115 095, $40 095
8. $1 455
9. $3 486, $10 486
10. $4 374.27
11. $16 700
12. $120 000
13. $21 315.35
14. 6% anual
15. 4.5% mensual
16. 25% anual
17. $1 291.67
18. 17% anual
19. 7 meses
20. 29 años y 5 meses, aproximadamente
21. 6 meses
22. Invertir $13 333.33 al 7.32% anual y $6 666.67 al 2.32% cuatrimestral
23. Invertir $30 000 al 10% semestral y $10 000 al 1.5% mensual
24. $7 250
25. Invertir $27 000 en bonos, $54 000 en papel comercial y $19 000 a plazo fijo

Ejercicios 4.2

1. $624.51, $614.28
2. $8781.50, $8661.21
3. $12440.19
4. $7720.53
5. a) $51023.81, b) $51937.89
6. $10961, $10943.73
7. $14658.03
8. Banco del Este: $51115.46, Banco del Oeste: $52651.60. Conviene invertir en Banco del Oeste
9. 10.514% anual
10. $177855.32
11. $3925.23, $181780.55
12. $151.61, $7651.41
13. $114000
14. $8287.98
15. 47.5744% anual
16. 120% anual
17. 0.42078% en el periodo de 28 días, 5.41% anual
18. 8.6667% por periodo, 62.4% anual
19. 75 días
20. 15 de octubre
21. 8 de julio
22. 17 días
23. $24000
24. $148000 en Banca Financiera y $52000 en Banco Comercial
25. Conviene pedir el préstamo
26. Conviene pagar de contado
27. Conviene aceptar la segunda opción
28. Conviene aceptar la primera oferta
29. $535, $24635

30. a) $110061.96, b) $109933.75, c) $109805.82
31. 10 meses
32. $64000
33. 90% anual

Ejercicios especiales

1. $73400
2. Conviene la inversión en pesos
3. Al señor Godínez le conviene pedir el préstamo, ya que el descuento es mayor al interés que se pagará.

Ejercicios 4.3

1. Abono mensual = $9288; intereses = $139968
2. $878.48 por quincena
3. $5130.63
4. a) $20400 por mes, b) $17925 por mes
5.

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$4140
1	$ 690	[redacted]103.50	[redacted] 793.50	$3450
2	$ 690	$ 86.25	$ 776.25	[redacted]2760
3	$ 690	$ 69.00	$ 759.00	$2070
4	$ 690	$ 51.75	$ 741.75	[redacted]1380
5	$ 690	[redacted] 34.50	[redacted] 724.50	[redacted] 690
6	[redacted] 690	[redacted] 17.25	$ 707.25	$ 0
Total	[redacted]140	[redacted].25	[redacted]502.25	

6. abono semanal = $437.54; intereses = $2751.92
7. abono mensual = $7405.68
8. abono quincenal = $230.18; intereses = $754.26

9.

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$10 000
1	$ 1 250	$ 300.00	$ 1 550.00	$ 8 750
2	$ 1 250	$ 262.50	$ 1 512.50	$ 7 500
3	$ 1 250	$ 225.00	$ 1 475.00	$ 6 250
4	$ 1 250	$ 187.50	$ 1 437.50	$ 5 000
5	$ 1 250	$ 150.00	$ 1 400.00	$ 3 750
6	$ 1 250	$ 112.50	$ 1 362.50	$ 2 500
7	$ 1 250	$ 75.00	$ 1 325.00	$ 1 250
8	$ 1 250	$ 37.50	$ 1 287.50	$ 0
Total	**$10 000**	**$1 350.00**	**$11 350.00**	

10. a) $511.94; b) $782.96

11.

Mes	Tasa de interés	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0					2 300.00
1	8.4%	287.50	16.10	303.60	2 012.50
2	8.8%	287.50	14.76	302.26	1 725.00
3	9.3%	287.50	13.37	300.87	1 437.50
4	9.3%	287.50	11.14	298.64	1 150.00
5	9.5%	287.50	9.10	296.60	862.50
6	9.0%	287.50	6.47	293.97	575.00
7	9.5%	287.50	4.55	292.05	287.50
8	10.0%	287.50	2.40	289.90	0.00
Total		**2 300.00**	**77.89**	**2 377.89**	

12.

Mes	TIIE más 14 puntos	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0					$18 000
1	23.32%	$ 3 000	$ 349.80	$ 3 349.80	$15 000
2	23.14%	$ 3 000	$ 289.25	$ 3 289.25	$12 000
3	23.25%	$ 3 000	$ 232.50	$ 3 232.50	$ 9 000
4	23.61%	$ 3 000	$ 177.08	$ 3 177.08	$ 6 000
5	23.74%	$ 3 000	$ 118.70	$ 3 118.70	$ 3 000
6	24.00%	$ 3 000	$ 60.00	$ 3 060.00	$ 0
Total		**$18 000**	**$1 227.33**	**$19 227.33**	

13.

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$3 000
1	$ 350	$ 70.20	$ 420.20	$2 650
2	$ 500	$ 62.01	$ 562.01	$2 150
3	$ 600	$ 50.31	$ 650.31	$ 1 550
4	$ 750	$ 36.27	$ 786.27	$ 800
5	$ 800	$ 18.72	$ 818.72	$ 0
Total	**$3 000**	**$ 237.51**	**$ 3 237.51**	

14. $54 000
15. $17 815.80
16. 60.49% anual
17. 90% anual
18. 18 quincenas
19. 14 meses

Ejercicio especial

1. a) Conviene pedir el crédito en Banca Tapatía
   b) 17.3958% anual

Tema especial: tarjeta de débito

1. $5 219.35
2. $2 294.12
3. $13 200
4. $6 045.16, $33.32

Tema especial: tarjeta de crédito

1. Sí es posible. Basta con pagar el saldo total en la fecha límite de pago.
2. La diferencia radica en lo siguiente: En la tarjeta de crédito se dispone de un crédito revolvente, mientras que en la tarjeta de débito se dispone del dinero propio.
4. $153.57
5. $12 498.34

Ejercicios 4.4

1. $297, $5 103
2. 245.33 €, 8 954.67 €
3. $245 871.07
4. a) No le alcanza. Le faltan $918, b) $36 964.29
5. 36.5% anual
6. 25% anual, 26.667% anual
7. $14 300, $13 442
8. 29 de mayo
9. 32.2497% anual
10. $16 206.95, 39.1462% anual
11. 22451.27 dólares
12. $11 027.50
13. 40.5556% anual, 42.5904% anual
14. 25.3057% anual
15. $58 665.93
16. $8 341.49, $88.51
17. $19 241.11
18. 22 de octubre
19. $23 333.96, 25.4164% anual
20. $318 421.06
21. $37 697.15
22. 25.6786% anual
23. 54.5455% anual. $61 818.18

