Qué Son las Matemáticas Financieras

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

AUTOR: Ricardo Dueñas Prieto - Doris Caicedo Torres

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO

ÍNDICE

ÍNDICE

Acceso rápido

GENERALIDADES

DESARROLLO

INTRODUCCIÓN

El objetivo de las matemáticas financieras es darnos a conocer todas las herramientas que nos permiten optimizar los recursos, medir el valor del dinero en el tiempo, tomar decisiones de inversión y financiación acertadas. El incentivo para que se realicen inversiones es recibir un valor por el uso del dinero; es lo que se denomina “interés”, en esta primera unidad vamos a describir las formas para liquidar ese valor que se pagará por el uso del dinero; encontraremos dos formas básicas: el interés simple, operaciones de descuento, y el interés compuesto: cada uno con sus respectivas definiciones, componentes, usos y fórmulas de cálculo.

Esperamos que con esta primera unidad, ustedes aprendan a tomar decisiones de inversión acertadas y algunas bases para la financiación, fundamental para su vida personal y profesional, aprendiendo a calcular el valor del dinero en el tiempo y utilizando las herramientas de interés simple, descuento e interés compuesto.

RECOMENDACIONES ACADÉMICAS

Consideramos como recomendación importante para el estudio del módulo, tener claro que los conceptos son secuenciales, lo que se ve en la primera cartilla es indispensable entenderlo, así como comprender los conceptos y saber aplicarlos, porque serán de igual manera indispensables hasta la última unidad. La invitación es a que realicen todos los ejercicios propuestos, ya que la matemáticas financieras no es solo la resolución de una fórmula, sino la interpretación de lo que estamos buscando y el análisis de sus resultados; es común que se pregunten qué fórmula usar, pero la pregunta adecuada es qué es lo que queremos saber, lo que nos lleva a que cada ejercicio sea diferente.

Es indispensable que lean las cartillas, vean las teleconferencias, y hagan uso de todas las herramientas de acompañamiento que les ofrece esta modalidad educativa.

DESARROLLO DE CADA UNA DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS

1. ¿Qué son las matemáticas financieras?

Las matemáticas financieras constituyen el núcleo de las Finanzas y su propósito es aportar técnicas, métodos y herramientas para el cálculo de operaciones de ahorro, crédito, inversión, riesgo y toma acertada de decisiones financieras. Las matemáticas financieras contribuyen a la planeación, organización, dirección, coordinación, control y evaluación de los proyectos de inversión. Son de uso y aplicación en transacciones comerciales, laborales, bancarias y bursátiles. Esto es, que sin importar el cargo donde ustedes se desempeñen en cualquier tipo de organización, resulta necesario conocer los principios básicos de esta asignatura.

2. El interés

2.1. Definiciones

El interés es el valor que se paga por el uso del dinero; es la motivación para que se realicen las inversiones o se preste dinero y esta motivación es lo que hace que existan las finanzas y los sistemas financieros.

El interés es el pago que realiza la persona o empresa que recibe un dinero en calidad de préstamo; para la persona o entidad que prestó el dinero, el interés que recibe representa la utilidad o ganancia que genera su capital.

Revisemos qué términos intervienen en la liquidación de un interés:

En una transacción u operación financiera intervienen la persona o entidad que invierte, coloca el dinero y recibe a cambio un interés (prestamista), y la persona o entidad que toma el dinero, capta o recibe el dinero en préstamo, y por el cual pagará el interés (prestatario).

Cuando necesitamos dinero nos dirigimos a la persona o entidad prestamista para solicitar el préstamo. Ante este evento ¿qué preguntas surgen?

- -¿Cuánto dinero necesita?
- -¿Por cuánto tiempo?
- -Acá cobramos (como ejemplo) el 3% mensual, ¿está de acuerdo?
- Y me puede pagar al final, el capital y los intereses.

¿Cuánto dinero necesita?

Se trata de la variable capital**,** es decir el dinero recibido (u otorgado) en calidad de préstamo, el capital se conoce también como: C **(**capital), CI (capital inicial), VI (valor inicial), P (presente), VP (valor presente) y VA (valor actual).

En nuestro medio vamos a utilizar VP o VA, pero es necesario que ustedes conozcan que se puede identificar este término “capital” con otra nomenclatura.

¿Por cuánto tiempo necesita el dinero?

Esta pregunta corresponde a la duración de la operación, es decir, es el tiempo durante el cual el dinero tarda en regresar a la caja del prestamista. Esta variable se representa por “t” y se expresa como: días, semanas, quincenas, bimestres, trimestres, cuatrimestres, semestres, años, bienios, trienios, cuatrienios, quinquenios, etcétera.

Cobro el 3% mensual. ¿Está de acuerdo?

Se establece un porcentaje que se le aplicará al capital que recibimos en préstamo o que se invierte.

Esta variable se denomina "tasa de interés", y se representa como "i". Se dice también que la tasa de interés es la tasa de rentabilidad en una inversión.

Comprender e interpretar esta variable es muy importante. Analicemos la manera correcta de leer una tasa de interés:

- Si la tasa de interés es del 1% mensual, significa que:

$$1\% \text{ mensual} = \frac{1}{100} = 0{,}01 \text{ mensual}$$

Lo que significa, que por cada $100 prestados, es necesario pagar $1 de interés, cada mes.

