

# Desarrollo teórico del tema de combinatoria presente en algunos libros de texto de matemática de educación secundaria en España

*Espinoza González Jonathan<sup>1</sup>, Roa Guzmán Rafael<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Universidad Nacional de Costa Rica

<sup>2</sup>Universidad de Granada

## Resumen

La Combinatoria es un contenido que presenta bastante dificultad para estudiantes de los diferentes niveles educativos (Navarro-Pelayo, 1994 y Roa, 2000), es un contenido que suele enseñarse de forma aislada de los demás temas que componen el currículo y eso ha provocado, en ocasiones, que el tema no se enseñe y, cuando se enseña, que se enfatice solo en aspectos de tipo algorítmico (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994).

En esta comunicación nos vamos a centrar en el tratamiento que se le da al tema de Combinatoria en los libros de texto de Matemáticas de Educación Secundaria en España; nos basamos en la teoría de los significados personales e institucionales de los objetos matemáticos propuesta por Godino y Batanero (1994) para considerar el libro de texto como una institución y, en ese contexto, el problema de investigación abordado es la caracterización del significado institucional del objeto matemático “Combinatoria” presente en los citados libros de texto y, para ello, se describirá el desarrollo teórico del tema de Combinatoria presente en algunos de los libros de texto que conforman la muestra. Las implicaciones didácticas y las expectativas que se abren para futuros trabajos de investigación, en el campo de la Educación matemática, dan una relevancia especial a los resultados que aquí se exponen.

**Palabras clave:** Educación, Combinatoria, Probabilidad, Libros de texto.

## 1. Introducción

Esta comunicación forma parte de un estudio más extenso que se realizó en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada en España, específicamente en el grupo de investigación “Didáctica de la Probabilidad, Estadística y Combinatoria”, en la línea de investigación “Análisis de libros de texto y el currículo”.

En el trabajo descrito se caracterizó el significado institucional del objeto matemático “Combinatoria” en la institución de los libros de texto de Matemática utilizados en la Educación Secundaria en España. Para ello se realizó una descripción del capítulo sobre Combinatoria presente en los libros de texto seleccionados y además se identificaron y analizaron las tareas donde es posible aplicar un contenido combinatorio para su resolución a lo largo de todo el texto y de cada uno de los textos seleccionados del estudio.

En esta comunicación nos limitaremos a presentar los resultados obtenidos al describir el desarrollo teórico del tema de Combinatoria presente en los libros que conforman la muestra, según las variables y categorías consideradas.

Según Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994), debido a que la Combinatoria se encuentra aislada del currículo español; a la dificultad propia del tema de Combinatoria y que por lo general su enseñanza se presenta sin conexión con los demás temas del currículo, provoca que en algunos casos se omita su enseñanza y cuando se enseña el tema, se basa principalmente en el aprendizaje de las fórmulas de combinatoria y en la realización de ejercicios estereotipados. Precisamente esta problemática nos motivó a escoger el tema de

Combinatoria concentrándonos en su tratamiento en libros de texto de Educación Secundaria, principalmente porque el libro de texto es considerado por diversos autores como uno de los recursos didácticos más utilizados por los profesores y alumnos en los procesos de Enseñanza y Aprendizaje.

Esta comunicación se divide en cinco secciones. En la primera se describe el problema de investigación, en la segunda sección presentamos los fundamentos teóricos que sirven de base para el estudio. En la tercera sección se encuentra la metodología del estudio, seguidamente se presentan los resultados obtenidos a partir del análisis realizado a los capítulos sobre Combinatoria presente en algunos libros de texto que conforman la muestra y por último en la quinta sección se incluyen las conclusiones obtenidas y sus posibles implicaciones.

Es importante indicar que con este estudio no pretendemos realizar una evaluación de dichos textos para enaltecerlos o devaluarlos, sino que se pretende analizarlos y discutirlos desde un punto de vista crítico y con objetivos meramente investigativos.