Ejercicio especial

1. a) Conviene descontar el pagaré en Valores de Occidente.
   b) Conviene descontar el pagaré en Valores de Occidente.
   c) 20.2931% anual.
2. a) $169 429.70, b) Alejandro tuvo una ganancia de $1 559.70, c) Hubiera tenido una pérdida de $232.09, d) $10 750.77, e) 40.7997 días antes del vencimiento. En la práctica, 40 días antes del vencimiento.
3. 48% anual

Tema especial: CETES

1. a) $9.929067, b) 100 714 Cetes, c) $7 143.95, d) 9.185% anual
2. a) $706 673.60, b) $725 000, c) 10.259% anual, d) $18 326.40
3. a) $9.573311, b) 7.548% anual, c) $9.673667, d) 9.20% anual
4. a) 10.031% anual, b) 80 629 Cetes, c) $6 290.67

Capítulo 5

Ejercicios 5.1

1. $69 175.29, $9 175.29

Mes	Capital al inicio del mes	Interés ganado en el mes	Monto compuesto al final del mes
1	$60 000.00	$1 440.00	$61 440.00
2	$61 440.00	$1 474.56	$62 914.56
3	$62 914.56	$1 509.95	$64 424.51
4	$64 424.51	$1 546.19	$65 970.70
5	$65 970.70	$1 583.30	$67 554.00
6	$67 554.00	$1 621.30	$69 175.30

2. $31 225.72, $11 225.72
3.

Año	Precio al inicio del año	Aumento	Precio al final del año
1	$5.00	$0.75	$5.75
2	$5.75	$0.86	$6.61
3	$6.61	$0.99	$7.60
4	$7.60	$1.14	$8.74
5	$8.74	$1.31	$10.05

4. 24 434.03 dólares
5. $101 715.15
6. $27 193.67

7. $1.536535187 \times 10^{12}$ dólares
8. a) \$39 622.95, b) \$1 207.95
9. 10 510 474 m^3 de agua
10. \$149 262.78
11. Conviene invertir al 10.4% anual capitalizable cada bimestre
12. \$1 340 185
13. \$1 554 511, 34% de aumento
14. \$18 830.42, 42.3312% de aumento
15. \$9.15, 34.5% de aumento
16. \$8 775.76
17. \$54 304.26
18. 6 679 105 habitantes
19. Conviene invertir en Banco del Norte
20. 41 056.54 €
21. \$597.32
22. \$26 025.19
23. \$13 400
24. \$311 544.25
25. \$36 022.48
26. \$11 952 642.61
27. \$1 038 926.52
28. 30 840.89 dólares
29. Conviene aceptar la segunda oferta
30. \$41 140.04
31. \$2 000
32. Sí alcanza a liquidar sus deudas, ya que el pago que se tiene que hacer es de \$11 228.
33. \$9 279.17
34. 20 semestres
35. 236.8164 semanas
36. Aproximadamente 7 años y 9 meses

37. Para mediados del 2010, aproximadamente
38. 19.312 meses
39. 20 años de edad
40. 37.3793 meses
41. 8.471% anual
42. 25% anual
43. 33.9598% anual
44. a) 193.75%, b) 30.92% anual promedio
45. a) 8.6845% anual promedio, b) 1483.2 millones de pies cúbicos
46. 752.51% anual
47. a) $2.55, b) 2.915% mensual promedio
48. a) $13 167.10, b) 42.7328%, c) 3.01% mensual promedio
49. 10 meses
50. a) 22.29%, b) 1.691% mensual promedio
51. $41 625.76, $23 500
52. $14 000
53. El incremento acumulado al precio de la gasolina será de 29.58%. Muy superior a la inflación esperada.
54. $42 000
55. 38.1829 bimestres

Ejercicios especiales

1. $69 076.88
2. 35.2221% anual

Ejercicios 5.2

1. $78 515.70
2. Teórico: $94 589.13, Comercial: $95 087.90
3. 48 919.91 dólares
4. 30 673.27 €

5. Teórico: $190 000, Comercial: $190 000
6. Teórico: $10 864.64, Comercial: $10 863.62
7. 22 138.82 dólares
8. $125 881.15
9. $515 564.37
10. $89 233.57
11. 11% anual
12. 62.6 quincenas

Ejercicio especial

1. 11% anual

Ejercicios 5.3

1. 35.8564% anual
2. 23.0256% anual
3. 17.6674% anual
4. 10.9614% anual
5. 12.5543% anual
6. 32.1242% anual
7. 54.8964% anual
8. Banco del Sur
9. Es indiferente. Las tasas efectivas son iguales
10. 22.5267% anual
11. 60.2420% anual, 59.5043% anual
12. 12.2238% anual
13. 25.0582% anual
14. 61 854.70 dólares, 25 854.70 dólares
15. 38 066.03 €
16. $107 689.07
17. 14 219.56 dólares

18. $448 988.88
19. $129702.61
20. a) 23% anual, b) 25.5864% anual, c) 12.0653 en el periodo (de 6 meses)
21. a) 9.53226% anual, b) 10% anual, c) 21% en el periodo bianual
22. a) 0.2917% quincenal, b) 7.23989% anual, c) 1.76281% en el trimestre
23. 13.140821% en el periodo
24. a) $70 521.54, b) 12.22396% en el periodo, c) 31.8881% anual, d) 28.3267% anual.
25. 7.4297% en el periodo
26. 5.0625% en el periodo bimestral

Ejercicios 5.4

1. $13 763.83
2. $9 084.50
3. $25 693
4. 14 720 dólares
5. $7 140.37
6. $85 991.63
7. $1 542 012.79
8. $11 351.55
9. Primer pago: $246 215.33, segundo pago: $320 079.92
10. $179 510
11. $12 993.67
12. $50 390.06 en el mes 10, $83 983.43 en el mes doce
13. $28 043.53
14. $1 776.37
15. $52 747.35
16. $1 451.50 a los dos meses, $2 903 a los 4 meses, $4 354.50 a los 6 meses
17. A los 18 años recibirá $791 271.89 y a los 21 años recibirá $1 186 907.83
18. $67 185.43
19. $44 855.07 a los 6 meses, $58 311.59 a los 8 meses, $89 710.14 a los 9 meses

20. $78 024.20 a los 3 meses y $234 072.60 a los 6 meses
21. A las 8 quincenas a partir del momento actual
22. A los 4 meses a partir del momento actual
23. A los 34 meses y 40 días a partir del momento actual
24. 3 meses y 14 días
25. 16 meses y 8 días
26. 3 meses y 13 días
27. 43% anual capitalizable cada mes
28. 40% anual capitalizable quincenalmente