- Si la tasa de interés es del 25% anual, significa que

$$25\% \text{ anual} = \frac{1}{100} = 0{,}25 \text{ anual}$$

Es decir que, que por cada $100 tomados en préstamo, se deben pagar $25 de intereses, cada año.

Las entidades financieras hablan de:

- Tasa pasiva para referirse a la tasa de captación que son aquellas que pagarán por nuestros ahorros.
- Tasa activa para denotar las tasas de colocación, es decir, aquellas tasas de interés que los usuarios de crédito pagarán al sector bancario.

La diferencia entre la tasa activa y la tasa pasiva es una ganancia que se conoce como margen de intermediación.

Ejemplo: si un banco recibe (capta) dinero del público a través de cuentas de ahorro y pagan tasa de interés del 2% (tasa pasiva) y ese mismo dinero lo presta a la tasa de interés del 25% (tasa activa), su margen de intermediación le representa una ganancia básica del 23%.

Al final, me devuelve el capital y los intereses.

Significa que el valor presente más los intereses se pagan al cumplirse el plazo de la operación. Esta cantidad de dinero se conoce con los siguientes nombres: valor final, valor futuro, monto, total ahorrado, total capitalizado.

Generalizando, denominaremos valor final (VF) al dinero que conforma la suma del valor presente y los intereses.

Ejemplo 1.

Cuanto sería el valor que pagaríamos en un mes por interés, si aceptamos el préstamo por un valor de $1´000.000,00 de pesos, con la tasa del 3% mensual?

Representaremos el interés con "I" y tendríamos:

I = $1´000.000,00 x 0,03 x 1

I = $30.000,00

Si reducimos la anterior operación a una fórmula obtenemos:

Fórmula 1: I=VA x i x t

De lo anterior podemos deducir, que el interés es directamente proporcional al valor actual, a la tasa de interés y al tiempo, si alguno de estos factores cambia, el valor pagado por interés, varía.

Hay que tener en cuenta, que al hablar solo de interés suponemos que este lo pagaremos o lo ganaremos al final del mes, o al final del período establecido para su pago o liquidación. En el mercado encontramos también el interés anticipado, el cual trataremos más adelante.

La tasa de interés y el tiempo deben trabajarse en la misma unidad de medida, si la tasa es mensual, el tiempo debe ser meses; si la tasa es trimestral, el tiempo debe ser trimestres, si la tasa es anual el tiempo debe ser años, etcétera.

El interés siempre es un valor, como cuando hablamos de utilidad contablemente, siempre es un valor.

2.2. Interés simple

En el mercado financiero sólo hay dos maneras para que nos liquiden un interés, la manera más sencilla, es la que se denomina interés simple, y otra más compleja es la llamada interés compuesto. Por ahora nos detendremos en las características del interés simple**.**

El interés simple se denomina así porque es la operación más sencilla que se puede calcular para liquidar el valor a pagar por el uso de un dinero. Su característica principal es que la base sobre la cual se liquida el interés, permanece constante durante todo el tiempo que dura la inversión, la negociación, la transacción, el préstamo, la operación financiera que se realice.

Características del interés simple:

- El capital inicial no varía durante el tiempo que dura la transacción, sólo el capital genera intereses; en otras palabras no se ganan intereses sobre intereses.
- El interés ganado o pagado es igual en cada período.
- La tasa de interés siempre se aplicará sobre el valor original de la deuda o inversión.

La transacción más sencilla que se puede presentar, una operación de interés simple, se representó en la fórmula 1:

I = VA x i x t

Pero si el interés es pagado al final del período (vencido), es necesario hacer el cálculo de cuánto será el valor total que se debe cancelar, esto es el valor final, el valor futuro, el cual representaremos con VF; y ¿cuál será este valor? El resultante de sumar el valor inicial o actual del dinero, más los intereses ganados, que dan como resultado la siguiente fórmula:

***Fórmula 2*:** VF = VA+I

Y por sustitución tenemos:

VF = VA + (VA x i x t)

Fórmula 3: VF = VA x (1+i x t)

Cualquier término que interviene en una igualdad (ecuación), puede ser despejado; hallado, por lo tanto de las anteriores fórmulas, podemos despejar el VA, la tasa de interés y el tiempo**.** ¿Cual fórmula usar? depende de lo que vamos a calcular y los términos que nos dan.

Por despeje de las formulas anteriores, podemos obtener una fórmula para calcular el valor actual (VA) o valor presente (VP).

Fórmula 4: VA= VF-I

Fórmula 5: VA=VF / (1+i x t)

Ejemplo 2.

Usted piensa invertir la suma de $100.000,00 en una cuenta de ahorros que le ofrece una tasa de interés del 2% mensual simple. ¿Cuánto recibirá al final de tres meses?

VA= $100.000,00 i =2% mensual simple t =3 meses VF =?

VF= VA x (1 + (i x t))

VF= $100.000,00 x (1+(0,02 x 3))

VF= $106.000,00

Al final de los tres meses que dura la inversión se recibirán $106.000,00. Verificamos el cumplimiento del principio de la matemáticas financiera que el dinero cambia de valor a través del tiempo, los $100.000,00 se convierten en $106.000,00 al final de los tres meses.