## **2. Problema de investigación**

Esta investigación se enmarca dentro de la agenda de investigación en Didáctica de la Matemática propuesta por Godino y Batanero (1994), basada en la noción de significado de los objetos matemáticos. Estos autores señalan que un problema fundamental de investigación es la caracterización de los significados institucionales de los objetos matemáticos en las diversas instituciones. Al ser la noción de institución muy amplia, para efectos de este trabajo hemos considerado el libro de texto de Matemática como una institución.

Investigadores como Piaget e Inhelder (1951) y Kapur (1970) destacan la importancia de la Combinatoria. Por ejemplo una escasa capacidad de análisis combinatorio reduce la aplicación del concepto de probabilidad a casos muy sencillos o de fácil enumeración (Piaget e Inhelder, 1951), mientras que Kapur (1970) menciona que la Combinatoria brinda oportunidades a los alumnos de realizar actividades características de la Matemática como hacer conjeturas, generalizar, indagar la existencia de soluciones, cuestiones de optimización, entre otras.

Aunque la Combinatoria es un tema de importancia en la literatura, en el currículo actual de Educación Secundaria en España (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) y en el correspondiente a la Comunidad Autónoma de Andalucía (Junta de Andalucía, 2007), el papel de la Combinatoria es poco significativo dado que en estos documentos no aparecen, de forma explícita, contenidos relacionados con la Combinatoria en ninguno de los cursos y bloques de contenido que lo componen, solo se puede encontrar, de modo indirecto y de forma implícita, referencias a recuentos de casos y a la construcción del espacio muestral de un experimento, principalmente aplicadas al cálculo de probabilidades.

Sumado a lo anterior, el tema de Combinatoria es considerado difícil por los propios profesores que lo enseñan (Navarro-Pelayo, 1994). Por su parte Roa (2000) en un estudio sobre el razonamiento combinatorio de estudiantes con preparación matemática avanzada, encontró que los problemas combinatorios son difíciles incluso para este tipo de estudiantes.

Según Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994), debido a que la Combinatoria se encuentra aislada del currículo español; a la dificultad propia del tema de Combinatoria y que por lo general su enseñanza se presente sin conexión con los demás temas del currículo, provoca que en algunos casos se omita su enseñanza y cuando se enseña el tema, se basa principalmente en el aprendizaje de las fórmulas de combinatoria y en la realización de ejercicios estereotipados.

En resumen existe una problemática sobre el tema de Combinatoria caracterizada principalmente por la dificultad de este objeto de estudio, su inclusión implícita en el currículo actual de Educación Secundaria de España. Además por ser un contenido que suele enseñarse de forma aislada de los demás temas descritos en el currículo, provocando, en ocasiones, que el tema de Combinatoria no se enseñe o bien cuando se enseña se enfatiza solo en aspectos de cálculo y aplicación de fórmulas. Considerando que el libro de texto es de gran uso entre los profesores y estudiantes, decidimos acercarnos a dicha problemática realizando un análisis de algunos libros de texto utilizados en la Educación Secundaria de España.

Nos basamos en la teoría de los significados personales e instituciones de los objetos matemáticos propuesta por Godino y Batanero (1994) para considerar el libro de texto como una institución. Así el problema que pretendemos abordar es la caracterización del significado institucional del objeto matemático “Combinatoria” presente en la institución de los libros de texto de Matemática utilizados en la Educación Secundaria en España. Para ello se describirá el desarrollo teórico del tema de Combinatoria en una muestra de libros de texto de Matemática utilizados en la Educación Secundaria en España, según variables y categorías consideradas.

### **3. Fundamentación teórica del estudio**

En nuestra investigación se aplican algunas nociones teóricas desarrolladas por Godino y Batanero (1994) sobre el significado personal e institucional de los objetos matemáticos. Para Godino y Batanero (1994) el concepto de institución es muy amplio. Una institución especial es la Matemática (M) formada por los productores del saber matemático. Otras, posibles, son las instituciones de enseñanza en los diversos niveles. En un sentido amplio, podemos considerar los libros de texto como instituciones, ya que en ellos se proponen problemas matemáticos y se describen prácticas específicas para resolverlos, usando medios expresivos con frecuencia propios de la Matemática.