Ejercicios especiales

1. a) $13 356.67, b) $13 405. 51
2. $1 676 cada mes
3. 5 meses y 6 días a partir del momento actual
4. 53% anual

Ejercicios 5.5

1. a) $140 255.17307, b) $141 059.876062, c) $141 762.525961, d) $141 873.358806, e) $141 906.556543, f) $141 906.581024, g) $141 906.737476, h) $141 906.754859
2. 62 860.50 €, 25 860.60 €, 5.443% anual
3. a) 31 200 dólares, b) 34 948.44 dólares, c) 35 013.45 dólares
4. $55 776.21
5. $33 138.66 y $33 155.13
6. Conviene recibir $69 200 en 8 meses
7. $38 168.97
8. $14 452.10
9. 40 089.86 dólares
10. $714 346.09
11. 6.3% anual nominal, 6.5027% anual efectiva
12. 18.8334% anual nominal, 20.7236% anual efectiva

13. 32.31298% anual
14. Conviene escoger el banco que da la tasa de 25%
15. 11.3484% anual nominal
16. 18.2322% anual
17. 28.5179% anual
18. 14.9070% anual
19. 4 años 9 meses 10 días
20. 16 meses 4 días
21. $6 854.15
22. $2 248.94
23. 8 482.50 dólares
24. 1 708 410 millones de dólares
25. Para el año 2012
26. 3 meses 24 días
27. 19 de enero de 2008

Ejercicios 5.6

1. 8.96%
2. 401.21%
3. 0.40%
4. 295.74 dólares
5. $5 492.90
6. $2 203
7. 13.6734 años
8. $5 541.52
9. 20.56%
10. $49.03, 2.14%
11. 225.99%
12. 225.98%
13. 0.2466% mensual promedio
14. 1.66%

15. 0.693%
16. 19.8626%, 6.225% anual
17. 0.02026% diario
18. $12 575.52 por mes
19. 4.587% anual
20. −0.1295% mensual
21. 0.2874% mensual, 3.5033% anual
22. −0.1634% mensual
23. −2.97% anual
24. 24.02% anual efectiva
25. 1.29% anual
26. a) 4.40%, b) Un poco mayor a la inflación
27. Sí hubo un aumento real de sueldo
28. 2.91%
29. $10 029.41
30. $10 804.52
31. $15 250.48
32. La inversión tuvo una fuerte pérdida
33. a) $50 880.11, b) $50 050.82, c) 0.10165% en el trimestre, d) 0.4074% anual
34. a) $174 742.21, b) $132 789.71, c) 4.1346% anual real efectiva
35. Sí tuvo un rendimiento real; éste fue de 1.31% anual
36. 7.2725 años
37. 33.29%
38. $313 492.48

Capítulo 6

Ejercicios 6.1

4. Anualidad: $172; periodo de pago: una quincena; plazo de la anualidad: 9 meses

Ejercicios 6.2

1. $182 946.03, $62 946.03
2. $155 305.92, $25 705.92
3. $70 960.15, $10 960.15
4. 94 487.41 dólares
5. $20 749.94
6. $39 259.68
7. $25 334.77
8. $161 583.10
9. 75 230.77 €
10. $1 714.22, $185.78
11. $3 100
12. $58 895.51
13. $816 232.35
14. $4 023.67
15. $1 224.44
16. $6 365
17. $13 638.13
18. $2 533.51
19. $61 494.51
20. $6 784
21. $6 726.60
22. a) $10 091.94, b) $1 211 032.80, c) $558 532.80, d) $1 428 532.80
23. a) $21 353, b) $21 443.64
24. $223.13, $1 113.59
25. 22 semanas
26. 96 meses
27. 61.737315 quincenas
28. 27.53403159 meses, a) $1 582.55, b) $860.17
29. 16.525 meses

30. 211 pagos mensuales de $7 500 y un último pago de $5 544.64
31. 146 pagos quincenales de $4 000 y un último pago por $3 524.50
32. infinito número de retiros
33. $12 970. Tasa nominal = 69.6% anual
34. Tasa nominal = 32.7758% anual. Tasa efectiva = 38.4778% anual
35. $17 058. Tasa nominal = 7.7% anual. Tasa efectiva = 8% anual
36. 10.45% anual capitalizable cada trimestre
37. Plan normal: 27.70% anual. Plan intensivo: 37.18% anual
38. $3 370.60
39. $67 300.71, $11 300.71
40. $66 282.22
41. $114 044.61
42. a) $10 585.59, b) $17 445
43. $67 695.16
44. Conviene comprar la cámara en la tienda El Norte
45. $4 045
46. $1 277 519
47. $11 552 452.84
48. $950 532
49. $9 945
50. $1 859.73
51. $263.43
52. Aproximadamente 3 meses antes del plazo establecido inicialmente
53. 67.2536% anual
54. $1 027.22 cada mes y 2 pagos navideños de $4 108.88

Ejercicios especiales

1. 17.28% anual
2. $3 119.89

Tema especial: anualidades y capitalización continua

1. $743 276.98
2. $359.58
3. Conviene recibir $8 000 000 ahora
4. $3 318
5. $2 444.17, $56 650.20
6. $1 454.50
7. 100 retiros mensuales
8. Aproximadamente 15 depósitos semestrales

Ejercicios 6.3

1. $F_1 > F_2$
2. a) $4 178 245.71, b) $3 979 281.63, c) $198 964.08, d) $198 964.08
3. $49 205.51, $13 205.51
4. $515.65
5. $401.89
6. $32 450.03, $3 147.97
7. $37 160.52
8. $3 155.21, $1 094.79
9. $10 184.95
10. $147 025.28
11. $1 118.83, $32 870.48
12. $3 454.59
13. $487 916.82
14. $73 395
15. $811.79
16. $907.54
17. $1 057.17
18. 84 meses
19. 23.712657 quincenas
20. El señor Corona se jubilará aproximadamente a los 45 años

21. 120 quincenas
22. 83 retiros de $7 000 y un último de $4 154.35. Infinito número de retiros de $2 500
23. 17.79468704 meses. a) $2 175.07, b) $1 748.75
24. 34% anual capitalizable cada semestre. 36.89 % anual
25. 23.8025% anual capitalizable cada bimestre
26. 8.2504% anual capitalizable cada cuatrimestre
27. 32.7682% anual capitalizable cada quincena
28. 8.2398% anual capitalizable cada semana
29. $109 221.32
30. Conviene recibir $10 000 al mes
31. Conviene la segunda oferta
32. $2 270.48
33. $60 863.31
34. $64 376.75
35. $35 580.66
36. $3 269.95, $9 809.84
37. a) $178 097.67, b) $206 593.29
38. $18 383.71, $4 376.29
39. $4 697.12
40. $5 221.65 los primeros seis meses y $10 443.30 los siguientes seis meses