Comprobemos con la siguiente tabla las características del interés simple, tomando el ejemplo anterior:

Tabla 1. Características del interés simple

N° de periodos	Capital	Tasa de interés	Interés	Valor futuro
1	100.000,00	0,02	$2.000,00	$102.000,00
2	100.000,00	0,02	$2.000,00	$104.000,00
3	100.000,00	0,02	$2.000,00	$106.000,00

El capital permaneció constante, el interés ganado es igual en cada período, y la tasa de interés siempre se aplicó sobre el valor original de la inversión.

De lo anterior podemos concluir, que el interés simple nos daría igual si nos ofrecen la tasa de interés anual, que correspondería a: i=2% x 12=24% anual; si la tasa es anual el tiempo debe manejarse en años, entonces: t=3 meses convertidos en años = 3 de 12 meses que tiene un año = 3/12, para el uso de la fórmula sería:

VF = 100.000,00 x (1 + (0,24 x 3/12))

VF = $106.000,00

Ejemplo 3.

¿Qué suma se requiere invertir hoy, para que dentro de tres meses, con una tasa de interés simple del 1% mensual, tener reunidos $1.184.500 pesos.

La pregunta es el valor actual VA y los términos conocidos son:

VF= $1.184.500

Tiempo= t = 3 meses

Tasa de interés= i = 1% mensual simple.

Como la tasa es mensual, el tiempo lo tomamos en meses, tal como lo están dando.

La formula de VA es:

VA= VF / (1 + i x t) reemplazamos y despejamos

VA=1.184.500 /(1+ 0,01 x 3)

VA= 1.184.500 /(1+ 0,03)

VA= 1.184.500 /1,03

VA= $1.150.000 es el valor que se debería invertir hoy para lograr el objetivo.

2.3. Clases de interés de acuerdo con el manejo del tiempo

Ejemplo 4.

Se desea hacer una inversión de $1´000.000,00 durante el mes de marzo y nos ofrecen una tasa de interés del 18% anual simple. Hallar el interés ganado:

VA= $1´000.000,00   i = 18% anual simple   t = mes de marzo   I =?

I= VA x i x t

Este es un ejemplo aparentemente sencillo, pero no nos están dando un tiempo muy claro, nos dicen mes de marzo, lo que nos lleva a analizar que si la tasa es anual, el tiempo debe ser años, ¿cómo convertimos el mes de marzo en años?

- Primera opción: tomar el mes de marzo como un mes, lo cual convertido en años sería 1/12 o lo que es igual, decir marzo tiene 30 días y el año 360 días, días convertidos en años =30/360.
- Segunda opción: tomar el mes de marzo con los días exactos que tiene, es decir 31 días y el año 360, días convertidos a años =31/360
- Tercera opción: pero si marzo lo tomamos de 31 días, sería correcto decir que el año tiene 365 días, días convertidos a años =31/365
- Cuarta opción: una última combinación posible sería tomar marzo de 30 días y el año de 365 días, días convertidos a años =30/365.

¿Cuál es la opción correcta? Todo depende de con quién estamos haciendo la transacción.

En la práctica comercial, este manejo que se le da al tiempo, origina unas clases de interés:

Interés ordinario: cuando tomamos años de 360 días.

Interés exacto: cuando tomamos años de 365 días (o 366 cuando es bisiesto).

Y a la vez, el interés ordinario y el interés exacto se pueden trabajar con:

Tiempo aproximado**:** cuando tomamos todos los meses de 30 días, para su cálculo cuando nos dan fechas, se halla de la diferencia entre la fecha final menos la fecha inicial, y los meses que nos den se toman de 30 días.

Ejemplo 5.

Hallar los días aproximados transcurridos entre el 26 de febrero y el 27 de mayo del mismo año.

La fecha la manejamos en su forma de: días, meses, años.

	Día (de)	Mes (mm)	Año (asa)
Fecha final	27	05	
Fecha inicial	25	02	
Diferencia	02 DIAS	03 MESES	

Total días transcurridos= 02 días más (3 meses x 30 días= 90 días) = 92 días totales.

Tiempo exacto**:** cuando tomamos los meses según calendario. Para su cálculo usamos la tabla de días. La tabla de días le da un número a cada día del año; el 1º. de enero es el día 1, y el 31 de diciembre, el día 365. Para calcular los días tomamos los días transcurridos en el año, entre la fecha final menos los días transcurridos del año de la fina inicial.

Inicio por mostrarles la tabla de días:

Tabla 2. Tabla de días

N	Ener	Febr.	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Sept.	Oct.	Nov	Dic	N
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31		90		151		212	243		304		365	31

Ejemplo 6.

Hallar los días exactos transcurridos entre el 26 de febrero y el 27 de mayo del mismo año.

Buscamos en la tabla a que día del año corresponde.

	DD.MM.AAAA	N° de días del año	
Fecha final	27-05	147	
Fecha inicial	26-02	57	
Diferencia		90	Días totales exactos

Podemos comparar el ejercicio 4 y el 5, y ver que si utilizamos tiempo aproximado, tomaríamos 92 días, y si utilizamos tiempo exacto, tomaríamos 90 días.