En cada institución se realizan ciertos tipos de prácticas asociadas a un campo de problemas, los autores mencionados llaman a este tipo de prácticas, institucionales y están constituidas por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I. Su carácter social indica que son observables. Como tipos de tales prácticas sociales se citan: descripciones de problemas o situaciones, representaciones simbólicas, definiciones de objetos, enunciados de proposiciones, procedimientos que son invariantes característicos del campo de problemas, argumentaciones, etc.

Además de las prácticas institucionales, hay que considerar también las prácticas realizadas por las personas en su intento de resolver situaciones-problema (prácticas personales).

De esta forma en cada campo de problemas e institución (persona) hay un sistema de prácticas institucionales (personales) significativas asociadas al campo de problemas. Los objetos institucionales (personales) son los emergentes de este sistema de prácticas que son indicadores empíricos que nos permiten caracterizar estos objetos. El sistema de prácticas de donde emerge un objeto institucional (personal), se define como el significado institucional (personal) del objeto dado.

Así por ejemplo, a la pregunta qué es el objeto matemático “Combinatoria” se propone como respuesta: El sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal) compartidas en el seno de una institución (Significado institucional) para resolver situaciones-problemas en los cuales interviene dicho objeto.

“Los currículos y los libros de texto presentan siempre muestras del significado de los

conocimientos matemáticos, con frecuencia no representativas y a veces con sesgos difíciles de eliminar” (Godino y batanero, 1994, p.21), por lo que el análisis del entorno de significación que se ofrece al alumno en la clase de Matemática se revela como esencial para interpretar correctamente las respuestas de éste.

#### **4. Metodología**

El enfoque de nuestro estudio se enmarca en el paradigma cualitativo, dado que no se probarán hipótesis, ni se generalizan de manera probabilística los resultados a poblaciones más amplias, tampoco se buscan obtener muestras representativas y las variables no se definen con el propósito de manipularse ni controlarlas experimentalmente, los cuales son algunos elementos que según Hernández, Fernández y Baptista (2006) caracterizan una investigación cualitativa.

Por otro lado, los datos se analizan desde el punto de vista descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006) dado que nuestro objetivo es describir el desarrollo teórico del tema de Combinatoria presente en algunos libros de texto de Matemática de Educación Secundaria en España.

La observación es una de las principales técnicas de recolección de datos en la investigación descriptiva. En nuestra investigación los datos se obtuvieron al observar libros de texto de Matemática, utilizando para ello la metodología de análisis de contenido la cual se basa en la lectura (textual o visual) como instrumento de recogida de información (Andréu, 2000). Los libros de texto que conforman la muestra son los de primero, segundo, tercero y cuarto curso (Opción A y B) de Educación Secundaria en España, de las editoriales SM, Anaya y Santillana publicados en los años 2007 o 2008.

Como se mencionó en la fundamentación teórica para describir el desarrollo teórico del tema de Combinatoria se debe centrar la atención en las prácticas asociadas al campo de problemas que llamamos problemas combinatorios y compartidas en la institución de los libros de texto de Matemática utilizados en la Educación Secundaria en España. Entre las prácticas institucionales descritas por Godino y Batanero (1994) asociadas a un campo de problemas y en las cuales nos enfocaremos se encuentran las representaciones simbólicas, las definiciones de objetos y el enunciado de proposiciones, entre otras.