Tema especial: bonos del ahorro nacional

1. $24.82
2. $3 490.53
3. 400% anual

Ejercicios 6.4

1. $285 988
2. $761 723.19, $2 390 613.69
3. a) $3 232.05, $10 476.90, b) $3 570.19, $11 263.42
4. $3 458 074.61

5. $203 579.42
6. $173 084.27
7. $7 848 291.72
8. $211789.29
9. $2 937 768
10. $2 949 084.67
11. 81 pagos quincenales
12. 75.49266 meses. 1 974.17 dólares
13. 25% anual capitalizable cada mes
14. 24% anual capitalizable cada trimestre
15. 38.93% anual capitalizable cada bimestre
16. 10 meses
17. 120 meses
18. 4 años
19. $5 666.26
20. $5 924.11
21. $2 692.91

Capítulo 7

Ejercicios 7.1

4. $41 442.4144

Trimestre	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$ 200 000.0000
1	$ 28 242.4144	$ 13 200.0000	$ 41 442.4144	$ 171757.5856
2	$ 30 106.4137	$ 11 336.0007	$ 41 442.4144	$ 141 651.1719
3	$ 32 093.4371	$ 9 348.9773	$ 41 442.4144	$ 109 557.7348
4	$ 24 211.6039	$ 7 230.8105	$ 41 442.4144	$ 75 346.1309
5	$ 36 469.5698	$ 4 972.8446	$ 41 442.4144	$ 38 876.5611
6	$ 38 876.5614	$ 2 565.8530	$ 41 442.4144	$ –0.0003

5. $9 762.7142

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$ 70 000.0000
[illegible]	$ 8 012.7142	$ 750.0000	$9 762.7142	$ 61 987.2858
2	$ 8 213.0321	$1 549.6821	$9 762.7142	$ 53 774.2537
3	$ 8 418.3579	$ 344.3563	$9 762.7142	$ 45 355.8958
4	$ 8 628.8168	$1 133.8974	$9 762.7142	$ 36 727.0790
5	$ 8 844.5372	$ 918.1770	$9 762.7142	$ 27 882.5418
6	$ 9 065.6507	$ 697.0635	$9 762.7142	$ 18 816.8911
7	$ 9 292.4914	$ 470.2228	$9 762.7142	$ 9 524.3997
8	$ 9 524.6042	$ 238.1100	$9 762.7142	$ −0.2045

6.

Bimestre	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$ 25 000.0000
1	$ 4 494.3462	$ 1 333.3333	$ 5 827.6795	$ 20 505.6538
2	$ 4 734.0446	$ 1 093.6349	$ 5 827.6795	$ 15 771.6092
3	$ 4 986.5270	$ 841.1525	$ 5 827.6795	$ 10 785.0822
4	$ 5 252.4751	$ 575.2044	$ 5 827.6795	$ 5 532.6071
5	$ 5 532.6071	$ 295.0724	$ 5 827.6795	$ 0.0000

7. amortización $= \dfrac{25\,000}{5} = \$5000$

Bimestre	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$25 000.0000
1	$5 000.0000	$1 333.3333	$6 333.3333	$20 000.0000
2	$5 000.0000	$1 066.6667	$6 066.6667	$ 15 000.0000
3	$5 000.0000	$ 800.0000	$5 800.0000	$10 000.0000
4	$5 000.0000	$ 533.3333	$5 533.3333	$ 5 000.0000
[illegible]	$5 000.0000	$ 266.6667	$5 266.6667	$ 0.0000

8. $7 104.5195

[illegible]	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$ 7 104.5195
1	$1 369.7505	$ 130.2495	$1 500.0000	$ 5 734.7690
2	$1 394.8626	$ 105.1374	$1 500.0000	$ 4 339.9064
[illegible]	$1 420.4350	$ 79.5650	$1 500.0000	$ 2 919.4714
4	$1 446.4764	$ 53.5236	$1 500.0000	$ 1 472.9950
5	$1 472.9951	$ 27.0049	$1 500.0000	$ −0.0001

9. amortización $= \frac{7\,104.5195}{5} = \$1420.9039$

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$ 7 104.5195
1	$ 1420.9039	$ 130.2495	$ 1551.1534	$ 5 683.6156
2	$ 1420.9039	$ 104.1996	$ 1525.1035	$ 4 262.7117
3	$ 1420.9039	$ 78.1497	$ 1499.0536	$ 2 841.8078
4	$ 1420.9039	$ 52.0998	$ 1473.0037	$ 1420.9039
5	$ 1420.9039	$ 26.0499	$ 1446.9538	$ 0.0000

10. $3 160.5394

Quincena	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0	$ 3 160.5394	$ 0.0000	$3 160.5394	$ 15 339.4606
1	$ 3 007.1448	$153.3946	$3 160.5394	$ 12 332.3158
2	$ 3 037.2162	$123.3232	$3 160.5394	$ 9 295.0996
3	$ 3 067.5884	$ 92.9510	$3 160.5394	$ 6 227.5112
4	$ 3 098.2643	$ 62.2751	$3 160.5394	$ 3 129.2469
5	$ 3 129.2469	$ 31.2925	$3 160.5394	$ 0.0000

11. $187 000

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0	$ 5 448.75	$ 0.00	$ 5 448.75	$ 181 551.25
1	$ 2 664.96	$ 2 783.79	$ 5 448.75	$ 178 886.29
2	$ 2 705.83	$ 2 742.92	$ 5 448.75	$ 176 180.46
3	$ 2 747.32	$ 2 701.43	$ 5 448.75	$ 173 433.14
4	$ 2 789.44	$ 2 659.31	$ 5 448.75	$ 170 643.70

12. $52 585.99

13.

Bimestre	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$40 000
1	$ 4 000	$1 840	$ 5 840	$36 000
2	$ 8 000	$1 656	$ 9 656	$28 000
3	$12 000	$1 288	$13 288	$16 000
4	$16 000	$ 736	$16 736	$ 0

14.