El interés ordinario con tiempo aproximado: es el que se conoce como comercial, pues se utiliza normalmente en el comercio y cuando no se especifica el uso de otro. Para nuestro ejemplo :

I = $1´000.000 x 0,18 x 30/360

I = $15.000,00

El interés ordinario con tiempo exacto: es el que se conoce como bancario, y se utiliza normalmente en todas las transacciones que se efectúen con el sistema bancario. Para nuestro ejemplo :

I = $1´000.000 x 0,18 x 31/360

I = $15.500,00

El interés exacto con tiempo exacto: es el que se conoce como "racional", "real", verdadero" o sencillamente "exacto". En la actualidad se aplica en las entidades que ofrecen intereses diarios, en los fondos de inversión donde se efectúan inversiones temporales. Para nuestro ejemplo :

I = $1´000.000, 00 x 0,18 x 31/365

I = $15.287,67

El interés exacto con tiempo ordinario **:** no tiene un nombre comercial, normalmente no se utiliza, y la razón podría ser obvia al observar el resultado del ejemplo, los intereses que genera son los más bajos posibles :

I = $1´000.000,00 x 0,18 x 30/365

I = $14.794,52

Podemos resumir, que el tiempo exacto lo utilizamos en el interés bancario y en el interés racional, y el tiempo aproximado, en el interés comercial. Teniendo una tasa anual, hay que convertir los días en años, y los dividimos en 360 cuando tengamos interés bancario e interés comercial y lo dividimos en 365 cuando calculemos el interés racional.

Ejemplo 7.

Hallar el valor a su vencimiento, de un depósito a término fijo, el cual tiene fecha de apertura del 15 de enero y vence el 15 de junio del mismo año, acordado con una tasa de interés simple real del 10% anual y una inversión inicial de $3.000.000,00.

Como es un interés simple real, debemos hallar los días exactos transcurridos entre la fecha de apertura y la fecha de vencimiento, el tiempo exacto lo calculamos con la tabla de días:

Buscamos en la tabla a que día del año corresponde.

	DD.MM.AAAA	N° de día del año	
Fecha final	15-06	166	
Fecha inicial	15-01	15	
Diferencia		151	Días totales exactos

Y el manejo del tiempo se hará tomando años de 365 días.

VF= VA (1 + i x t)   entonces VF= $3.000.000,00 (1+ 0,10 x 151/365)

VF= $3.000.000 (1+0,041369863013). Como recomendación utilizamos todos los decimales y solo al final aproximamos a 2 decimales.

VF= $3.000.000 (1,041369863013)

VF= $3.124.109,59

Ejemplo 8.

Cuál es la tasa de interés anual simple comercial que se ganó en una inversión de $$2.455.000, que se realizó el 1 de marzo si el 30 de junio del mismo año devolvieron la suma de $2.520.500 pesos.

La pregunta es la tasa de interés anual simple y los términos conocidos son:

VA= $2.455.000

VF= $2.520.500

El interés comercial implica ***tiempo aproximado***, lo calculamos restando la fecha final menos la fecha inicial:

La fecha la manejamos en su forma de: días, meses, años.

	Día (dd)	Mes (mm)	Año (aaaa)
Fecha final	30	06	
Fecha inicial	01	03	
Diferencia	29 Días	03 Meses	

Total días transcurridos=29 días más (3 meses x 30 días = 90 días) = 119 días totales.

Podemos despejar la tasa de interés de la fórmula de valor final (VF):

VF = VA (1+ i x t) reemplazamos

2.520.500 = 2.455.000 (1+ i x 119/360)

2.520.500 / 2.455.000 = 1+ (i x 119/360)

1,0266802444 – 1 = i x 0,330555555

i = 0,0266802444 / 0,330555555

i = 0,08071334444 x 100

i = 8,07% anual simple

2.4. Interés simple anticipado o descuento simple

Encontramos operaciones de interés anticipado, también llamado descuento, cuando los intereses son cobrados o pagados en el momento de iniciar la operación. Este hecho implica que se acuerde una tasa de interés anticipada.

Observemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 9.

Si solicitamos a un banco un préstamo por $1.000.000,00, para ser cancelado dentro de tres meses. El banco acepta nuestra solicitud, pero debe cancelarse el interés anticipado por los tres meses, a una tasa anticipada del 9% trimestral.

¿Cuál es el valor de los intereses anticipados que debemos pagar?

Vamos a llamar "Ia"= interés anticipado o como "D" = descuento.

Si nos prestan $1 millón de pesos, con una tasa del 9% trimestral y por un trimestre (que corresponde a 3 meses), liquidaríamos el interés de la siguiente manera:

Ia = $1.000.000,00 x 0,09 x 1

Ia = $90.000,00

Los $90.000 pesos serían los intereses anticipados que se pagarían o nos descontarían.

Si del $1.000.000,00 que nos prestan, debemos pagar $90.000,00, ¿cuánto nos queda del valor prestado?

$1.000.000,00 - $90.000,00 = $910.000,00

¿Y cuánto le quedamos debiendo al banco? $1.000.000,00, los cuales debemos pagar dentro de tres meses.