Para buscar variables asociadas a algunas de las prácticas descritas por Godino y Batanero (1994) que nos permitieran caracterizar el desarrollo teórico del tema de Combinatoria recurrimos a investigaciones previas relacionadas con nuestra temática. Tres investigaciones llamaron nuestra atención, las realizadas por Navarro-Pelayo (1991, 1994) y la elaborada por Ortiz (1999), ya que algunas de las variables utilizadas por estos autores se relacionan con las prácticas descritas por Godino y Batanero (1994). Así, las variables empleadas en este estudio son:

- Ubicación del capítulo de Combinatoria en el libro de texto.
- Contenidos incluidos, notación empleada y orden de presentación.
- Tratamiento dado a las definiciones.
- Modelo combinatorio considerado en el enunciado del concepto combinatorio.
- Utilización de recursos didácticos.
- Presencia de consideraciones históricas.
- Ejemplos/ejercicios introductorios y posteriores a los contenidos sobre Combinatoria.

## 5. Resultados

Respecto a los resultados del estudio encontramos que de los libros que conforman la muestra seleccionada únicamente el manual de Matemática de cuarto curso opción A de la editorial Anaya no contiene un capítulo dedicado al estudio de la Combinatoria. Además los capítulos sobre Combinatoria presentes en los libros de texto de cuarto curso opción A y B de la editorial Santillana son exactamente iguales. De esta forma los resultados obtenidos corresponden al análisis del tema de Combinatoria de cuatro manuales de Matemática de Educación Secundaria diferentes: el del cuarto curso opción A de la editorial SM; cuarto curso opción B de SM; cuarto curso opción B de Anaya y cuarto curso opción A de Santillana.

Para simplificar la presentación de los resultados, en adelante se utilizará la siguiente notación: [A]: Cuarto curso opción A SM, [B]: Cuarto curso opción B SM, [C]: Cuarto curso opción B Anaya y [D]: Cuarto curso opción A Santillana.

Con relación a la ubicación del capítulo sobre Combinatoria presente en los manuales mencionados se observó que en tres de ellos ([A], [B] y [D]) el capítulo anterior al tema de Combinatoria es Estadística y el posterior Probabilidad, únicamente el texto [C] presenta el tema de Combinatoria después del de Probabilidad y como último capítulo del libro.

Respecto a los contenidos sobre Combinatoria que presentan los textos mencionados todos contienen las variaciones ordinarias o con repetición, las permutaciones ordinarias, las combinaciones ordinarias y el diagrama en árbol. De los cuatro manuales, solo el [B] no contiene la regla del producto. Además ninguno incluye la regla de la suma o las combinaciones con repetición. Las permutaciones con repetición solo se encontraron en el manual [A] y las permutaciones circulares solo en el [B]. El libro de texto con mayor cantidad de contenidos es el [D], presentándose 10 de los contenidos descritos, seguido por [B] y [A] y el que presenta la menor cantidad de contenidos es [C] con 6.

Dos de los textos hacen referencia al concepto de Combinatoria, por ejemplo el manual [C] menciona “La Combinatoria se ocupa de contar agrupaciones realizadas con distintos criterios” (p. 228) y el manual [D] “Los métodos de conteo son estrategias utilizadas para determinar el número de posibles resultados que existen al realizar un experimento” (p. 230).

La notación empleada para las operaciones combinatorias es similar en todos los manuales. Se utiliza:  $V_{m,n}$  para las variaciones ordinarias,  $VR_{m,n}$  en las variaciones con repetición,  $P_n$  para las permutaciones,  $C_{m,n}$  en las combinaciones. Solo uno de los textos utiliza dos notaciones diferentes para algunos contenidos combinatorios llegando incluso a mezclar ambas notaciones en el desarrollo teórico del tema.

En tres de los manuales ([A], [C] y [D]) las operaciones combinatorias se presentan en el siguiente orden: variaciones (ordinarias o con repetición), permutaciones (ordinarias o con repetición) y por último combinaciones.

El tratamiento dado a las definiciones de las operaciones combinatorias básicas es equivalente en todos los manuales, con frecuencia se inicia la definición con la frase “distintos grupos o agrupaciones que se pueden formar”, “formar agrupaciones ordenadas” o “distintas formas que se pueden ordenar”, por lo que está implícita en todos los casos la noción de muestra (ordenada o no).