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$ 73 040.000
1	$ 8 478.7685	$ 1 217.3333	$ 9 696.1018	$ 64 561.2315
2	$ 8 620.0813	$ 1 076.0205	$ 9 696.1018	$ 55 941.1502
3	$ 8 763.7493	$ 932.3525	$ 9 696.1018	$ 47 177.4009
4	$ 8 909.8118	$ 786.2900	$ 9 696.1018	$ 38 267.5891
5	$ 9 058.3086	$ 637.7932	$ 9 696.1018	$ 29 209.2805
6	$ 29 209.2805	$ 486.8213	$ 29 696.1018	$ 0.0000

15. 6 meses

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$ 3 260.00
1	$509.61	$ 83.39	$593.00	$ 2 750.39
2	$522.65	$ 70.35	$593.00	$ 2 227.74
3	$536.02	$ 56.98	$593.00	$ 1 691.72
4	$549.73	$ 43.27	$593.00	$ 1 141.99
5	$563.79	$ 29.21	$593.00	$ 578.20
6	$578.21	$ 14.79	$593.00	$ 0.00

16. 6.434854 meses

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$ 60 000.00
1	$ 8 850.00	$ 1 150.00	$10 000.00	$ 51 150.00
2	$ 9 019.62	$ 980.38	$10 000.00	$ 42 130.38
3	$ 9 192.50	$ 807.50	$10 000.00	$ 32 937.88
4	$ 9 368.69	$ 631.31	$10 000.00	$ 23 569.19
5	$ 9 548.26	$ 451.74	$10 000.00	$ 14 020.93
6	$ 9 731.27	$ 268.73	$10 000.00	$ 4 289.66
7	$ 4 289.66	$ 82.22	$ 4 371.88	$ 0.00

17. 4.8567624 trimestres

Trimestre	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				US $50 000.00
1	US 9 847.50	US 1 152.50	US 11 000.00	US 40 152.50
2	US 0 074.48	US 925.52	US 11 000.00	US 30 078.02
3	US 10 306.70	US 693.30	US 11 000.00	US 19 771.32
4	US 10 544.27	US 455.73	US 11 000.00	US 9 277.05
5	US 9 227.05	US 212.68	US 9 439.73	US 0.00

18. a) 3 pagos completos de 20 000 dólares y un cuarto pago por una cantidad menor.
b) El último pago será por 16 920.57 dólares
c)

Bimestre	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				US 73 600.00
1	US 18 650.67	US 1 349.33	US 20 000.00	US 54 949.33
2	US 18 992.60	US 1 007.40	US 20 000.00	US 35 956.73
3	US 19 340.79	US 659.21	US 20 000.00	US 16 615.94
4	US 16 615.94	US 304.63	US 16 920.57	US 0.00

19. Si $n = 4$, entonces $A = 19251$ dólares

Bimestre	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				US 73 600.00
1	US 17 901.67	US 1 349.33	US 19 251.00	US 55 698.33
2	US 18 229.86	US 1 021.14	US 19 251.00	US 37 468.47
3	US 18 564.08	US 686.92	US 19 251.00	US 18 904.39
4	US 18 904.42	US 346.58	US 19 251.00	US −0.03

20. a) $526.49, b) $4 427.36, c) I = $170.76, amortización = $355.73

21. $186 935.11, $301 357.87

22. I = $1 304.96, amortización = $3 447.63, saldo insoluto = $48 750.94

23. a) $5 721.81, b) I = $1 153.62, amortización = $4 568.19, saldo insoluto = $81 953.56, c) $135 046.44, 62.23%

24. a) $2 432.50, b) I = $1 451.60, amortización = $980.90, c) $95 792.50, d) 36.138%

25. a) 57.97%, b) En el pago número 78, aproximadamente, c) En el pago número 96

26. 15 pagos quincenales

Tema especial. Unidades de inversión

1. $194 247.45

2. $254 858.87

3. Conviene la inversión en UDI

4. 1 560.11 UDI/mes. 1er. mes: $5 047.37, 2o. mes: $5 061.51, 3er. mes: $5 075.68

Ejercicios 7.2

2. $12 365.81

Mes	Cantidad en el fondo al inicio del mes	Interés ganado en el mes	Depósito hecho al final del mes	Monto al final del mes
[illegible]	0	0	$ 2 000.00	$ 2 000.00
2	$ 2 000.00	$ 24.00	$ 2 000.00	$ 4 024.00
3	$ 4 024.00	$ 48.29	$ 2 000.00	$ 6 072.29
4	$ 6 072.29	$ 72.87	$ 2 000.00	$ 8 145.16
5	$ 8 145.16	$ 97.74	$ 2 000.00	$ 10 242.90
6	$ 10 242.90	$ 122.91	$ 2 000.00	$ 12 365.81

3. $300 016.92

Bimestre	Depósito hecho al inicio del bimestre	Cantidad en el fondo al inicio del bimestre	Interés ganado en el bimestre	Monto al final del bimestre
1	$46 250.00	$ 46 250.00	$ 1 032.92	$ 47 282.92
2	$46 250.00	$ 93 532.92	$ 2 088.90	$ 95 621.82
3	$46 250.00	$ 141 871.82	$ 3 168.47	$ 145 040.29
4	$46 250.00	$ 191 290.29	$ 4 272.15	$ 195 562.44
5	$46 250.00	$ 241 812.44	$ 5 400.48	$ 247 212.92
6	$46 250.00	$ 293 462.92	$ 6 554.00	$ 300 016.92

4. $12 165.71

Mes	Cantidad en el fondo al inicio del mes	Interés ganado en el mes	Depósito hecho al final del mes	Monto al final del mes
1	0	0	$ 12 165.71	$ 12 165.71
2	$ 12 165.71	$ 131.80	$ 12 165.71	$ 24 463.22
3	$ 24 463.22	$ 265.02	$ 12 165.71	$ 36 893.95
4	$ 36 893.95	$ 399.68	$ 12 165.71	$ 49 459.34
5	$ 49 459.34	$ 535.81	$ 12 165.71	$ 62 160.86
6	$ 62 160.86	$ 673.41	$ 12 165.71	$ 74 999.98

5. $954.96

Quincena	Cantidad en el fondo al inicio de la quincena	Interés ganado en la quincena	Depósito hecho al final de la quincena	Monto al final de la quincena
1	0	0	$954.96	$ 954.96
2	$ 954.96	$ 5.66	$954.96	$ 1 915.58
3	$ 1 915.58	$ 11.35	$954.96	$ 2 881.89
4	$ 2 881.89	$ 17.08	$954.96	$ 3 853.93
5	$ 3 853.93	$22.83	$954.96	$ 4 831.72
6	$ 4 831.72	$28.63	$954.96	$ 5 815.31
7	$ 5 815.31	$34.46	$954.96	$ 6 804.73
8	$ 6 804.73	$40.32	$954.96	$ 7 800.01