De la anterior operación podemos apreciar que lo que debemos pagar al final de los tres meses, es $1.000.000,00, este es nuestro ***valor final***, nuestro ***valor futuro***, el cual denominamos: **VF.**

El ***interés anticipado***, el cual denominaremos: Ia o D, se obtuvo de multiplicar el valor final, VF, por la tasa de interés anticipada, que denotaremos como: i_a o d (de tasa de descuentos) y luego lo multiplicamos por el tiempo acordado para la transacción: t . De aquí deducimos la fórmula:

Fórmula 6:

$Ia = VF \times i_a \times t$

O

$D = VF \times d \times t$

La diferencia fundamental con el interés simple (vencido) es que en el interés simple, la tasa de interés es vencida y se aplica sobre el valor actual del dinero y en el interés anticipado, la tasa de interés es anticipada y se aplica sobre el valor final.

El ***valor actual*** en una operación de ***interés anticipado*** es igual a:

Fórmula 7:

$VA = VF - Ia$

O

$VA = VF - D$

Reemplazando y factorizamos:

$VA = VF - (VF \times i_a \times t)$

Fórmula 8:

$VA = VF\,(1 - i_a \times t)$

O

$VA = VF\,(1 - d \times t)$

De las anteriores fórmulas, podemos despejar cualquier término que en ellas interviene.

Como la operación que efectuamos es bancaria, el tiempo se manejará como tiempo exacto, tomando años de 360 días en el caso que tengamos que manejar días y tasa anual.

Las fórmulas de interés anticipado se aplican en todas las operaciones donde se acuerden tasas de interés anticipada.

Ejemplo 10.

Un depósito a término fijo, por un valor a su vencimiento de $10.000.000,00, es recibido en forma de pago por un proveedor, el 13 de noviembre (fecha de emisión), a un plazo de 180 días. El 22 de diciembre del mismo año, el proveedor requiriendo liquidez, decide negociar (vender) el título a un banco. El banco acepta la negociación, pero desea obtener una rentabilidad del 3% mensual anticipada. ¿Cuánto debe pagar el banco por este documento, para obtener la rentabilidad esperada?

Como el banco espera una rentabilidad del 3% mensual anticipada, entendemos que es una operación de interés anticipado, donde la tasa anticipada se aplica sobre el valor final del documento, que en este caso es de $10.000.000,00, por el tiempo que dura la transacción.

El tiempo que dura la transacción, también llamado tiempo de descuento, no son los 180 días de plazo del título, porque desde la emisión del título, que fue el 13 de noviembre y la fecha de la negociación con el banco que es el 22 de diciembre, han transcurrido 39 días, (calculamos los días exactos con la tabla de días):

	DD.MM.AAAA	N. ° de día del año	
Fecha final	22-12	356	
Fecha inicial	13-11	317	
Diferencia		39	Días exactos

Por lo tanto el banco y el proveedor negociaran son los días que le falten al documento para vencerse: (180 - 39 = 141 días), 141 días.

Otra forma de calcular los días que le faltan al documento para vencerse, es hallando la fecha de vencimiento, que será el 13 de noviembre del año 1 más los 180 días exactos de plazo; en la tabla de días buscamos a qué día del año corresponde el 13 de noviembre y es el día 317 y le sumamos 180 días que es la duración del título y nos da (317+180 = 497), el día 497, pero el año tiene 365 días, lo que nos significa que pasó del año 1 al siguiente año, o sea 497 menos 365 = 132, son los días transcurridos en el año dos (2); buscamos en la tabla y el día 132 corresponde al día 12 de mayo, que sería la fecha de vencimiento del título. El tiempo de descuento será el tiempo exacto que hay entre la fecha de descuento: 22 de diciembre del año 1 y la fecha de vencimiento: 12 de mayo del año 2, que son 141 días exactos.

Para hallar la fecha de vencimiento:

	DD.MM.AAAA	N. ° de día del año	
Fecha final	31-12-0001	365	
Fecha inicial	13-11-0001	317	
Diferencia		48	Días exactos del año 1
Días del año 2		180 – 48 = 132 días	
Fecha final	12-05-0002	día 132 del año 2	
	Sumamos	48 días del año 1 + 132 días del año 2 = 180 días	Tiempo que dura la inversión del título

Para hallar el tiempo de descuento o el tiempo que le falta al documento para vencerse:

	DD.MM.AAAA	N. ° de día del año	
Días de descuento en el año 1			
Año 0001		365 días	
Fecha de descuento	22-12-0001	356	
Diferencia		9 días	Días del año 1
Fecha de vencimiento	12-05-0002	132 días	Días del año 2
Suma		132+9 = 141 días	Total días exactos de descuento

Podemos hallar el interés anticipado que desea ganarse el banco, utilizando la fórmula 6:

Ia=10.000.000,00 x 0,03 x 141/30

Ia= $1.410.000,00

Tomamos 141/30, por que la tasa de interés es mensual, y debemos convertir los días a meses. Es una regla de tres simple, donde decimos: si 30 días son un mes, ¿141 días cuántos meses son? 141/ 30 = 4,7 meses.

Utilizando la formula 7 calculamos el valor que debe pagar el banco por el documento:

VA= 10.000.000 - 1.410.000,00

VA= $8.590.000,00

También se puede calcular utilizando la formula.8:

VA= 10.000.000,00 (1 - 0,03 x 141/30)

VA= $8.590.000,00

2.5. Descuentos en cadena

Se entiende por *descuento* el menor valor a pagar.

Ejemplo 11.

Una persona adquiere:

10 metros de paño a $30.000 el metro.

5 camisas para sus nietos a $ 20.000 cada una.

3 juguetes por valor total de $ 25.000 cada uno.