Por ejemplo, en los manuales [A] y [B] definen las variaciones ordinarias de la siguiente forma:

“Variaciones ordinarias o sin repetición de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$  (de orden  $n$ ) son los distintos grupos que se pueden formar con los  $m$  elementos, de manera que en cada grupo entren  $n$  elementos distintos, dos grupos son distintos

si difieren en algún elemento o en el orden de colocación” ([A], p. 252 y [B], p. 282).

Los resultados sobre el modelo considerado en el enunciado de las definiciones de las operaciones combinatorias, muestran que todas las definiciones de los textos analizados utilizan al menos el modelo de selección. En el caso de las variaciones ordinarias o con repetición se emplean los modelos de selección y colocación. La mayoría de las definiciones presentan el modelo de selección de forma explícita, pues el enunciado menciona que los elementos se toman o eligen, sin embargo en algunas definiciones la noción de muestra aparece de forma implícita.

Respecto a los recursos didácticos que promueven los manuales analizados, los textos [A], [B] y [D] promueven el uso de la calculadora, principalmente como un recurso para facilitar los cálculos. Solo el texto [C] propone, para introducir el tema, el uso de material manipulativo.

Con relación a las consideraciones históricas, solo en el texto [D] introduce el tema con un breve relato histórico sobre el matemático Blaise Pascal y la máquina que inventó para contar; sin embargo no se relaciona con la construcción de los conceptos combinatorios. Ninguno de los manuales menciona como surge la Combinatoria, qué tipos de problemas motivaron su estudio o quiénes son sus principales precursores, por nombrar algunos aspectos relevantes.

Una de las variables de este estudio es analizar los ejemplos y ejercicios<sup>1</sup> que se presentan antes o después de un contenido sobre Combinatoria, los resultados muestran que todos los manuales incluyen ejercicios posteriores a la definición y solo [D] no presenta ejemplos introductorios. También se encontró que únicamente [C] no incluye ejemplos después de las definiciones y ninguno contiene ejercicios introductorios para las operaciones combinatorias.

En general la estructura de los ejemplos y ejercicios presentes en [A] y [B] es similar: ejemplos introductorios-ejemplos posteriores a la definición-ejercicios posteriores a la definición. En el manual [C] ejemplos introductorios-ejercicios posteriores a la definición y en [D]: ejemplos posteriores a la definición-ejercicios posteriores a la definición.

## **6. Conclusiones e implicaciones**

El tema de Combinatoria se ubica en los libros de textos analizados, principalmente después del tema de Estadística y antes del capítulo de Probabilidad, esto puede llevar a que los estudiantes utilicen técnicas de recuento propias de la Combinatoria para el cálculo de probabilidades, sin embargo en los capítulos sobre Probabilidad de los manuales seleccionados no observamos tareas en las cuales se promueva el uso de algún contenido combinatorio, por lo que el estudio del tema de Combinatoria se realiza de forma aislada en los textos analizados.

Los libros de texto de Matemática seleccionados que contienen un capítulo sobre Combinatoria incluyen, al menos, los siguientes contenidos combinatorios: variaciones ordinarias o con repetición, combinaciones ordinarias, permutaciones ordinarias y el diagrama en árbol. Ninguno de los textos analizados incluye, de forma explícita, las combinaciones con repetición o la regla de la suma.

Las operaciones combinatorias se presentan en los capítulos sobre Combinatoria, principalmente en el siguiente orden: primero el diagrama en árbol o la regla del producto, luego las variaciones, seguido por las permutaciones y por último las combinaciones. Esto

---

<sup>1</sup> Los ejemplos y ejercicios son tareas que se distinguen en que las primeras se presenta una solución, mientras que los segundos son tareas que el estudiante tiene que resolver

coincide con los resultados obtenidos por Navarro-Pelayo (1991). Solo uno de los manuales sigue las recomendaciones de Fischbein y Gazit (1988) quienes consideran que la primera operación combinatoria que se debe estudiar cuando se utiliza el diagrama en árbol es la de variaciones con repetición, seguido por las permutaciones y por último las combinaciones que ofrecen mayor dificultad a los alumnos.