6. $23 206.51

Trimestre	Depósito hecho al inicio del trimestre	Cantidad en el fondo al inicio del trimestre	Interés ganado en el trimestre	Monto al final del trimestre
1	$23 206.51	$ 23 206.51	$ 696.20	$ 23 902.71
2	$23 206.51	$ 47 109.22	$ 1 413.28	$ 48 522.50
3	$23 206.51	$ 71 729.01	$ 2 151.87	$ 73 880.88
4	$23 206.51	$ 97 087.39	$ 2 912.62	$100 000.01

7. 4 078 dólares
8. 93 972.32 dólares
9. $3 666.02
10. 6.9908 meses

Mes	Cantidad en el fondo al inicio del mes	Interés ganado en el mes	Depósito hecho al final del mes	Monto al final del mes
1	0	0	$ 6 200.00	$ 6 200.00
2	$ 6 200.00	$ 77.50	$ 6 200.00	$ 12 477.50
3	$ 12 477.50	$ 155.97	$ 6 200.00	$ 18 833.47
4	$ 18 833.47	$ 235.42	$ 6 200.00	$ 25 268.89
5	$ 25 268.89	$ 315.86	$ 6 200.00	$ 31 784.75
6	$ 31 784.75	$ 397.31	$ 6 200.00	$ 38 382.06
7	$ 38 382.06	$ 479.78	$ 6 200.00	$ 45 061.84

11. a) 116.1462 semanas, b) 115.9463 semanas

12. 119.5256 meses

13. Cinco depósitos mensuales de $1 600 y un último depósito de $1 168.19

Mes	Cantidad en el fondo al inicio del mes	Interés ganado en el mes	Depósito hecho al final del mes	Monto al final del mes
1	0	0	$ 1 600.00	$ 1 600.00
2	$ 1 600.00	$ 12.00	$ 1 600.00	$ 3 212.00
3	$ 3 212.00	$ 24.09	$ 1 600.00	$ 4 836.09
4	$ 4 836.09	$ 36.27	$ 1 600.00	$ 6 472.36
5	$ 6 472.36	$ 48.54	$ 1 600.00	$ 8 120.90
6	$ 8 120.90	$ 60.91	$ 1 168.19	$ 9 350.00

14. $259 493.86

Cuatrimestre	Cantidad en el fondo al inicio del cuatrimestre	Interés ganado en el cuatrimestre	Depósito hecho al final del cuatrimestre	Monto al final del cuatrimestre
1	0	0	$ 23 947.79	$ 23 947.79
2	$ 23 947.79	$ 878.09	$ 23 947.79	$ 48 773.67
3	$ 48 773.67	$ 1 788.37	$ 23 947.79	$ 74 509.83
4	$ 74 509.83	$ 3 477.13	$ 23 947.79	$ 101 934.75
5	$ 101 934.75	$ 4 756.96	$ 23 947.79	$ 130 639.50
6	$ 130 639.50	$ 6 096.51	$ 23 947.79	$ 160 683.80
7	$ 160 683.80	$ 7 498.58	$ 23 947.79	$ 192 130.17
8	$ 192 130.17	$ 8 966.07	$ 23 947.79	$ 225 044.03
9	$ 225 044.03	$ 10 502.05	$ 23 947.79	$ 259 493.87

15. 815.95 dólares

16. $27 024.86

17. 13.46% anual capitalizable cada mes

Mes	Depósito hecho al inicio del mes	Cantidad en el fondo al inicio del mes	Interés ganado en el mes	Monto al final del mes
1	$20 000.00	$ 20 000.00	$ 224.33	$ 20 224.33
2	$20 000.00	$ 40 224.33	$ 451.18	$ 40 675.51
3	$20 000.00	$ 60 675.51	$ 680.58	$ 61 356.09
4	$20 000.00	$ 81 356.09	$ 912.54	$ 82 268.63
5	$20 000.00	$ 102 268.63	$ 1 147.11	$ 103 415.74

18. 20.1532% anual capitalizable cada mes

Mes	Cantidad en el fondo al inicio del mes	Interés ganado en el mes	Depósito hecho al final del mes	Monto al final del mes
1	0	0	$20 000.00	$ 20 000.00
2	$ 20 000.00	$ 335.89	$20 000.00	$ 40 335.89
3	$ 40 335.89	$ 677.41	$20 000.00	$ 61 013.30
4	$ 61 013.30	$ 1024.68	$20 000.00	$ 82 037.98
5	$ 82 037.98	$ 1377.77	$20 000.00	$103 415.75

Capítulo 8

Ejercicios 8.1

1. $1 315 789.47
2. $10 000
3. $882 352.94
4. $21 600
5. $2 520
6. 7.72% anual
7. 11.3% anual
8. $1 338 933.33
9. $1 007 723.08
10. $23 064.25
11. $20 498.67
12. $24 451.52
13. $348 768.12
14. $285 413.75
15. $2 950 373.28
16. $222 529.61
17. $143 221.13
18. $11 306.32

19. 13.89% anual
20. 10.145% anual
21. 11.836% anual
22. 9.798% anual
23. 1.5% mensual

Ejercicios 8.2

1. \$136 543.72, \$71 054.71
2. \$197 319.52, \$127 592.45
3. \$852 921.70
4. \$834 532.95
5. \$1 023.07
6. \$2 892.54
7. \$5 926.41, \$50 350.76
8. \$149.14
9. \$2 702.61
10. \$207 136.06
11. \$2 896.34, \$963 043.20
12. \$13 728.76
13. \$1 311 764.04
14. \$873.57
15. Prácticamente se realizan 32 depósitos quincenales
16. 36 pagos.
17. 30 pagos de 110 dólares y un último pago de 45.90 dólares
18. 32.3445% capitalizable bimestralmente, 37.0298% anual efectiva
19. 34.96% anual efectiva
20. 55.1496% compuesto mensualmente
21. \$92 178.07
22. \$120 223.38
23. 244.4181 quincenas. En la práctica, se efectuarán 244 retiros quincenales de \$7 000 cada uno y un último retiro de \$2 931.62 en la quincena número 245.
24. \$7 488.03

Ejercicios 8.3

1. $1 086 747.33
2. $45 607.22, $2 107.22
3. $673 870.55
4. $21 880.87
5. $5 360.96

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$ 12 500.00
1	$ 0.00	$240.00	$ 0.00	$ 12 740.00
2	$ 0.00	$244.61	$ 0.00	$ 12 984.61
3	$4 550.70	$249.30	$4 800.00	$ 8 433.91
4	$ 0.00	$ 161.93	$ 0.00	$ 8 595.84
5	$3 434.96	$165.04	$3 600.00	$ 5 160.88
6	$ 0.00	$ 99.09	$ 0.00	$ 5 259.97
7	$5 259.97	$100.99	$5 360.96	$ 0.00