En el momento de pagar obtiene un descuento del 15 %.

¿Cuál es el valor del descuento?

¿Cuánto debe pagar neto?

Artículo	VR. Unitario $	VR. Total $
10 metros de paño	30.000	300.000
5 camisas	20.000	100.000
3 juguetes	25.000	75.000
Valor bruto de la factura		475.000
Menos descuento:	$475.000 X 0,15 =	71.250
Valor neto a pagar		403.750

Se comprende entonces que el descuento es un valor que se deduce del total de una obligación, pero tenemos casos denominados "descuentos en cadena"**,** que son una serie de descuentos sucesivos, no acumulativos, atractivos para estimular las ventas.

Fórmula 9:

dt =1 – (1-d1) (1-d2) (1-d3) (1-d4) ……(1-dn)

donde:

dt = Tasa de descuento total

d1 = tasa del descuento adicional número uno

d2 = tasa del descuento adicional número dos

d3 = tasa del descuento adicional número tres

d4 = tasa del descuento adicional número cuatro

dn = tasa del descuento adicional enésimo

Ejemplo 12.

Una distribuidora mayorista de libros ofrece los siguientes descuentos por temporada universitaria:

6% por compra de libros de Economía

5% por compra de libros de Sistemas

7% por compra de libros de Finanzas

8% por compra de libros de Matemáticas

Si un estudiante adquirió un libro de cada uno de las anteriores asignaturas ¿Qué tasa de descuento le deben reconocer?

dt = 1 – (1-d1) (1-d2) (1-d3) (1-d4) ……(1-dn)

dt = 1 - (1-0,06)(1-0,05)(1-0,07)(1-0,08)

dt = 1 - (0,94) (0,95) (0,93) (0,92)

dt = 1 - 0,7640508 = 0,2359492

dt = 0,2359492 x 100

dt = 23,59%

Ejemplo 13.

Un laboratorio farmacéutico factura medicamentos por $500 millones y ofrece los siguientes descuentos:

10% por compras al por mayor

8% por promoción de temporada

20% por pago de contado

Considerando que todos los anteriores descuentos aplican, determine el valor neto a pagar.

dt = 1 – (1-d1) (1-d2) (1-d3) (1-d4) ……(1-dn)

dt = 1 - (1-0,10)(1-0,08)(1-0,2)

dt = 1 - (0,9) (0,92) (0,8)

dt = 1 – 0,6624

dt = 0,3376 x 100 = 33,76%

Valor neto a pagar= $500.000(1-0,3376) = $500.000 x 0,6624 = $331.200

Ejemplo 14.

Una fábrica de dulces puede otorgar máximo una tasa de descuento total del 30%, descompuesta así:

4% a sus clientes

5% por pronto pago

10% por compras al por mayor

Suponga que todos los anteriores descuentos aplican.

Determine el valor del descuento adicional (d4) que se puede ofrecer para la celebración del Día de los Niños, sin que se supere el tope del 30%.

dt = 1 – (1-d1) (1-d2) (1-d3) (1-d4) ……(1-dn)

0,3 = 1 - (1-0,04) (1-0,05) (1-0,10) (1-d4)

0,3 = 1 - (0,96) (0,95) (0,9) (1-d4)

0,3 = 1 – 0,8208 (1-d4)

0,3 = 1 – 0,8208 + 0,8208d4

0,3 – 1 + 0,8208 = 0,8208 d4

0,1208 = 0,8208 d4

d4 = 0,1208 / 0,8208

d4 = 0,14717348 x 100

d4 = 14,72%

2.6. Interés compuesto

Entre las características del interés compuesto tenemos:

El capital inicial varía durante el tiempo que dura la transacción, ya que los intereses se capitalizan, formando un nuevo capital; en otras palabras se ganan intereses sobre intereses.

El interés ganado no es igual en cada período.

El interés compuesto es el de mayor utilización en el mercado, ya que es un estímulo para que el usuario no retire los intereses, sino que los deje invertidos, como en algunas cuentas de ahorro que ofrecen una liquidación y capitalización diaria de intereses.

Ejemplo 15.

Usted piensa invertir la suma de $100.000,00 en una cuenta de ahorros, que le ofrece una tasa de interés del 2% mensual compuesto. ¿Cuánto recibirá al final de tres meses?

El 2% mensual compuesto, quiere decir, que al final de cada mes, liquidan los intereses y los convierten en capital, observemos el procedimiento en la siguiente tabla:

Tabla 3. Características del interés compuesto

N. ° de períodos	Capital	Tasa de interés	Interés	Valor futuro
1	100.000,00	0,02	2.000,00	102.000,00
2	102.000,00	0,02	2.040,00	104.040,00
3	104.040,00	0,02	2.080,80	106.120,80

En el ejemplo anterior, obtuvimos en una forma manual, el ***valor futuro*** o ***valor final*** de la inversión; observemos como lo hicimos:

Los $100.000,00, son el ***valor actual*** o ***valor inicial*** (**VA**).

El 2%, es la ***tasa de interés*** (**i**) que se aplica al capital al final de cada mes.