Todas las definiciones de las operaciones combinatorias básicas, emplean el modelo de selección. Este hallazgo se considera de gran importancia dado que en un análisis realizado a las tareas propuestas en uno de los libros de texto seleccionados que contienen el capítulo de Combinatoria, se observó que también consideran el modelo de selección en su enunciado. Lo cual evitará posibles dificultades a los estudiantes al no tener que pasar de un modelo combinatorio a otro.

En el capítulo sobre Combinatoria presente en los libros de texto analizados se usan notaciones similares para las operaciones combinatorias básicas. No obstante uno de los textos presenta dos notaciones diferentes para algunas operaciones combinatorias mezclando ambas notaciones en el desarrollo teórico del tema. Hadar y Hadass (1981) mencionan que la dificultad que poseen los estudiantes de elegir una notación que represente de forma adecuada la información y condiciones dadas en las tareas aumenta debido a que algunos textos emplean diferentes notaciones para las operaciones combinatorias, resultado que hemos obtenido en uno de los textos analizados.

Las expresiones algebraicas (fórmulas) que aparecen en los capítulos sobre Combinatoria de los textos seleccionados para calcular las operaciones combinatorias son similares en todos los textos analizados, sin embargo dos de los textos estudiados emplean expresiones más simplificadas respecto a los otros dos textos que contienen el capítulo sobre Combinatoria. Consideramos que dichas expresiones más simplificadas facilitan su aplicación por parte del estudiante.

El único recurso didáctico que promueven los libros de texto analizados es el uso de la calculadora y se utiliza principalmente como recurso para simplificar los cálculos. Sin embargo el currículo de Educación Secundaria para Andalucía recomienda que las calculadoras no deban suponer solo un apoyo para la realización de cálculos complejos, sino mucho más que eso, deben convertirse en herramientas para la construcción del pensamiento matemático y facilitar la comprensión de los conceptos, ya que permiten liberar de una parte considerable de carga algorítmica. Por otra parte no se promueve por ejemplo la metodología basada en juegos. Engel, Varga y Walser (1976) proponen usar, para la enseñanza de la Combinatoria, una metodología basada en juegos, el uso de diagrama en árbol y los materiales manipulativos para evitar sesgos en el razonamiento combinatorio de los estudiantes, sin embargo en los textos estas orientaciones no son reflejadas.

En cuanto a la distribución de las tareas en el capítulo sobre Combinatoria se obtuvo que en general los contenidos combinatorios son presentados primero con un ejemplo introductorio, luego con uno o varios ejemplos después de la definición y por último, diversos ejercicios posteriores a la definición. Ninguno de los manuales analizados incluye ejercicios introductorios.

No se encontraron consideraciones históricas que se relacionen con la construcción de los conceptos combinatorios. Por lo tanto no se consideran los lineamientos del currículo de Educación Secundaria para Andalucía donde se destaca que el conocimiento histórico de la Matemática debe entenderse como eje transversal en la enseñanza de las Matemáticas, ha de estar siempre presente en la construcción del conocimiento matemático durante la Educación Secundaria.

## Referencias

- Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.
- Piaget, J. y Inhelder, B. (1951). *La g n se de l'id e de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.
- Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación Matemática avanzada*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). Metodología de la investigación. (4 ed.). México: McGraw-Hill.
- Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics Education*, 3(1), 111-127.
- Andréu, J. (2000). *Las técnicas de análisis de contenido; una revisión actualizada*. Recuperado el 22 de julio, 2011 de <http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf>.
- Hadar, N. y Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problema is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics*, 12(1), 435-443.
- Fischbein, E. y Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 5(1), 193-198.
- Engel, A., Varga, T. y Walser, W. (1976). *Hasard ou strategie? Jeux de combinatoire, de probabilit s et de statistique*. Paris: O.C.D.L