6. $15 000
7. 22.458% anual
8. $1 065 361.28
9. $145 916.45, $58 383.55
10. $63 674.46
11. $312 662.84
12. $61 862.85, $8 362.85
13. $415 575.59, $65 575.59
14. $423 887.10, $73 887.10
15. $735 005.75
16. $379.7487

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$ 3 000.0000
1	$ 297.2487	$ 82.5000	$379.7487	$ 2 702.7513
2	$ 375.4230	$ 74.3257	$449.7487	$ 2 327.3283
3	$ 455.7472	$ 64.0015	$ 519.7487	$ 1 871.5811
4	$ 538.2802	$ 51.4685	$589.7487	$ 1 333.3009
5	$ 623.0829	$ 36.6658	$659.7487	$ 710.2180
6	$ 710.2177	$ 19.5310	$729.7487	$ 0.0003

17. $12 500, $12 390, $12 280, $12 170, $12 060, $730
18. $102.32, $7 152.32
19. $20.19
20. 2466.48 dólares, 83.52 dólares
21. $132.61
22. $590 698.03
23. a) $274.70, $1 147.49, b) $2 075.39
24.

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				$ 250 000.00
1	$ 19 990.86	$ 5 833.33	$ 25 824.19	$ 230 009.14
2	$ 22 652.37	$ 5 366.88	$ 28 019.25	$ 207 356.77
3	$ 25 562.56	$ 4 838.32	$ 30 400.88	$ 181 794.21
4	$ 28 743.10	$ 4 241.86	$ 32 984.96	$ 153 051.11
5	$ 32 217.49	$ 3 571.19	$ 35 788.68	$ 120 833.62
6	$ 36 011.27	$ 2 819.45	$ 38 830.72	$ 84 822.35
7	$ 40 152.14	$ 1 979.19	$ 42 131.33	$ 44 670.21
8	$ 44 670.19	$ 1 042.30	$ 45 712.49	$ 0.02

25. $205 057.17
26. 36 pagos mensuales
27. 26 depósitos quincenales
28. 12 abonos
29. $1 535.61, $2 035.61, $2 535.61, $3 035.61, $3 535.61, $4 035.61
30. $17 294.53
31. $60 155.40

Ejercicios especiales

1. $F = A\left[\dfrac{g^n - (1+i)^n}{g - (1+i)}\right]$
2. $4 141 099.74
3. $4 918.51
4. 3 depósitos mensuales de $903.39 cada uno, 3 depósitos mensuales de $975.66 cada uno, 3 depósitos mensuales de $1 053.71 cada uno y 3 depósitos mensuales de $1 138.01 cada uno.

Capítulo 9

Ejercicios 9.1

3. El bono será redimido en $98
4. $286.425
5. $940
6. a) $555, b) $460
7. El inversionista recibe $500 en la fecha de vencimiento
8. 4.25 dólares
9. $150000 al vencimiento. $1906.25 cada mes
10. $16250
11. Los bonos se compran a un precio menor a 1000 dólares y no generan intereses. Al cabo de 10 años, el inversionista recibirá 1000 dólares por cada bono comprado.
12. $102.60
13. $17.50

Ejercicios 9.2

1. a) $16.67, b) $10668.80
2. $76
3. $89.55, $4150, $35.35
4. $818.51. Los bonos se compran bajo la par
5. a) $1000, b) $889.21, c) $1128.22
6. a) 57.50 €, b) 49.57 €
7. a) 11% anual, b) $539.36, c) $1240528
8. 10% anual
9. $250
10. 989.09 dólares
11. 12.6% anual
12. 7.78% anual

13. $1000
14. $929.90
15. $149994035
16. 11 trimestres
17. 8 semestres
18. 13.5% anual

Ejercicios 9.3

1. $783.5696, $808.7062
2. $820.3928, $845.5294
3. $590.8461
4. $541.9416
5. 967 dólares
6. $291.1084
7. $738.0654
8. 100 €
9. a) 9.3% anual, b) 867 068.10 dólares, c) 13 485 dólares/bimestre
10. Conviene comprar los bonos ajustables a la inflación

Ejercicios 9.4

1. 13.11% anual capitalizable cada semestre
2. 12.9748% anual capitalizable cada semestre
3. 15.14% anual capitalizable cada semestre
4. 10.06% anual capitalizable cuatrimestralmente
5. 14.31% anual capitalizable cada bimestre
6. 8.26% anual capitalizable cada mes
7. a) 9.7683% anual capitalizable trimestralmente, b) 10.132% anual efectiva
8. 3.038% anual
9. 14.41% anual
10. 11.095% anual

Tema especial. Los bonos en México

1. 1.4536% mensual nominal, 1.4639% mensual efectiva

Capítulo 10

Ejercicios 10.1

1. La depreciación es la pérdida de valor de un activo fijo como consecuencia del uso o del transcurso del tiempo.
2. La vida útil es el tiempo que transcurre entre la compra del activo y su retiro.
3. No. Al contrario, aumentan de valor.

Ejercicios 10.2

1. $825 000, $103 125

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0			$925 000
1	$103 125	$103 125	$821 875
2	$103 125	$206 250	$718 750
3	$103 125	$309 375	$615 625
4	$103 125	$412 500	$512 500
5	$103 125	$515 625	$409 375
6	$103 125	$618 750	$306 250
7	$103 125	$721 875	$203 125
8	$103 125	$825 000	$100 000

El punto de intersección de las dos rectas se encuentra en $t = 4.48$ años, aproximadamente.

2. $56 640

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0			$354 000
1	$56 640	$ 56 640	$297 360
2	$56 640	$ 113 280	$240 720
3	$56 640	$169 920	$184 080
4	$56 640	$226 560	$ 127 440
5	$56 640	$283 200	$ 70 800

3. a) $21 300, b) $7 100
c)

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0			$21 300
1	$7 100	$ 7 100	$14 200
2	$7 100	$14 200	$ 7 100
3	$7 100	$21 300	$ 0

4. $17 250

5. 12 años

6. $448 686.95

7. $451 947.21

8. $808 541.43

9. $283 800

10. $91 847.37

11. $21 550.24

12. $24 452.81

13.

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0			$160 000
1	$25 600	$ 25 600	$134 400
2	$43 200	$ 68 800	$ 91 200
3	$45 600	$114 400	$ 45 600
4	$45 600	$160 000	[redacted] 0

14.