Reemplacemos en la tabla:

N°. de períodos	Capital	Tasa de interés	Interés	Valor futuro
1	VA	I	VA x i	VA+(VA x i) = VA (1+ i)
2	VA(1+i)	I	VA(1+i) i	$VA(1+i)+VA(1+i)i = VA(1+i)^2$
3	$VA(1+i)^2$	I	$VA(1+i)^2 i$	$VA(1+i)^2 + VA(1+i)^2 i = VA(1+i)^3$

Podemos deducir, para nuestro ejemplo:

$VF = VA\ (1 + i)^3$, siendo 3 el número de meses que dura la inversión, que si esta tiene una duración de **N** número de períodos, nuestra ecuación estaría elevada a la **N**.

Podemos generalizar que el *valor final o futuro* a un *interés compuesto*, será:

Fórmula 10:

$VF = VA\ (1+ i)^N$

donde:

VF = valor futuro, valor final

VA = valor actual, valor inicial o valor presente

i = tasa de interés efectiva para el periodo o tasa de interés por período. Para el uso de la fórmula de interés compuesto será vencida.

N = número de periodos que dura la transacción

Comprobemos con el ejemplo:

VF = 100.000,00 (1 + 0,02) ^{3}

VF = 100.000,00 X 1,061208

VF = $106.120,80

De la fórmula de valor final o valor futuro podemos deducir, despejar, cualquier término que interviene en la fórmula.

Ejemplo 16.

¿Cuánto debe depositarse hoy en una entidad financiera que ofrece el 3% mensual compuesto, si al final de 6 meses se quiere tener reunidos $1.500.000,00?

i = 3% mensual   N = 6 meses   VF = $1.500.000,00   VA =?

VF = VA (1+ i) ^{N} entonces:

Fórmula 11:

VA = VF / (1+ i)^{N}

Es lo mismo que:

VA = VF (1 + i) $^{-N}$

Remplazando para nuestro ejemplo:

VA = $ 1.500.000,00 (1+ 0,03) $^{-6}$

VA = $1.500.000,00 X 0,8375

VA = $1.256.226,39

Ejemplo 17.

En cuánto tiempo se duplica un capital, a una tasa de interés del 1,5% mensual compuesto?

De la misma fórmula: VF = VA (1+ i) ^{N}

Podemos despejar **N**:

Observación: el despeje puede efectuarse con logaritmo natural (LON) o con logaritmo de base diez (LOG).

VP = $1   VF = $2   i = 1,5%   N = número de meses =?

$2 = $1 (1 + 0,015) ^{N}

LON 2 = N LON (1,015)

N = LON 2 / LON 1,015

N = 0,69314718056 / 0,0148886124938

N = 46,55 meses.

Ejemplo 18.

¿A qué tasa de interés trimestral compuesto debo invertir, para que un capital de $500.000,00 se convierta en $650.000,00, al final de 9 meses?

VA = $500.000,00   VF = $ 650.000,00

Tiempo = 9 meses; como la tasa es trimestral, el número de períodos deben ser trimestres, y en 9 meses tenemos: 9/3 = 3 trimestres.

N = 3 trimestres.

De la misma fórmula de VF = VA (1+ i) ^{N}

Podemos despejar i:

650.000,00 = 500.000,00 (1 + i) ^{3}

650.000,00 / 500.000,00 = (1 + i) ^{3}

1,30 $^{1/3}$ = 1 + i

1,0914 = 1+i

i = 1,0914 - 1

i = 0,0914 que en porcentaje será:

i = 0,0914 x 100

i = 9,14% periódica trimestral vencida o efectiva trimestre vencido.

2.7. Clasificación de las tasas de interés

En el mercado financiero, encontramos las tasas nominales y las tasas efectivas; estas a su vez, pueden ser anticipadas y vencidas.

2.7.1. Tasas nominales.

La tasa de interés nominal, tal como su nombre lo indica, es sólo una tasa de nombre, siempre es anual, e irá acompañada de su período de liquidación y su modalidad (vencida o anticipada), pero no es la tasa que se le aplica al capital.

Representaremos la tasa de interés nominal como: I.N. y el número de periodos por año como: p.

Normalmente, se acompaña el período de una tasa nominal con las palabras: "capitalizable" o "convertible", seguido del período (ejemplo: capitalizable mensualmente (C.M.), o del período y su modalidad de pago (ejemplo: mes vencido (M.V.).

2.7.2. Tasas efectivas.

La tasa efectiva o tasa efectiva para el período o tasa periódica, es la que efectivamente, se aplicará al capital en cada período, en el momento de liquidar los intereses. Representaremos la tasa efectiva como: i, e irá acompañada de su período de liquidación, como efectiva y su respectivo período (ejemplo: efectiva mensual (E.M.), efectiva anual (E.A.), etcétera). Mientras no se indique lo contrario, se entiende que es vencida, si es anticipada, se especificará (ejemplo: efectiva mes anticipado (E.M.A.)).

La tasa nominal es la tasa pactada, no es la que se le aplica al capital, pero nos permite hallar la tasa efectiva así:

Ejemplo 19.

Con una tasa nominal del 28% M.V. (mes vencida), p= 12, y la tasa que efectivamente se aplicará al capital al final de cada mes será:

i = 28/ 12 donde i = 2,33 % E.M. (Efectiva mensual).

De lo anterior podemos deducir:

Fórmula 12:

i = IN / p

Y por despeje:

IN = i x p

Nota: en la práctica comercial, generalmente se pacta una tasa nominal o una tasa efectiva anual (que siempre se considera vencida).

Veamos la siguiente tabla donde se ubican los períodos más usados, tomando como ejemplo una tasa nominal vencida del 36%:

IN %		p	i = IN/p	i %	
36% D.V. ó C.D.	día vencido o capitalización diaria	360 ó 365	36/360 ó 36/365	0,1% ó 0,0986% E.D.	efectiva diaria
36% M.V. ó C.M.	mes vencido o capitalizable mensual	12	36/12	3% E.M.	efectiva mensual
36% B.V. ó C.B.	bimestre vencido o capitalizable bimestre	6	36/6	6% E.B.	efectiva bimestral
36% T.V. ó C.T.	trimestre vencido o capitalizable trimestre	4	36/4	9% E.T.	efectiva trimestral
36% S.V. ó C.S.	semestre vencido o capitalizable semestre	2	36/2	18% E.S.	efectiva semestral
36% A.V. ó C.A.	año vencido o capitalizable anualmente.	1	36/1	36% E.A.	efectiva anual

De la tabla anterior podemos observar, que en el único momento donde la tasa nominal es igual a la tasa efectiva, es cuando la tasa efectiva es anual; para las demás, nunca la tasa nominal es igual a su efectiva para el período.

La tasa efectiva por período nos indica que al final del período de la tasa se liquidan y se capitalizan los intereses, por esto es que no se le puede cambiar el período a la tasa, porque no será lo mismo decir 3% E.M., que decir el 9% E.T., a pesar de que tengan el mismo valor de tasa nominal. Esto lo podemos comprobar hallando el valor final de una inversión.

Ejemplo 20.

Tomando las tasas de la tabla hallar el valor final de $100.000, por un tiempo de 2 años:

IN%	p	i = IN/p	N	VF= VA(1+i)^N	VF
36% D.V.	360	36/360= 0,1%E.D.	360X2 = 720	$100000(1+0,001)^{720}$	205.369,42
36% M.V.	12	36/12 = 3% E.M.	12X2 = 24	$100000(1+0,03)^{24}$	203.279,41
36% B.V.	6	36/6 = 6% E.B.	6X2 = 12	$100000(1+0,06)^{12}$	201.219,65
36% T.V.	4	36/4 = 9% E.T.	2X4 = 8	$100000(1+0,09)^{8}$	199.256,26
36% S.V.	2	36/2 = 18% E.S.	2X2 = 4	$100000(1+0,18)^{4}$	193.877,78
36% A.V.	1	36/1 = 36% E.A.	1X2 = 2	$100000(1+0,36)^{2}$	184.960,00

Podemos deducir, que teniendo la misma tasa nominal, entre más veces se capitalice el interés en el año, el valor final será mayor.

2.8. Ejercicios propuestos

- Hallar el valor a su vencimiento de un depósito a término fijo, el cual tiene como fecha de apertura el 13 de noviembre del año 1 y vence el 12 de mayo del año 2, acordado con una tasa de interés simple real del 28% anual y una inversión inicial de $5.000.000. Respuesta:$5.690.410,96
- Hallar el valor final de una cuenta de ahorros con fecha de apertura el 27 de agosto del año 1, la cual se piensa saldar el 16 de marzo del año 3, acordada con una tasa de interés simple bancaria del 26% anual y una inversión inicial de $2.500.000,00. Respuesta:$4.180.972,22
- Hallar los intereses por tres (3) meses, que se deben cancelar sobre un préstamo de $2.000.000,00, acordado a una tasa del 5% mensual simple. Respuesta: $300.000
- Se solicita a un banco un préstamo por $9.000.000,00 de pesos para ser cancelado dentro de seis (6) meses. El banco cobrará un interés anticipado por los seis (6) meses a una tasa del 3,5% mensual anticipada (simple). ¿Cuál es el valor de los intereses anticipados que se deben pagar? Respuesta: $1.890.000.
- Una aceptación bancaria por un valor a su vencimiento de $20.000.000,00 es recibida en forma de pago el 14 de agosto a un plazo de 90 días. El poseedor de la aceptación bancaria decide descontarla (negociarla antes de su vencimiento) el 12 de septiembre con un banco, que desea obtener una rentabilidad del 3% mensual simple anticipada. ¿Cuánto debe pagar el banco por este documento? Respuesta: $18.780.000.
- Si se piensan invertir $5.000.000,00 de pesos en una cuenta de ahorros que le ofrece el 1,5% efectivo mensual (interés compuesto). ¿Cuánto recibirá al final de 4 meses? Respuesta: $5.306.817,75
- Si se desean reunir $2.000.000,00 de pesos para dentro de seis (6) meses, ¿cuánto debe depositarse hoy en una entidad financiera que ofrece el 20% nominal T.V.? Respuesta:$1.814.058,96
- ¿Cuánto tiempo se necesita para triplicar un capital, a una tasa de interés del 21% N.M.V.? Respuesta: 63,33 meses.
- ¿A qué tasa de interés nominal semestre vencido debe invertirse para que un capital se duplique en veinticuatro (24) meses? Respuesta:37,84%NSV
- ¿A qué tasa de interés nominal trimestre vencido debe invertirse para que un capital se triplique en cinco años 22,59% NTV?

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
POLITÉCNICO
GRANCOLOMBIANO