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0			$100000
1	$18225	$18225	$ 81775
2	$17550	$35775	$ 64225
3	$15075	$50850	$ 49150
4	$13500	$64350	$ 35650
5	$12825	$77175	$ 22825
6	$12825	$90000	$ 10000

15. 0.0048 pesos/copia

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0			$ 12000
1	$1488	$1488	$ 10512
2	$1992	$3480	$ 8520
3	$2304	$5784	$ 6216
4	$2040	$7824	$ 4176
5	$1776	$9600	$ 2400

Ejercicios 10.3

1.

Fin de año	Fracción	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0				$ 640000.00
1	6/21	$149942.86	$ 149942.86	$ 490057.14
2	5/21	$124952.38	$ 274895.24	$ 365104.76
3	4/21	$ 99961.90	$ 374857.14	$ 265142.86
4	3/21	$ 74971.43	$449828.57	$ 190171.43
5	2/21	$ 49980.95	$499809.52	$ 140190.48
6	1/21	$ 24990.48	$524800.00	$ 115200.00

2.

Fin de año	Fracción	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0				$175 000.00
1	5/15	$ 58 333.33	$ 58 333.33	$ 116 666.67
2	4/15	$ 46 666.67	$ 105 000.00	$ 70 000.00
3	3/15	$ 35 000.00	$ 140 000.00	$ 35 000.00
4	2/15	$ 23 333.33	$ 163 333.33	$ 11 666.67
5	1/15	$ 11 666.67	$ 175 000.00	$ 0.00

3. $6 760, $5 070, $3 380, $1 690
4. $131 147.54, $128 961.75, $126 775.96, $6 557.38, $4 371.58, $2 185.79
5. $919 736.84
6. $736 000, $234 000

Ejercicios 10.4

1.

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0			$100 000
1	(0.20) (100 000) = $20 000	$20 000	$80 000
2	(0.20) (80 000) = $16 000	$36 000	$64 000
3	(0.20) (64 000) = $12 800	$48 800	$51 200
4	(0.20) (51 200) = $10 240	$59 040	$40 960
5	(0.20) (40 960) = $8 192	$67 232	$32 768

2.

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0			$100 000
1	(0.30) (100 000) = $30 000	$30 000	$70 000
2	(0.30) (70 000) = $21 000	$51 000	$49 000
3	(0.30) (49 000) = $14 700	$65 700	$34 300
4	(0.30) (34 300) = $10 290	$75 990	$24 010
5	(0.30) (24 010) = $7 203	$83 193	$16 807

3. a) $155 000, b) 38.9526% anual
c)

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0			$ 180 000.00
1	(0.389526) (180 000.00) = $70 114.68	$ 70 114.68	$ 109 885.32
2	(0.389526) (109 885.32) = $42 803.19	$ 112 917.87	$ 67 082.13
3	(0.389526) (67 082.13) = $26 130.23	$ 139 048.10	$ 40 951.90
4	(0.389526) (40 951.90) = $15 951.83	$ 154 999.93	$ 25 000.07

4. 36.9043% anual

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0			$ 15 000.00
1	(0.369043) (15 000.00) = $5 535.65	$ 5 535.65	$ 9 464.35
2	(0.369043) (9 464.35) = $3 492.75	$ 9 028.40	$ 5 971.60
3	(0.369043) (5 971.60) = $2 203.78	$ 11 232.18	$ 3 767.82
4	(0.369043) (3 767.82) = $1 390.49	$ 12 622.67	$ 2 377.33
5	(0.369043) (2 377.33) = $877.33	$ 13 500.00	$ 1 500.00

5. 74.6371% anual, $241.66

6. a) 17.4596% anual, b) $57 977.94, c) $337 022.06

7. 8 años

8. 3.7 años

Ejercicios 10.5

1.

Fin de año	Depósito	Intereses ganados	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
U					$ 435 000.00
1	$60 602.75	$ 0.00	$ 60 602.75	$ 60 602.75	$ 374 397.25
2	$60 602.75	$ 7 272.33	$ 67 875.08	$128 477.83	$ 306 522.17
3	$60 602.75	$ 15 417.34	$ 76 020.09	[redacted]204 497.92	$ 230 502.08
4	$60 602.75	$ 24 539.75	$ 85 142.50	$289 640.42	$ 145 359.58
5	$60 602.75	$ 34 756.85	$ 95 359.60	$385 000.02	$ 49 999.98

2.

Fin de año	Depósito	Intereses ganados	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0					$ 240 000.00
1	$ 58 912.39	$ 0.00	$ 58 912.39	$ 58 912.39	$ 181 087.61
2	$ 58 912.39	$ 5 891.24	$ 64 803.63	$ 123 716.01	$ 116 283.98
3	$ 58 912.39	$ 12 371.60	$ 71 283.99	$ 195 000.01	$ 44 999.99

3. a) $12 392.47, b) $363 854.27, $270 145.73

4. $3 383 635.43, $2 966 364.57

5. a) $4 594.05, b) $83 551

6. 10 años

Debido a que el alcance y complejidad técnica crecen de manera sorprendente en los diversos sectores del país. debe tenerse una base sólida en matemáticas financieras, que nos permita hacer frente a las diversas situaciones económico-comerciales de una manera sencilla y práctica.

Por ello, se ha preparado esta excelente obra, no sólo como texto para estudiantes a nivel bachillerato y universitarios de las carreras económico-administrativas, sino como libro de consulta en los cursos de ingeniería económica y evaluación de proyectos de inversión de otras disciplinas.

El libro presenta los conceptos de las matemáticas financieras: sus aplicaciones con base en ejercicios de la realidad económico-financiera de nuestro país; el empleo de las fórmulas en lugar de las tablas financieras; soluciones a los ejercicios del libro y temas especiales actualizados de gran interés que amplían lo tratado en cada capítulo, lo cual le dará las herramientas necesarias para entender y manejar de manera eficiente el dinero.

THOMSON

MEXICO Y AMERICA CENTRAL
Tel. 52(55) 1500-6000
Fax 52(55) 5280-8970
editor@thomsonlearning.com.mx
México. D.F., MÉXICO

AMÉRICA DEL SUR
Fax (5411) 4831-0764
Buenos Aires, ARGENTINA

EL CARIBE
Tel. (787) 758-7580
Fax (787) 758-7573
Hato Rey. PUERTO RICO

PACTO ANDINO
Tel. (571) 340-9470
Fax (571) 340-9475
cliente@thomsonlearning.com.co
Bogotá, COLOMBIA

ESPAÑA
Tel. (3491) 446-3350
Fax (3491) 445-6218
clientes@paraninfo.es
Madrid, ESPAÑA

ISBN 970-686-368-0
9 789706 863683